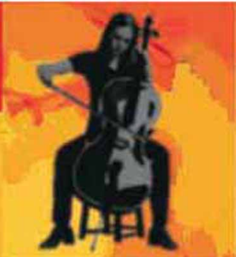
Hans Benker

Wirtschaftsmathematik – Problemlösungen mit EXCEL

- Grundlagen
- Vorgehensweisen
- Aufgaben
- Beispiele



vieweg

Hans Benker

Wirtschaftsmathematik – Problemlösungen mit EXCEL

Vieweg IT / Vieweg Mathematik

Grundkurs Wirtschaftsinformatik
von Dietmar Abts und Wilhelm Mülder

Anwendungsorientierte Wirtschaftsinformatik
von Paul Albar, Heinz Lothar Grob, Peter Weimann und Robert Winter

Statistische Datenanalyse
von Wolf-Michael Kähler

Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik
von Jürgen Tietze

Übungsbuch zur Finanzmathematik
von Jürgen Tietze

Wirtschaftsmathematik – Problemlösungen mit EXCEL
von Hans Benker

Hans Benker

Wirtschaftsmathematik – Problemlösungen mit EXCEL

Grundlagen, Vorgehensweisen, Aufgaben, Beispiele

Mit 138 Abbildungen

vieweg

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Höchste inhaltliche und technische Qualität unserer Produkte ist unser Ziel. Bei der Produktion und Auslieferung unserer Bücher wollen wir die Umwelt schonen: Dieses Buch ist auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier gedruckt. Die Einschweißfolie besteht aus Polyäthylen und damit aus organischen Grundstoffen, die weder bei der Herstellung noch bei der Verbrennung Schadstoffe freisetzen.

1. Auflage Juli 2007

Lektorat: Günter Schulz | Andrea Broßler

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0071-8

Vorwort

Das vorliegende Buch soll kein weiteres Werk über Wirtschaftsmathematik im klassischen Sinne sein, da es hiervon schon eine große Anzahl gibt, wie aus dem Literaturverzeichnis ersichtlich ist:

- Im heutigen Computerzeitalter möchte niemand mehr mathematische Aufgaben per Hand lösen, wie es in vielen Lehrbüchern der Wirtschaftsmathematik praktiziert wird.
- In der Wirtschaftsmathematik werden verstärkt Mathematik- und Tabellenkalkulationsprogramme eingesetzt, um Rechnungen mit einem vertretbaren Aufwand unter Verwendung von Computern bewältigen zu können.
- Im Buch wird dieser Entwicklung Rechnung getragen, indem durchgehend das Tabellenkalkulationsprogramm EXCEL zur Lösung der behandelten Aufgaben mittels Computer herangezogen wird.
- EXCEL wird deshalb bevorzugt, weil es auf den meisten Computern im Rahmen des MICROSOFT-OFFICE-Programmpaketes installiert ist und die wenigsten Nutzer wissen, dass hiermit nicht nur Buchhaltungsaufgaben, Kostenrechnungen und kaufmännische Rechnungen realisierbar sind, sondern auch zahlreiche Aufgaben der *Wirtschaftsmathematik* gelöst werden können:
  - Die *erste Hauptaufgabe* des Buches besteht darin, den Einsatz von EXCEL bei der Lösung von Aufgaben der Wirtschaftsmathematik mittels Computer aufzuzeigen:
    - ∗ Zu Beginn wird eine Einführung in Aufbau und Arbeitsweise von EXCEL und die integrierte Programmiersprache VBA gegeben, so dass auch Einsteiger in der Lage sind, EXCEL und VBA für die Wirtschaftsmathematik einzusetzen.
    - ∗ Für im Buch behandelte bzw. vorgestellte Gebiete der Wirtschaftsmathematik werden Einsatzmöglichkeiten von EXCEL aufgezeigt und anhand von Beispielen illustriert.
    - ∗ Da EXCEL als Tabellenkalkulationsprogramm für Buchhaltung, Kostenrechnungen und kaufmännischen Rechnungen erstellt ist, sind für Anwendungen in der Wirtschaftsmathematik natürliche Grenzen gesetzt. Dies betrifft vor allem hochdimensionale Aufgaben, für die auf spezielle Programmsysteme zurückgegriffen werden muss, wie in den entsprechenden Kapiteln erörtert wird.
  - Da mathematische Aufgaben mittels Computer ohne Mathematikkenntnisse nicht zufriedenstellend lösbar sind, besteht die *zweite Hauptaufgabe* des Buches in einer Einführung in Grundgebiete und Vorstellung wichtiger Spezialgebiete der Wirtschaftsmathematik.
    Deshalb kann das vorliegende Buch als Nachschlagewerk bei Fragen mathematischer Art verwendet werden:
    - ∗ Theorie und numerische Methoden (Näherungsmethoden) der Mathematik werden soweit dargestellt, wie es für Anwendungen erforderlich ist. Dies bedeutet, dass wir auf Beweise und ausführliche theoretische Abhandlungen verzichten, dafür aber notwendige Grundlagen, Formeln und Methoden an Beispielen erläutern, die mittels EXCEL und wenn möglich per Hand gelöst werden.
    - ∗ Um Lesern die Arbeit zu erleichtern, wird der Text des Buches durchgehend parallel geführt:
      - Auf Seiten mit ungerader Seitenzahl findet man *mathematische Grundlagen* und *Methoden* und auf Seiten mit gerader Seitenzahl *zugehörige Beispiele*.

  - Damit kann zum besseren Verständnis der mathematischen Grundlagen und Methoden zuerst auf Beispiele zurückgegriffen werden.

Das vorliegende Buch ist aus Lehrveranstaltungen und Computerpraktika entstanden, die der Autor an der Universität Halle gehalten hat, und wendet sich sowohl an *Studenten* und *Lehrkräfte* der

- Mathematik,
- Wirtschaftsmathematik,
- Wirtschaftswissenschaften

von Fachhochschulen und Universitäten als auch in der *Praxis* tätige

- Mathematiker,
- Wirtschaftswissenschaftler.

Da die behandelten und mit EXCEL gelösten mathematischen Aufgaben nicht nur zu den Grundlagen der Wirtschaftsmathematik gehören, kann das vorliegende Buch auch von Ingenieuren und Naturwissenschaftlern herangezogen werden, um EXCEL erfolgreich zur Lösung mathematischer Aufgaben einsetzen zu können.

Im Folgenden werden einige *Hinweise* zur *Gestaltung* des *Buches* gegeben:

- Im *Fettdruck* werden geschrieben:
  - Überschriften und Bezeichnungen von Sätzen, Definitionen, Beispielen, Abbildungen und Vektoren/Matrizen,
  - Dialogfelder und Menüs von EXCEL,
  - Internetadressen,
  - In EXCEL integrierte (vordefinierte) Funktionen, die als EXCEL-Funktionen bezeichnet werden,
  - Schlüsselwörter der in EXCEL integrierten Programmiersprache VBA.
- In *Großbuchstaben* werden geschrieben:
  Add-In-, Funktions-, Programm-, Operator-, Datei- und Verzeichnisnamen.
- Definitionen, Abbildungen und Beispiele werden in jedem Kapitel mit 1 beginnend durchnummeriert, wobei die Kapitelnummer vorangestellt ist. So bezeichnen z.B. **Def.8.1**, **Abb.4.2** und **Beisp.2.8** die Definition 1 aus Kapitel 8 bzw. die Abbildung 2 aus Kapitel 4 bzw. das Beispiel 8 aus Kapitel 2.
- Wichtige Begriffe sind *kursiv* geschrieben.
- Einzelne *Menüs* einer Menüfolge von EXCEL sind mittels *Pfeil* $\Rightarrow$ getrennt, der gleichzeitig für einen Mausklick steht.
- Bemerkungen und Hinweise werden mit dem Symbol

  eingeleitet und dem Symbol

  ♦

  abgeschlossen.

Abschließend möchte ich allen danken, die mich bei der Erstellung des Buches unterstützt haben:

- Herrn Dr. Klockenbusch, Herrn Schulz und Frau Thelen vom Verlag Vieweg für die Aufnahme des Buchtitels in das Verlagsprogramm und die Unterstützung bei der Erstellung des Manuskripts.
- Der Firma ADDITIVE für die kostenlose Bereitstellung des Programms UNISTAT.
- Meiner Gattin Doris, die großes Verständnis für meine Arbeit an den Abenden und Wochenenden aufgebracht hat.
- Meiner Tochter Uta für Hilfe bei Computerfragen.

Über Fragen, Hinweise, Anregungen und Verbesserungsvorschläge würde sich der Autor freuen. Sie können an folgende E-Mail-Adresse gesendet werden:

hans.benker@mathematik.uni-halle.de

Halle, April 2007 Hans Benker

Inhaltsverzeichnis

TEIL I: EXCEL

1 EXCEL: Einführung

1.1 Grundlagen

EXCEL ist der bekannteste Vertreter von *Tabellenkalkulationsprogrammen*, deren Hauptaufgabe in der Datenverarbeitung besteht:

- Tabellenkalkulationsprogramme sind in sogenannten OFFICE-Paketen verschiedener Softwarefirmen enthalten und für Computerplattformen wie PC, APPLE, Workstation und Betriebssysteme wie WINDOWS, UNIX, LINUX erhältlich.
- EXCEL ist auf vielen Computern installiert, da es zum OFFICE-Paket von MICROSOFT gehört. Falls man das gesamte OFFICE-Paket mit
  - Textverarbeitung (WORD),
  - Tabellenkalkulation (EXCEL),
  - Datenbank (ACCESS),
  - Präsentationsprogramm (POWERPOINT),
  - Informationsmanager (OUTLOOK),
  - DTP-Programm (PUBLISHER)

  nicht benötigt, kann man EXCEL auch einzeln erwerben und installieren.
- Im Buch verwenden wir die aktuelle Version 2003 von EXCEL, die für PCs unter WINDOWS läuft:
  - Welche Version auf einem zur Verfügung stehenden Computer installiert ist, erfährt man aus der Hilfe von EXCEL unter **Info**.
  - Änderungen in neuen Versionen von EXCEL betreffen hauptsächlich Effektivität und Benutzeroberfläche und nicht die Vorgehensweise:
    - * Deshalb lassen sich im Buch behandelte Aufgaben ohne große Schwierigkeiten mit früheren und zukünftigen Versionen von EXCEL lösen.
    - * Da die neue Version von 2007 eine völlig neue Benutzeroberfläche besitzt, muss man sich natürlich erst mit dieser anfreunden, wobei die integrierte Hilfe große Hilfe leistet.
- Es ist häufig unbekannt, dass EXCEL zahlreiche Aufgaben der Mathematik und damit auch Wirtschaftsmathematik lösen kann. Das vorliegende Buch soll dazu beitragen, diese Lücke zu schließen:
  - Es soll helfen, EXCEL erfolgreich in der Wirtschaftsmathematik einzusetzen, d.h. mit seiner Hilfe anfallende Aufgaben mittels Computer zu lösen.
  - Des Weiteren werden Grundlagen und Aufgaben der Wirtschaftsmathematik besprochen und an Beispielen erläutert, so dass das Buch auch als Nachschlagewerk bei mathematischen Unklarheiten und bei der Aufstellung mathematischer Modelle der Wirtschaft herangezogen werden kann.

Beispiel 1.1:

Betrachten wir die Benutzeroberfläche von EXCEL:

a) In Abb.1.1 ist die *Benutzeroberfläche* der Version 2003 zu sehen:

- Man erkennt, dass Tabelle 1 der Mappe 1 und Zelle Z1S1 aktiv sind.
- Es ist die für mathematische Rechnungen besser geeignete *Z1S1-Bezugsart* (siehe Abschn.1.2.4) zur Adressierung der Zellen eingestellt, d.h. Zeilen und Spalten werden durch Ziffern gekennzeichnet.
- Einige Teile der abgebildeten Benutzeroberfläche sind mit Beschriftungen versehen, um das Verständnis zu erleichtern.

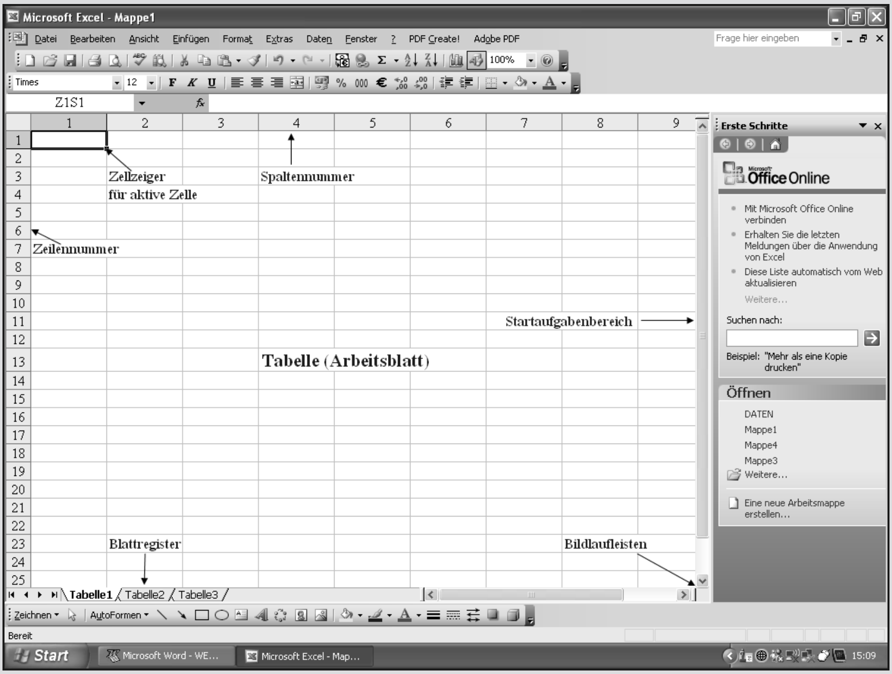
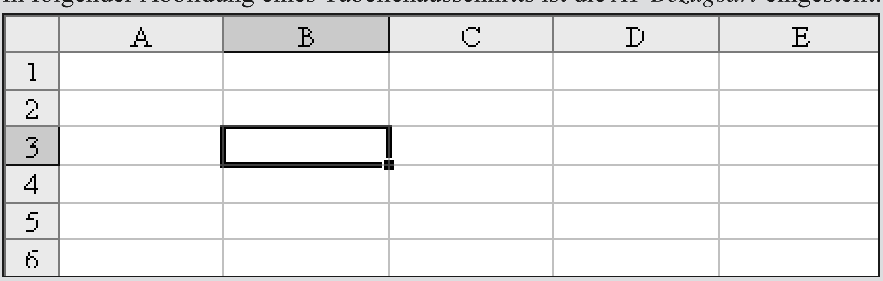


Abb.1.1: Benutzeroberfläche der Version 2003 von EXCEL

b) In folgender Abbildung eines Tabellenausschnitts ist die *A1-Bezugsart* eingestellt:



- Es sind die Zeilen 1 bis 6 und Spalten A bis E zu sehen.

- Im Teil I des Buches (Kap.1-4) wird eine kurze *Einführung* in EXCEL gegeben, so dass auch Einsteiger in der Lage sind, mathematische Aufgaben mittels EXCEL problemlos lösen zu können.
- Im Teil II (Hauptteil) des Buches (Kap.5-14) werden grundlegende Gebiete der *Wirtschaftsmathematik* behandelt, an Beispielen illustriert und *Funktionen* und *Add-Ins* von EXCEL vorgestellt, die zur Lösung anfallender Aufgaben anwendbar sind.

1.1.1 Tabellenkalkulation

Tabellenkalkulation bildet die Basis von EXCEL:

- Man versteht unter Tabellenkalkulation die Erstellung, Verwaltung, Bearbeitung und grafische Darstellung von Daten (meistens in Form von Zahlen) unter Verwendung zweidimensionaler *Tabellen*.
- Da im kaufmännischen Bereich umfangreiche Datenmengen anfallen, liegt hier ein Schwerpunkt für den Einsatz der Tabellenkalkulation.
- Für Tabellenkalkulationen wird EXCEL seit 1985 im Rahmen des OFFICE-Pakets von MICROSOFT angeboten, kontinuierlich verbessert und erweitert:
  - Die aktuelle Version ist EXCEL 2003 und 2007 wird eine Nachfolgeversion erscheinen.
  - Bekannte Vorgängerversionen sind in der Reihenfolge ihres Erscheinens
    EXCEL 5.0, EXCEL 7.0, EXCEL 97 (8.0), EXCEL 2000 (9.0), 2002 (XP)
  - EXCEL ist weitverbreitet und in vielen Firmen und Einrichtungen das grundlegende Programm, um Tabellenkalkulation und kaufmännische Rechnungen mittels Computer durchzuführen.

1.1.2 Anwendungsgebiete von EXCEL

EXCEL kann wesentlich mehr, als im Rahmen von Tabellenrechnungen (Tabellenkalkulationen) Zahlenreihen auszuwerten, wie sie bei Aufgaben der Buchhaltung, Lohn- und Kostenrechnungen, d.h. im kaufmännischen Bereich anfallen:

- EXCEL eignet sich auch zur Verarbeitung von Daten in technischen und naturwissenschaftlichen Bereichen.
- EXCEL ist durch *Funktionen* und *Zusatzprogramme/Erweiterungsprogramme* (*Add-Ins*) zum umfangreichen und wirkungsvollen Werkzeug entwickelt worden, dessen Fähigkeiten in verschiedensten Gebieten von Technik, Wirtschafts- und Naturwissenschaften nutzbar sind. Dies betrifft vor allem Aufgaben, in denen mathematische Modelle auftreten.
- Im Buch wenden wir EXCEL an, um Grundaufgaben der Wirtschaftsmathematik und damit der Mathematik zu lösen. Darüber hinaus geben wir einen Einblick in Spezialgebiete wie Differenzen- und Differentialgleichungen, Optimierung, Finanzmathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, in denen EXCEL ebenfalls erfolgreich einsetzbar ist.

- Bei der A1-Bezugsart werden die Spalten durch Buchstaben und nur Zeilen durch Ziffern bezeichnet.
- Man sieht, dass im abgebildeten Tabellenausschnitt die *aktive Zelle* die Adresse B3 besitzt.

Beispiel 1.2:
Die Symbolleiste *Startaufgabenbereich* erscheint beim Start von EXCEL automatisch am rechten Rand der Tabelle, wie in Abb.1.1 zu sehen ist:

- Man blendet diese Symbolleiste während der Arbeit mit EXCEL meistens aus, um eine größere Tabelle zu erhalten.
- In der Symbolleiste *Startaufgabenbereich* sind mehrere Links zu MICROSOFT-Internetseiten enthalten, über die man Hilfe und Informationen erhalten kann.
- Weiterhin findet man im Startaufgabenbereich
  - die Eingabezeile *Suchen nach*, mit der man sich Hilfethemen anzeigen lassen kann.
  - die Anzeige der zuletzt geöffneten Arbeitsmappen.

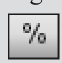
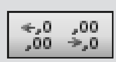
Beispiel 1.3:
Im Folgenden sind zwei wichtige *Symbolleisten* der Benutzeroberfläche von EXCEL zu sehen, die sich ein- und ausblenden und individuell gestalten lassen:

- *Standardsymbolleiste:*

  Hiermit lassen sich grundlegende Schritte aus der Menüleiste wie z.B. Öffnen und Speichern von Arbeitsmappen, Ausschneiden, Kopieren und Einfügen von Zellen, Einfügen von Grafiken einfach durch Mausklick auf die entsprechenden Symbole durchführen.
- *Formatsymbolleiste:*

  Hiermit lassen sich durch Mausklick auf die entsprechenden Symbole die Inhalte der Zellen gestalten (siehe Abschn.1.3.2), so z.B.
  - Schriftart, Schriftgröße, Schriftstil, wie aus Textverarbeitung bekannt.
  - Prozentformat (siehe Abschn.2.7.2) mittels des Symbols 
  - Anzahl der Dezimalstellen mittels des Symbols 

Beispiel 1.4:
Die *Bearbeitungsleiste* der Benutzeroberfläche hat die Gestalt

und ist in drei Elemente aufgeteilt:

1.2 Benutzeroberfläche von EXCEL

1.2.1 Aufteilung der Benutzeroberfläche

In Beisp.1.1 (Abb.1.1) ist die *Benutzeroberfläche* (Bedieneroberfläche) zu sehen, die auf dem Bildschirm nach dem Start von EXCEL erscheint:

- Die *Benutzeroberfläche* hat eine für WINDOWS-Programme bekannte Struktur, d.h. sie besteht aus
  - einer Reihe von *Leisten*, die sich am oberen Rand befinden und mittels des Menüs **Ansicht** ein- oder ausgeblendet werden können,
  - einem Arbeitsfenster (Arbeitsblattfenster), das in EXCEL als *Arbeitsmappe* bezeichnet wird und den größten Teil der Benutzeroberfläche einnimmt.
- Im Einzelnen teilt sich die *Benutzeroberfläche* von oben nach unten wie folgt auf:
  - *Titelleiste*
    Hier wird neben der Programmbezeichnung **Microsoft Excel** die geöffnete Arbeitsmappe angezeigt, wie z.B. **Mappe 1**.
  - *Menüleiste*
    Diese aus vielen WINDOWS-Programmen bekannte Menüleiste enthält die gesamte für die Arbeit erforderliche Palette von Befehlen in folgenden Menüs:

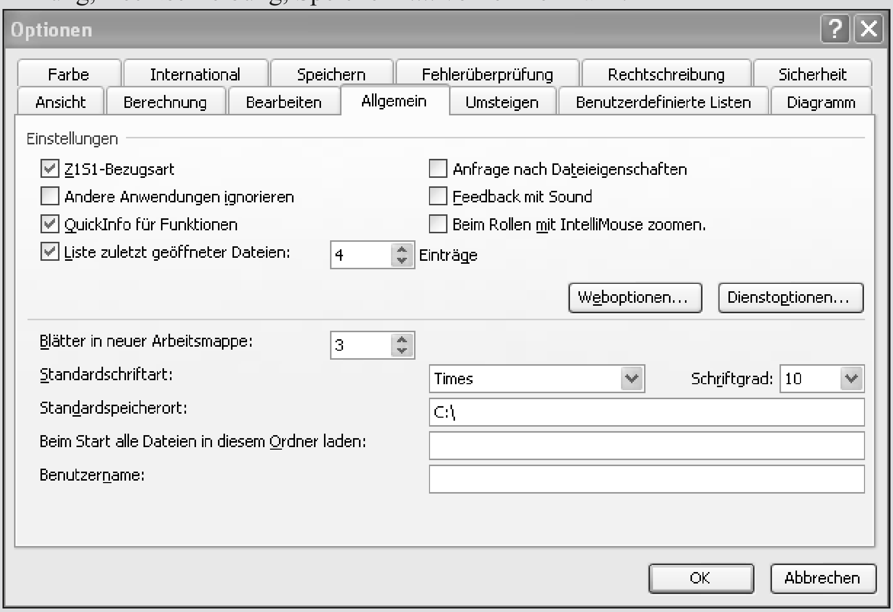
    Datei , Bearbeiten , Ansicht , Einfügen , Format , Extras , Daten , Fenster , ?

    ∗ Diese Menüs enthalten weitere Untermenüs, von denen wir wichtige im Laufe des Buches kennenlernen.
    ∗ Menüs und entsprechende Untermenüs werden jeweils durch Mausklick aktiviert und als *Menüfolge* bezeichnet.
    ∗ Im Buch trennen wir Menüs und Untermenüs durch Pfeile ⇒, die jeweils für einen Mausklick stehen.
    ∗ Nach Anwendung einer Menüfolge erscheint ein *Dialogfeld*, in dem gewünschte Einstellungen vorgenommen werden können:
      – Dialogfelder heißen auch Dialogboxen, Registerkarten oder Fenster.
      – Wir bevorzugen die Bezeichnung *Dialogfeld* und bezeichnen einzelne Karten eines Dialogfeldes als *Registerkarten* (siehe Beisp.1.5).
  - *Symbolleisten*
    Sie sind aus vielen WINDOWS-Programmen bekannt und bestehen aus einer Reihe von *Symbolleistensymbolen* (kurz: *Symbolen*):

    ∗ EXCEL besitzt verschiedene *Symbolleisten*.
    ∗ Die Funktionen der meisten Symbole sind bereits durch die sie darstellenden Bilder zu erkennen.
    ∗ EXCEL liefert eine zusätzliche Erklärung (*Quickinfo*), wenn man den Mauszeiger auf das entsprechende Symbol stellt.

- *Namenfeld:*
  Zur Anzeige der *Zelladresse*, auf der sich der Zellzeiger befindet (in der Abbildung die Zelladresse Z1S1), d.h. hier wird die Adresse der *aktiven Zelle* der Tabelle angezeigt.
- Symbol  für den *Funktions-Assistenten:*
  Zur Eingabe von EXCEL-Funktionen. Da der Funktions-Assistent für mathematische Rechnungen große Bedeutung besitzt, betrachten wir ihn ausführlicher im Abschn.2.2.
- *Eingabezeile:*
  Hier sind Text, Zahlen oder Formeln für eine Zelle mittels Tastatur oder durch Kopieren einzugeben bzw. zu korrigieren.

Beispiel 1.5:
In folgender Abbildung ist das *Dialogfeld* **Optionen** von EXCEL zu sehen:
- Es erscheint nach Aktivierung der Menüfolge **Extras** ⇒ **Optionen**.
- **Optionen** ist ein für die Arbeit mit EXCEL wichtiges *Dialogfeld*, das 13 Registerkarten enthält, in denen man eine Vielzahl von Einstellungen wie Bezugsart, Farbe, Fehlerprüfung, Rechtschreibung, Speichern .... vornehmen kann.



Aus der Abbildung des Dialogfeldes **Optionen** ist die *Struktur* von *Dialogfeldern* gut zu erkennen:
- Sie können aus mehreren *Registerkarten* (hier:13) bestehen, die über *Registerzungen* (*Reiter*) ausgewählt werden.
- Es lässt sich immer nur eine Registerkarte öffnen (in Abbildung: **Allgemein**).
- In den Registerkarten lassen sich eine oder mehrere Einstellungen vornehmen.

Falls *QuickInfos* nicht erscheinen, kann man dies mittels der Menüfolge **Extras ⇒ Anpassen** in der Registerkarte **Optionen** einstellen.

  * Symbolleisten lassen sich in EXCEL mit einer der Menüfolgen **Ansicht ⇒ Symbolleisten** oder **Extras ⇒ Anpassen** auf der Registerkarte **Symbolleisten** ein- oder ausblenden.
  * Man kann Symbolleisten mittels der Menüfolge **Extras ⇒ Anpassen** in dem erscheinenden Dialogfeld auf der Registerkarte **Befehle** individuell gestalten, d.h. nicht benötigte Symbole entfernen bzw. neue aufnehmen. Mit gedrückter Maustaste lassen sich Symbolleisten beliebig im Arbeitsfenster platzieren.
  * Um Platz zu sparen, blendet man meistens nur die häufiger benötigte Standard- und Formatsymbolleiste oberhalb der Bearbeitungsleiste ein (siehe Beisp.1.3).
  * Die Symbolleiste **Startaufgabenbereich**, die beim Start von EXCEL erscheint, ist in Beisp.1.1 (Abb.1.1) zu sehen und wird im Beisp.1.2 kurz beschrieben. Sie wird meistens während der Arbeit mit EXCEL ausgeblendet, um mehr Platz zu erhalten.

- *Bearbeitungsleiste*
  Sie befindet sich unterhalb der Symbolleisten unmittelbar über der Arbeitsmappe und wird näher im Beisp.1.4 beschrieben.
- *Arbeitsmappe*
  Hier spielt sich die Hauptarbeit mit EXCEL ab:
  * Sie liegt unterhalb der Bearbeitungsleiste (siehe Abb.1.1).
  * Sie nimmt den größten Teil der Benutzeroberfläche von EXCEL ein und besteht aus mehreren Tabellen, die sich ihrerseits aus Zellen zusammensetzen.
  * Wir behandeln sie ausführlicher in den Abschn.1.2.2-1.2.4.
- *Statusleiste*
  Sie befindet sich unterhalb der Arbeitsmappe. Hier zeigt EXCEL Meldungen und Informationen zum Programmablauf an, wie z.B. *Bereit, Eingeben, Fertig, Neuberechnung*.

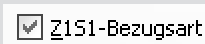
1.2.2 Arbeitsmappe

Arbeitsmappen (kurz: Mappen) sind in EXCEL folgendermaßen *charakterisiert* (siehe auch Abb.1.1):

- Man kann mehrere Arbeitsmappen öffnen, die EXCEL mit **Mappe1**, **Mappe2**, ... bezeichnet.
- Jede Arbeitsmappe besteht aus *Arbeitsblättern:*
  - Sie heißen *Tabellen*.
  - Sie sind mit *Tabelle1*, *Tabelle2*, ... bezeichnet, wobei in der Standardeinstellung drei Tabellen möglich sind, die mittels Blattregisterkarten (Tabellenreiter) der Gestalt

- Registerkarten können folgende Elemente besitzen:
  - *Schaltflächen*, wie z.B.

  - *Kontrollfelder* (*Kontrollkästchen*)
    dienen zur Aktivierung oder Deaktivierung von Einstellungen. Die Aktivierung wird durch Häkchen oder Punkt angezeigt. So dient z.B.



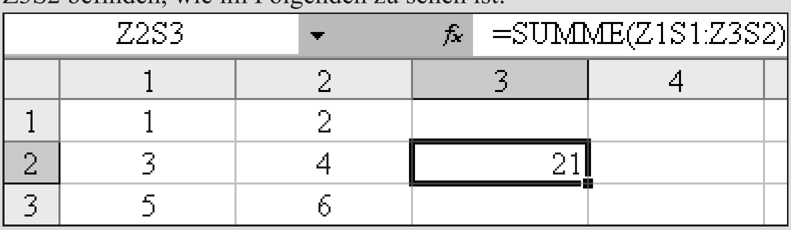
    zur Aktivierung der Z1S1-Bezugsart (siehe Abschn.1.2.4).
  - *Eingabefelder*, wie z.B.

und

    in denen Schriftart bzw. Schriftgrad eingestellt werden können.
  - Des Weiteren können *Optionsfelder* (runde Felder zur Aktivierung von Optionen und Einstellungen) und *Listenfelder* (zur Auswahl einzelner Elemente) auftreten.

Beispiel 1.6:
Illustrieren wir die Adressierung von Bereichen (d.h. Bereichsadressen, Bereichsbezüge) und ihre Anwendung als Argumente in EXCEL-Funktionen (siehe auch Beisp.2.4 und 2.5):

a) Im abgebildeten Tabellenausschnitt ist ein *Bereich* mit 6 Zellen zu sehen, der zwischen den Zellen Z1S1 und Z3S2 liegt und deshalb die *Bereichsadresse* (*Bereichsbezug*) Z1S1**:** Z3S2 besitzt:
  - Eine Reihe von EXCEL-Funktionen kann auf Bereiche angewandt werden, d.h. als Argumente sind Bereichsadressen möglich. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion **SUMME** (siehe Abschn.2.7.7):
  - In Zelle Z2S3 berechnen wir mittels **SUMME** (Z1S1**:**Z3S2) die Summe der Zahlen, die sich in den zum Bereich gehörenden 6 Zellen Z1S1, Z1S2, Z2S1, Z2S2, Z3S1, Z3S2 befinden, wie im Folgenden zu sehen ist:



b) Geben wir dem Bereich aus Beisp.1.6a den Namen A:
  - Man kann für den Bereich aus Beisp.1.6a nach Markierung einen *Bereichsnamen* (z.B. A) mittels der Menüfolge **Einfügen** ⇒ **Namen** ⇒ **Definieren** im erscheinenden Dialogfeld **Namen definieren** definieren (siehe auch Abschn.2.5), wie in folgender Abbildung zu sehen ist. Hier wird bei *Bezieht sich auf* durch den Eintrag Tabelle1!Z1S1**:**Z3S2 angezeigt, dass sich der Bereich, für den der Name A definiert ist, in Tabelle 1 befindet und die Zellen mit Adresse Z1S1 bis Z3S2 umfasst.

im Blattregister aufgerufen werden, das sich am unteren Ende der Arbeitsmappe befindet.

- Des Weiteren besitzt die Arbeitsmappe eine horizontale und vertikale *Bildlaufleiste*, mit deren Hilfe man sich innerhalb einer Tabelle bewegen kann.
- Arbeitsmappen können auf die übliche Art mittels des Menüs **Datei** gespeichert und später wieder eingelesen (geöffnet) werden. Beim Speichern wählt EXCEL die Dateiendung **.**XLS.

1.2.3 Tabelle

Das *Arbeitsblatt* (engl.: Spreadsheet) als Hauptteil der Arbeitsmappe wird in Tabellenkalkulationsprogrammen wie EXCEL als *Tabelle* bezeichnet:

- In Tabellen spielt sich die Hauptarbeit beim Einsatz von EXCEL ab.
- Der Name *Tabelle* folgt aus dem Sachverhalt, dass eine zweidimensionale *Struktur* vorliegt (siehe Abb.1.1), die durch Einteilung in *Zeilen* und *Spalten* gekennzeichnet ist. Dies ist die gleiche Struktur, die Matrizen in der Mathematik besitzen, so dass man von einer *Matrizenstruktur* spricht.
- Schnittpunkte von Zeilen und Spalten einer Tabelle werden als *Zellen* (siehe Abschn. 1.2.4) bezeichnet:
  - Hier sind erforderliche Daten (Text, Zahlen oder Formeln) mittels Tastatur oder Kopieren einzugeben.
  - Den Zellen entsprechen bei Matrizen die Matrizenelemente.
- Die auf dem Bildschirm angezeigte Tabelle ist die aktive, in deren Zellen die Daten eingegeben werden können. Die Nummer der *aktiven Tabelle* wird im Blattregister unterhalb der Tabelle angezeigt. Beim Start von EXCEL ist immer *Tabelle1* aktiv.
- In der Standardeinstellung besitzt eine Arbeitsmappe 3 Tabellen. Durch Anwendung der Menüfolge

  Extras ⇒ Optionen

  kann man im erscheinenden Dialogfeld **Optionen** in der Registerkarte **Allgemein** bei *Blätter in neuer Arbeitsmappe* ihre Anzahl bis maximal 255 einstellen.

Bemerkung

Die Gestaltungsmöglichkeiten der Tabelleninhalte sind in EXCEL ähnlich umfangreich wie in Textverarbeitungsprogrammen wie WORD:

- Man kann u.a. Schriftart, -größe und -form, Höhe bzw. Breite von Zeilen und Spalten, Ausrichtung, farbige Gestaltung einstellen und Bilder und Schriftzüge einfügen.
- Die vielfältigen Gestaltungsmöglichkeiten überlassen wir dem Leser, da sich diese unter Verwendung der Hilfe von EXCEL einfach erkunden lassen.
- Wir geben nur Hinweise zur Gestaltung mathematischer Rechnungen.

♦

- Dieser in Tabelle 1 definierte Bereichsname A gilt für alle Tabellen der geöffneten Arbeitsmappe, so dass er hier in allen Rechnungen und Funktionen verwendet werden kann.
- Im folgenden Tabellenausschnitt wird die gleiche Aufgabe wie im Beisp.1.6a gelöst, indem die EXCEL-Funktion **SUMME** in Zelle Z2S3 auf den Bereich mit definiertem Namen A angewandt ist, wobei jetzt als Argument statt der Bereichsadresse der Bereichsname A erscheint:

Z2S3 | =SUMME(A)

	1	2	3	4
1	1	2		
2	3	4	21	
3	5	6		

c) Wenden wir die EXCEL-Funktion **SUMME** aus Beisp.1.6a und b auf *Verknüpfung* (*Vereinigung*) und *Durchschnitt* von Bereichen an (siehe Abschn.1.2.5):

- Im folgenden Tabellenausschnitt addieren wir mittels **SUMME** in Zelle Z2S4 die Zahlen der Bereiche Z1S1**:**Z2S2 und Z4S1**:**Z4S2 unter Anwendung des *Verknüpfungsoperators* **;** :

Z2S4 | =SUMME(Z1S1:Z2S2;Z4S1:Z4S2)

	1	2	3	4	5
1	1	2			
2	3	4		31	
3					
4	10	11			

1.2.4 Zelle

Die *Zellen* als Grundelemente einer Tabelle ergeben sich als Schnittpunkte aus Zeilen und Spalten der Tabelle:

- Eine Tabelle kann in EXCEL aus 65536 Zeilen und 256 Spalten bestehen, so dass sie insgesamt 16 777 216 Zellen enthält.
- Zellen sind durch Zeilen- und Spaltenangabe gekennzeichnet. Diese Kennzeichnung nennt man *Zelladresse* oder *Zellbezug* (kurz: *Adresse* bzw. *Bezug*). Hierfür kennt EXCEL zwei *Bezugsarten* (Bezugssysteme) A1 bzw. Z1S1, die im Folgenden erläutert sind (siehe auch Beisp.1.1):
  - In der *Standardeinstellung* von EXCEL werden Spalten durch Buchstaben A, B, C, ... , Z , AA, AB, ... , IV und Zeilen durch Ziffern 1, 2, 3, ... , 65536 bezeichnet, d.h. die erste Zelle mit Zelladresse A1 und die letzte Zelle mit Zelladresse IV65536. Diese Adressierungsart heißt *A1-Bezugsart*. So bezeichnet z.B. die Adresse B3 die Zelle in Spalte B und Zeile 3.
  - EXCEL kennt zusätzlich die *Z1S1-Bezugsart*, in der neben Zeilen auch Spalten durch Ziffern bezeichnet sind:
    - ∗ Diese Bezugsart kann man mittels der Menüfolge **Extras ⇒ Optionen** im erscheinenden Dialogfeld **Optionen** in der Registerkarte **Allgemein** bei *Einstellungen* durch Anklicken des Kontrollkästchens *Z1S1-Bezugsart* aktivieren (siehe Abbildung in Beisp.1.5).
    - ∗ In der Z1S1-Bezugsart wird die erste Zelle mit Z1S1 und die letzte Zelle mit Z65536S256 bezeichnet, wobei Z für Zeile und S für Spalte steht und die anschließende Zahl die Zeilennummer bzw. Spaltennummer darstellt. So bezeichnet z.B. die Adresse Z3S2 die Zelle in Spalte 2 und Zeile 3.
    - ∗ Im Buch verwenden wir die Z1S1-Bezugsart, da sie der Darstellung von Matrizen mit Zeilen- und Spaltennummer entspricht und somit zur Lösung mathematischer Aufgaben mittels EXCEL besser geeignet ist.
- Diejenige Zelle, die zur Dateneingabe zur Verfügung steht, wird als *aktive Zelle* bezeichnet:
  - Ihre Adresse (Zeile und Spalte) steht im Namenfeld der Bearbeitungsleiste.
  - Die ihr entsprechende Zeilen- und Spaltenangabe wird in der Tabelle farbig dargestellt.
  - Sie ist durch den *Zellzeiger*

    gekennzeichnet, der die Zelle umrahmt:

- Im folgenden Tabellenausschnitt addieren wir in Zelle Z6S1 mittels der EXCEL-Funktion **SUMME** die Zahlen aus dem Durchschnitt Z2S2**:**Z4S2 der Bereiche Z1S1**:**Z4S2 und Z2S2**:**Z4S4 unter Verwendung des *Schnittoperators* Leerzeichen:

Z6S1 | =SUMME(Z1S1:Z4S2 Z2S2:Z4S4)

	1	2	3	4	5	6
1	1	2				
2	3	4	5	6		
3	0	7	8	9		
4	2	5	7	1		
5						
6	16					

Beispiel 1.7:

EXCEL kann *Dateien* von einem Datenträger *lesen*, die im ASCII-Format vorliegen und z.B. aus *Zahlen* bestehen, die durch Trennzeichen (Kommas, Leerzeichen oder Zeilenumbrüche) voneinander getrennt sind:

- Das Einlesen geschieht in folgenden Etappen:

  I. Durch Aktivierung der Menüfolge **Datei** ⇒ **Öffnen** erscheint das Dialogfeld **Öffnen**, in der entsprechendes Laufwerk, Dateiname (z.B. DATEN**.**TXT) und Dateityp (Alle Dateien) der einzulesenden Datei auszuwählen sind. Danach ist die Schaltfläche

  Öffnen

  anzuklicken.

  II. Im erscheinenden Dialogfeld **Textkonvertierungs-Assistent** werden im
  - *Schritt 1* von 3 das Optionsfeld *Getrennt* angeklickt, im Dateiursprung *Windows* eingestellt und die Zeile der Tabelle festgelegt, in der die eingelesene Datei beginnen soll.
  - *Schritt 2* von 3 die zwischen den Zahlen verwendeten *Trennzeichen* (Tabulator, Semikolon, Leerzeichen oder Komma) in entsprechenden Kontrollfeldern angeklickt.
  - *Schritt 3* von 3 als Datenformat der Spalten das Optionsfeld *Standard* und danach die Schaltfläche

    Fertig stellen

    angeklickt.

  III. Abschließend erscheint in der aktuellen Tabelle die von EXCEL eingelesene Datei in den Zellen einer Zeile (bei *unstrukturierten Dateien*) bzw. in zusammenhängenden Zellen (in Matrizenform – bei *strukturierten Dateien*).

- Illustrieren wir das Lesen einer Datei an einer konkreten Aufgabe:
  - Wir schreiben mit einem Editor folgende ASCII-Zahlendatei, deren Zahlen durch Leerzeichen und Zeilen durch Eingabetaste ↵ getrennt sind:

  * Der Zellzeiger besitzt in der rechten unteren Ecke ein *Ausfüllkästchen* (*Füllkästchen*), das wir häufiger benötigen, da man mit seiner Hilfe den Inhalt einer Zelle auf weitere Zellen übertragen kann. Hierzu findet man eine Illustration im Beisp. 7.6 und 7.7 bei der grafischen Darstellung von Funktionen.
  * Beim Aufruf einer Tabelle steht der Zellzeiger immer auf der ersten Zelle. Man kann ihn mittels Mauszeiger oder Cursortasten (Pfeiltasten) auf eine gewünschte Zelle stellen, um Daten einzugeben bzw. zu ändern.

- Eine Zelle kann Daten wahlweise in Gestalt von Text, Zahlen oder Formeln aufnehmen, wie im Abschn.1.3 erläutert ist.
- Zusammenhängende (d.h. neben- und untereinander liegende) Zellen bilden einen *Bereich* (*Zellbereich*), der mit gedrückter Maustaste markiert werden kann (siehe Abschn. 1.2.5, 2.4 und 2.5). In der Mathematik benötigen wir Bereiche u.a. in der Matrizenrechnung (siehe Kap.5).
- Wenn man in einer Arbeitsmappe mit mehreren Tabellen arbeitet, muss vor die Zelladresse durch Ausrufezeichen getrennt noch TABELLE mit der entsprechenden Tabellennummer geschrieben werden. So bezeichnet z.B. die Zelladresse TABELLE2!Z10S1 die Zelle Z10S1 (in Zeile 10 und Spalte 1) in Tabelle 2 der aktuellen Arbeitsmappe (siehe auch Beisp.1.6b).

1.2.5 Bereich

In EXCEL versteht man unter einem *Bereich* einen zusammenhängenden Teil der Tabelle, der aus neben- und/oder untereinanderliegenden Zellen besteht:

- Im Unterschied zu einer Zelle spricht man erst von einem Bereich, wenn mindestens zwei Zellen dazugehören.
- Bereiche sind durch ihre *Bereichsadresse* (Bereichsbezug) charakterisiert:
  - Bereichsadressen werden mittels des *Bereichsoperators* gebildet, der durch einen Doppelpunkt **:** dargestellt wird.
  - Ein *Bereich* wird mit Hilfe des Bereichsoperators wie folgt *festgelegt:*
    * Man verknüpft zwei Zelladressen miteinander durch Doppelpunkt **:** , die in dieser Form die *Bereichsadresse* (Bereichsbezug) bilden.
    * Ein so gebildeter Bereich besteht aus allen Zellen, deren Adressen zwischen den beiden durch Doppelpunkt verbundenen Zelladressen liegen (siehe Beisp.1.6a).
  - Bereichsadressen können als Argumente in EXCEL-Funktionen auftreten (siehe Beisp.1.6a).
- Im Zusammenhang mit Bereichen kennt EXCEL neben dem Bereichsoperator weitere *Operatoren*:

```
DATEN - Editor
Datei  Bearbeiten  Format  Ansicht  ?
1 2 3
4 5 6
7 8 9
0 1 2
```

- Diese Datei speichern wir unter dem Namen DATEN.TXT auf einem Datenträger.
- Danach lesen wir die Datei DATEN.TXT vom Datenträger mittels der angegebenen Schritte des Textkonvertierungs-Assistenten ein, wobei wir im *Schritt 1* Zeile 1 festlegen und im *Schritt 2* als Trennzeichen *Leerzeichen* angeben. Das Ergebnis des Einlesens ist im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen:

	1	2	3	4
1	1	2	3	
2	4	5	6	
3	7	8	9	
4	0	1	2	
5				

Beispiel 1.8:

Illustrieren wir die Vorgehensweise, um in einer EXCEL-Tabelle Text bzw. Zahlen darzustellen:

a) *Eingabe von Text:*

- Bei der Eingabe von längerem Text in eine Zelle bildet die Zellbreite keine Barriere, falls die Nachbarzellen frei sind.
  Im folgenden Tabellenausschnitt ist eine Illustration dieser Eigenschaft zu sehen, indem der längere Text *Lösen wir das lineare Gleichungssystem* in Zelle Z1S1 eingegeben ist:

Z1S1 ▾ *fx* Lösen wir das lineare Gleichungssystem

	1	2	3	4	5	
1	**Lösen wir das lineare Gleichungssystem**					
2						

- Längerer Text kann *mehrzeilig* durch Drücken der
  Tastenkombination [Alt][↵]
  in eine Zelle eingegeben werden, wie im folgenden Tabellenausschnitt für den Text in Zelle Z1S1 zu sehen ist:

- *Verknüpfungsoperator* (für Bereiche), dargestellt durch Semikolon:
  * Mittels seiner Hilfe können nicht nebeneinander liegende Zellen und verschiedene Bereiche miteinander verknüpft (vereinigt) werden (siehe Beisp.1.6c), so dass man von *Verknüpfung* (*Vereinigung*) von Bereichen spricht.
  * Er ist nicht mit dem Verknüpfungsoperator (für Text) **&** zu verwechseln, der im Abschn.1.3.3 vorgestellt wird.
- *Schnittoperator*, dargestellt durch Leerzeichen:
  Mit seiner Hilfe kann der *Durchschnitt* von Bereichen gebildet werden (siehe Beisp. 1.6c).

- Es gibt eine Reihe von EXCEL-Funktionen, die auf Bereiche und mittels Verknüpfungs- oder Schnittoperator gebildete Gebiete einer Tabelle angewandt werden können, wofür im Beisp.1.6 eine Illustration zu sehen ist.
- *Bereiche* benötigt man für die Mathematik u.a. zur Matrizenrechnung und zur grafischen Darstellung von Funktionen, wie im Kap.5 und Abschn.7.4 besprochen wird.

1.2.6 Hilfefunktionen

Wie die meisten WINDOWS-Programme besitzt EXCEL umfangreiche *Hilfefunktionen*:

- Man erreicht die Hilfe von EXCEL durch Mausklick auf das Fragezeichen sowohl in der Menüleiste als auch in der Standardsymbolleiste.
- Auf Wunsch kann man zusätzlich einen *Hilfe-Assistenten* mittels der Taste F1 oder der Menüfolge **? ⇒ Office-Assistenten anzeigen** in die Benutzeroberfläche einblenden.
- Wenn Unklarheiten bei der Anwendung von EXCEL auftreten, empfehlen wir,
  - Antworten mit den Hilfefunktionen von EXCEL zu suchen.
  - zu MICROSOFT OFFICE ONLINE Verbindung aufzunehmen, das man bei einem Internetanschluss aus EXCEL heraus über
    * eine der Menüfolgen
      ? ⇒ Kunden-Feedbackoptionen oder **? ⇒ Microsoft Office Online**
    * oder die Symbolleiste *Startaufgabenbereich* (siehe Beisp.1.2)

    erreicht. Hier werden von MICROSOFT eine Vielzahl von Vorlagen und Hilfethemen angeboten.

1.3 Daten in EXCEL

EXCEL kann verschiedene *Datentypen* verarbeiten:

- Die wesentlichen Datentypen *Text*, *Zahlen* und *Formeln* von EXCEL stellen wir im Abschn.1.3.3-1.3.5 vor.
- Des Weiteren gestattet EXCEL die Ein- und Ausgabe von Daten und ihre Formatierung, die im Abschn.1.3.1 und 1.3.2 erklärt sind.

Z1S1 | *fx* Lösen wir das lineare Gleichungssystem

	1	2	3
1	**Lösen wir das lineare Gleichungs-system**		
2			

- Im Folgenden illustrieren wir die Anwendung des *Textoperators* **&**, mit dessen Hilfe man die Inhalte (Zahlen oder Texte) mehrerer Zellen miteinander verknüpfen kann:
  - Im abgebildeten Tabellenausschnitt werden in Zelle Z1S3 die Texte aus den Zellen Z1S1 und Z1S2 miteinander verknüpft, wie aus der in Zelle Z1S3 stehenden Formel ersichtlich ist. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Verknüpfung von Texten mittels **&** immer im Rahmen einer Formel geschehen muss, deren Anfang durch ein Gleichheitszeichen gekennzeichnet ist:

Z1S3 | *fx* =Z1S1&Z1S2

	1	2	3	4
1	Schul	freund	Schulfreund	
2				

  - Man kann mit **&** auch Text und Zahlen miteinander verknüpfen:
    * Es ist zu beachten, dass als Ergebnis immer der Datentyp *Text* entsteht.
    * Im folgenden Tabellenausschnitt werden in Zelle Z3S1 mittels **&** der Text aus Zelle Z1S1 und die Zahl aus Zelle Z1S2 miteinander verknüpft:

Z3S1 | *fx* =Z1S1&Z1S2

	1	2	3
1	Die Zahl e hat den Näherungswert	2,718281828	
2			
3	Die Zahl e hat den Näherungswert 2,718281828		

b) *Zahlendarstellungen* (Zahlenformate):

EXCEL kennt verschiedene Formate (Zahlenformate) für Ein- und Ausgabe von *Zahlen*, die nach Aktivierung der Menüfolge

Format ⇒ Zellen

im erscheinenden *Dialogfeld* **Zellen formatieren** in der *Registerkarte* **Zahlen** bei *Kategorie* einzustellen sind, wie im Folgenden zu sehen ist:

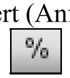
1.3.1 Ein- und Ausgabe

EXCEL erlaubt die Ein- und Ausgabe von Daten, die folgendermaßen geschieht:

- Die *Eingabe* von Daten in Zellen einer aktiven Tabelle kann auf drei verschiedene Arten geschehen:
  - Mittels Tastatur,
  - durch Kopieren von Bereichen in der für WINDOWS-Programme üblichen Art,
  - durch Einlesen von einem Datenträger, wie im Beisp.1.7 illustriert ist.
- Die *Ausgabe* von berechneten Daten kann durch Speicherung der betreffenden EXCEL-Tabelle mittels der bekannten Menüfolge **Datei ⇒ Speichern unter** geschehen.

1.3.2 Formatierung

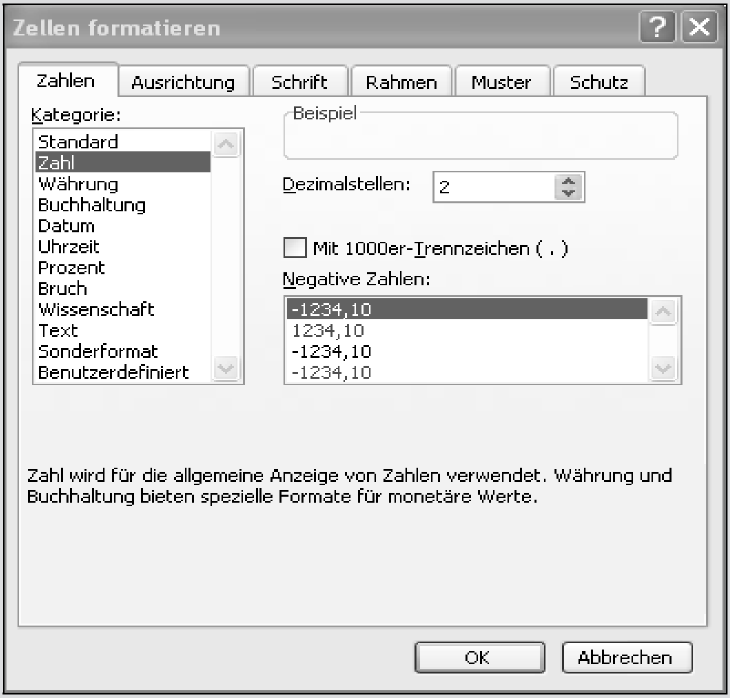
Eingegebene oder berechnete Daten (Text und Zahlen) lassen sich mit der *Formatsymbolleiste* bzw. des Menüs **Format** in die gewünschte Form bringen:

- Man kann einzelne Zellen, Spalten, Zeilen bzw. die gesamte Tabelle formatieren und Formatvorlagen erstellen, so u.a.:
  - Festlegungen über Schriftart, Schriftgröße, Schriftstil (wie in der Textverarbeitung).
  - Formatierung von Zahlen:
    - ∗ Dezimalstellen können z.B. mittels der Schaltflächen  verringert (ohne Rundung) bzw. vergrößert (Anfügung von Nullen) werden.
    - ∗ Mittels der Schaltfläche  können Zahlenwerte als Prozentwerte formatiert werden.
- Wir empfehlen, mögliche Formatierungen für Text und Zahlen auszuprobieren. Formatierungsmöglichkeiten für Zahlen stellen wir im Beisp.1.8b vor.

1.3.3 Datentyp Text

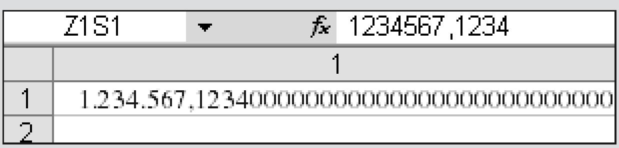
Text spielt als Datentyp eine wichtige Rolle bei der Arbeit mit EXCEL, da er zur Erklärung und Veranschaulichung durchgeführter Rechnungen benötigt wird:

- EXCEL unterscheidet bei der Eingabe zwischen den Datentypen *Text* und *Zahlen:*
  - Wenn man in eine aktive Zelle einer Tabelle Buchstaben und/oder Zahlen mittels Tastatur oder Kopieren eingibt, so interpretiert EXCEL diese Eingabe als *Text*, wenn außer Zahlen mindestens ein Buchstabe oder Zeichen vorkommt. In diesem Fall bleibt die Zelle im Standardformat, d.h. EXCEL weist kein Zahlenformat zu.
  - Zusätzlich kann man mittels der Menüfolge **Format ⇒ Zellen** im Dialogfeld **Zellen formatieren** mit der Registerkarte **Zahlen** den Datentyp *Text* zuweisen. In diesem Fall werden Zahlen ebenfalls als Text interpretiert.



Zu *Zahlendarstellungen* (Zahlenformate) ist Folgendes zu bemerken:

- Für mathematische Aufgaben empfehlen sich die Kategorien (Zahlenformate) *Zahl* und *Wissenschaft*. Weiterhin lassen sich hierfür die Kategorien *Standard* und *Benutzerdefiniert* einsetzen:
  - *Zahl*
    Hier werden *Dezimalzahlen* mit Dezimalkomma und auf Wunsch Tausenderpunkt dargestellt. Die Anzahl der Stellen lassen sich in der Registerkarte **Zahlen** bei *Dezimalstellen* auf maximal 30 einstellen, wie im folgenden Tabellenausschnitt illustriert ist:



  - *Wissenschaft*
    Diese Darstellung eignet sich besonders für große Zahlen, da hier Dezimalzahlen in *Exponentialdarstellung* .... , ...E+n
    verwendet werden:
    * Die Anzahl der Stellen lassen sich in der Registerkarte **Zahlen** bei *Dezimalstellen* auf maximal 30 einstellen.

- Betrachten wir wichtige charakteristische *Merkmale* und *Eigenschaften* von Text im Rahmen von EXCEL:
  - Eine Hauptaufgabe von Text besteht in der Beschriftung von Zeilen und Spalten von Tabellen und der Angabe von Informationen bei Durchführung von Rechnungen.
  - Text muss sich nicht an der Spaltenbreite (Zellenbreite) orientieren. Wenn die Nachbarzelle frei ist, wird er hier fortgesetzt.
  - Text kann mehrzeilig in eine Zelle eingegeben werden, obwohl die Bearbeitungsleiste nur eine Zeile (Eingabezeile) hierfür anbietet. Man erreicht dies durch Drükken der Tastenkombination Alt ↵ nach jeder Zeile, wie im Beisp.1.8a illustriert ist.
  - Für Text existiert ein *Verknüpfungsoperator* **&** , mit dessen Hilfe die Inhalte mehrerer Zellen (Zahlen oder Texte) miteinander verbunden (verknüpft, verkettet) werden können, wobei als Ergebnis immer der Datentyp *Text* (d.h. eine Zeichenfolge) entsteht:
    - ∗ In EXCEL wird der Operator **&** als *Textoperator* bezeichnet.
    - ∗ Es ist zu beachten, dass **&** in einer Formel stehen muss, deren Anfang durch das Gleichheitszeichen gekennzeichnet ist (siehe Beisp.1.8a).
    - ∗ Anstatt des Textoperators lässt sich die EXCEL-Funktion **VERKETTEN** heranziehen, die ebenfalls verschiedene Textelemente zu einer Zeichenfolge verknüpft.
  - EXCEL besitzt für Texteingaben folgende nützliche *Eigenschaften,* die bei mathematischen Rechnungen von Vorteil sind:
    - ∗ Außer Text gestattet EXCEL die Eingabe *mathematischer Symbole* mit Hilfe des *Formeleditors*. Dazu ist die Menüfolge **Einfügen ⇒ Objekt** anzuwenden und im erscheinenden Dialogfeld **Objekt** in der Registerkarte **Neu erstellen** der Objekttyp MICROSOFT FORMEL-EDITOR 3.0 auszuwählen (siehe Beisp.1.9).
    - ∗ Benötigt man *griechische Buchstaben*, so lassen sich diese mit der Schriftart *Symbol* erzeugen, die man in der Formatsymbolleiste oder mittels der Menüfolge **Format ⇒ Zellen** im erscheinenden Dialogfeld in der Registerkarte **Schrift** einstellen kann.

1.3.4 Datentyp Zahlen

Zahlen bilden neben Text und Formeln (siehe Abschn.1.3.3 und 1.3.5) einen wichtigen Datentyp für mathematische Rechnungen:

- EXCEL erkennt die Eingabe in eine Zelle einer Tabelle automatisch als Zahl, wenn nur Ziffern, eventuell ein *Plus-* oder *Minuszeichen*, *Dezimalkomma* oder *Tausenderpunkt* bzw. ein *Exponent* in der Form E+n vorhanden sind.
- EXCEL kann mit positiven und negativen ganzen Zahlen und endlichen Dezimalzahlen (Dezimalbrüchen) rechnen.

* Bei diesem Zahlenformat wird z.B. die in Zelle Z1S1 eingegebene Dezimalzahl 1234567**,**1234 bei eingestellten 30 Dezimalstellen in folgende Exponentialdarstellung überführt:

Z1S1	fx 1234567,1234
	1
1	1,234567123400000000000000000000E+06
2	

- *Standard*
  Hier ist kein bestimmtes Zahlenformat gefordert:
  Standard ist für mathematische Rechnungen weniger zu empfehlen, da Zahlen nicht immer exakt sondern gerundet dargestellt werden, wie die Eingabe der Zahlen 1234567**,**1234 und 1234567891234**,**1234 in die Zellen Z1S1 bzw. Z1S2 im folgenden Tabellenausschnitt zeigt:

	1	2
1	1234567,123	1,23457E+12
2		

- *Benutzerdefiniert*
  Hier kann man bei Typ aus einer Reihe von Formaten auswählen.

c) Illustrieren wir die Anwendung der EXCEL-Funktion **LÄNGE**:

- Neben der Länge eines Textes kann man mit der EXCEL-Funktion **LÄNGE** die Anzahl der Ziffern einer Dezimalzahl bestimmen, wie im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen ist.
- Bei den in den Zellen Z2S1 und Z2S2 angezeigten Ergebnissen für die Zahlen aus Zelle Z1S1 bzw. Z1S2 muss man beachten, dass das Dezimalkomma ebenfalls mit gezählt wird, so dass man jeweils 1 abziehen muss, um die Anzahl der Ziffern zu erhalten.

Z2S2	fx =LÄNGE(Z1S2)			
	1	2	3	4
1	0,1234567	123,456789		
2	9	10		
3				

Beispiel 1.9:

Illustrieren wir die Anwendung von *Formeln*, die für mathematische Rechnungen den wichtigsten Datentyp bilden:

- Formeln müssen mit einem Gleichheitszeichen beginnen, um von EXCEL erkannt zu werden.

- EXCEL kann irrationale Zahlen (wie z.B. e und π) nur näherungsweise durch endliche Dezimalzahlen darstellen.
- Zur Bestimmung der Anzahl von Ziffern einer Dezimalzahl gibt es die EXCEL-Funktion **LÄNGE**, die im Beisp.1.8c vorgestellt wird.

Bemerkung

EXCEL bezeichnet Dezimalzahlen als *Gleitkommazahlen*, für die das Komma (Dezimalkomma) für Dezimalstellen (Nachkommastellen) und der Punkt für Tausenderstellen (Tausenderpunkt) verwendet werden und gestattet verschiedene Formate für Zahlen (*Zahlenformate*), die im Beisp.1.8b vorgestellt werden.

♦

1.3.5 Datentyp Formeln

Formeln bilden neben Text und Zahlen einen weiteren Datentyp in EXCEL. Da sie für mathematische Rechnungen eine wesentliche Rolle spielen, besprechen wir sie ausführlicher im Abschn.2.3.

Illustrationen zur Eingabe und Anwendung von Formeln findet man im Beisp.1.9 und 2.3.

- Formeln sind nicht in üblicher mathematischer Schreibweise sondern in der aus Programmiersprachen bekannten linearen Schreibweise einzugeben.
- Wir illustrieren die Anwendung von Formeln im folgenden Tabellenausschnitt:

Z7S2 | fx | =K0*(1+p/100)^N

	1	2	3	4	5
1	K0	N	p		
2	1000	5	3		
3					
4	Anwendung der Zinseszinsformel			$K_N = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^N$	
5					
6					
7	liefert	1159,27			
8					

- Man sieht im obigen Tabellenausschnitt anhand der Zinseszinsformel, wie man Formeln bei mathematischen Rechnungen übersichtlich gestalten kann:
  - Die *Zinseszinsformel* (siehe Abschn.13.2.2) befindet sich in Zelle Z7S2 in der für EXCEL erforderlichen Schreibweise.
  - Zum besseren Verständnis ist in darüberliegenden Zellen erläuternder Text und mittels des Formeleditors die Zinseszinsformel in mathematischer Schreibweise eingegeben, wie im Abschn.1.3.3 beschrieben ist.
  - Das Ergebnis der mit der Zinseszinsformel durchgeführten Rechnung für die Werte (in den Zellen Z2S1 bis Z2S3) der erstellten Größen K0 (Anfangskapital), N (Laufzeit in Jahren) und p (Zinsfuß in Prozent) steht in Zelle Z7S2.

Beispiele

2 EXCEL: Rechnen

2.1 Einführung

Rechnen zählt zu den Stärken von EXCEL:

- Im Unterschied zu bekannten Computeralgebrasystemen wie MATHEMATICA und MAPLE kann EXCEL nicht exakt (symbolisch), sondern nur *numerisch* (näherungsweise) *rechnen,* wobei alle Rechnungen mit endlichen (gerundeten) Dezimalzahlen durchgeführt werden (siehe Beisp.2.1).
- EXCEL kann mit Zellen (genauer Zellinhalten) einer Tabelle rechnen, d.h. es werden sogenannte *Bezüge* zu Zellen hergestellt bzw. ihnen *Namen* zugewiesen. Diese Bezüge bleiben bestehen, während Zahlen und Funktionen in den entsprechenden Zellen geändert werden können und EXCEL automatisch die neuen Ergebnisse berechnet.
- In EXCEL integrierte (vordefinierte) Funktionen spielen beim Rechnen eine wichtige Rolle, wie im Weiteren zu sehen ist (siehe auch Abschn.2.2).
- Im Folgenden geben wir einen Einblick in Vorgehensweisen beim Rechnen mit EXCEL, indem wir folgende Problematik behandeln:
  - Grundlagen (Abschn.2.2-2.5)
  - Verwendung als Taschenrechner (Abschn.2.6)
  - Wichtige Gebiete des kaufmännischen Rechnens (Abschn.2.7)
  - Häufig begangene Rechenfehler (Abschn.2.8)

2.2 Funktionen und Funktions-Assistent

In EXCEL sind über 300 *Funktionen* integriert (vordefiniert):

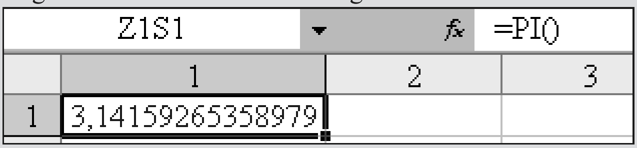
- Wir bezeichnen diese Funktionen als *EXCEL-Funktionen*.
- Sie erledigen einen großen Teil der Arbeit mit EXCEL (siehe Abschn.7.3). Im Rahmen des Buches werden wir eine Reihe dieser Funktionen kennenlernen, wobei mathematische Funktionen überwiegen.
- Die *Schreibweise* von EXCEL-Funktionen hat die Form **Name_der_Funktion(.....)**, wobei erforderliche Argumente (Parameter) in die Klammern einzutragen und durch Semikolon zu trennen sind.
- Eine wichtige Hilfe bietet der *Funktions-Assistent:*
  - Dieser wird durch Anklicken des Symbols

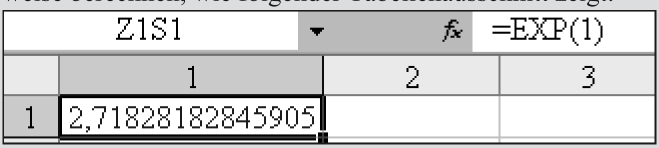
    in der Bearbeitungsleiste oder Aktivierung der Menüfolge **Einfügen ⇒ Funktion** aufgerufen.
  - Danach erscheint das *Dialogfeld* **Funktion einfügen** (siehe Beisp.2.2):
    * Hier lassen sich alle EXCEL-Funktionen in gewissen Gruppen/Kategorien anzeigen (siehe Abschn.3.3):
      – Wenn man *Alle* bei *Kategorie auswählen* eingibt, werden sämtliche EXCEL-Funktionen in alphabetischer Reihenfolge angezeigt.

Beispiel 2.1:
Im Folgenden ist an zwei typischen Beispielen zu sehen, dass EXCEL reelle (irrationale) Zahlen in Rechnungen nicht exakt, sondern nur näherungsweise als endliche Dezimalzahlen darstellen und weiterverwenden kann.

a) Die Zahl π kennt EXCEL in der Darstellung **PI** ( ), wie aus dem Funktions-Assistenten ersichtlich ist. EXCEL kann π mit maximal 15 Stellen näherungsweise berechnen, wie folgender Tabellenausschnitt zeigt:



b) Die Zahl e kennt EXCEL in der Darstellung **EXP**(1), d.h. man kann sie mittels der Exponentialfunktion **EXP** berechnen. EXCEL kann e mit maximal 15 Stellen näherungsweise berechnen, wie folgender Tabellenausschnitt zeigt:



Beispiel 2.2:
Im Folgenden ist das *Dialogfeld* **Funktion einfügen** zu sehen, das beim Aufruf des *Funktions-Assistenten* (siehe Abschn.2.2 und Beisp.3.1) erscheint:

    – Die angezeigten Funktionen haben die von EXCEL erforderliche Schreibweise und lassen sich durch Anklicken der Schaltfläche OK in eine aktive Zelle als Formel eingeben, wobei die konkreten Argumente im erscheinenden Dialogfeld **Funktionsargumente** einzutragen sind.
  * Es wird eine kurze Beschreibung für jede einzelne Funktion angezeigt, wenn man den entsprechenden Funktionsnamen markiert.
  * Ausführliche Informationen für jede Funktion erhält man durch Anklicken von <u>*Hilfe für diese Funktion*</u> .

2.3 Formeln

Formeln spielen in EXCEL beim Rechnen die dominierende Rolle und sind folgendermaßen *charakterisiert:*

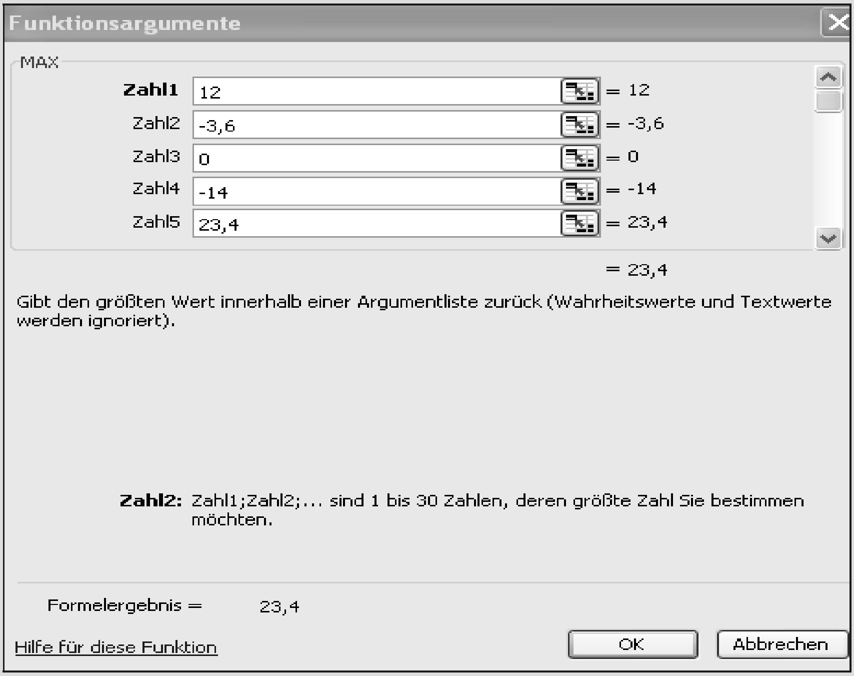
- Zur Durchführung von Rechnungen in einer aktiven Zelle der Tabelle muss eine Formel eingegeben werden.
- EXCEL kann Formeln nicht automatisch von anderen Daten unterscheiden:
  - Eine Formel muss mit einem Gleichheitszeichen = beginnen (siehe Beisp.2.3).
  - Falls eine Formel mit einem Plus- oder Minuszeichen beginnt, braucht man kein Gleichheitszeichen einzugeben. In diesem Fall wird das Gleichheitszeichen von EXCEL automatisch eingefügt.
- In Formeln können *Zahlen* und *Funktionen* auftreten, die durch arithmetische Operatoren (*Rechenoperatoren*) + (Additionsoperator), – (Subtraktionsoperator), * (Multiplikationsoperator), / (Divisionsoperator) und ^ (Potenzoperator) miteinander verbunden sind:
  - Bei der Durchführung von Rechnungen berücksichtigt EXCEL die aus der Mathematik bekannten Prioritäten für Rechenoperatoren, d.h. die Reihenfolge Klammern, Potenzierung, Multiplikation/Division, Addition/Subtraktion.
  - Als Ergebnis liefern Formeln eine *Zahl* oder einen *Wahrheitswert* (WAHR/ FALSCH).
- Ein Vorteil von EXCEL besteht darin, dass in Formeln zusätzlich *Bezüge* (für Zellen oder Bereiche) und *Namen* (von Variablen und Bereichen) auftreten können, wie im Abschn.1.2.5, 2.4 und 2.5 erläutert und im Beisp.2.4 und 2.5 illustriert ist.
- Eine Formel, die sich in einer Zelle einer Tabelle befindet, wird nur dann in der Bearbeitungsleiste angezeigt, wenn die entsprechende Zelle aktiv ist. Man kann sich alle in einer Tabelle befindlichen Formeln anzeigen lassen, indem man die Tastenkombination Strg # drückt oder nach Aktivierung der Menüfolge **Extras ⇒ Optionen** im erscheinenden Dialogfeld in der Registerkarte **Ansicht** *Formeln* anklickt.

2.4 Rechnen mit Bezügen

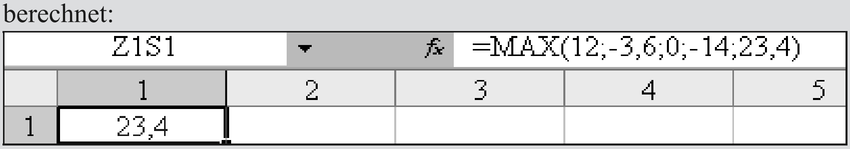
Ein Vorteil von EXCEL besteht darin, dass man in Formeln neben Zahlen zusätzlich Bezüge verwenden kann:

Mit Hilfe dieses Dialogfeldes lässt sich eine EXCEL-Funktion mit den benötigten Argumenten in eine Zelle der Tabelle mittels folgender Vorgehensweise eingeben:

- Bei *Funktion auswählen* ist die gewünschte Funktion (z.B. **MAX**) zu markieren, für die dann eine kurze Beschreibung und die erforderlichen Argumente (Parameter) angezeigt werden. Danach ist OK anzuklicken.
- Im anschließend erscheinenden Dialogfeld **Funktionsargumente** sind für die gewählte Funktion (z.B. **MAX**) die benötigten konkreten Werte für die Argumente einzugeben (z.B. die Werte: 12 **;** -3,6 **;** 0 **;** -14 **;** 23,4).



- Das abschließende Anklicken von OK liefert das von der Funktion berechnete Ergebnis in der aktiven Zelle. Bei der verwendeten Funktion **MAX** ist das der Wert 23,4 in Zelle Z1S1, da **MAX** den größten (maximalen) Wert der im Argument befindlichen Zahlen berechnet:



- Man kann EXCEL-Funktionen auch direkt ohne Funktions-Assistenten mit den erforderlichen Argumenten in eine aktive Zelle (z.B. Z1S1) als Formel eingeben, wie z.B. die Funktion **MAX** in der Form

  =**MAX** (12 **;** –3,6 **;** –14 **;** 23,4)

  wie aus obigem Tabellenausschnitt zu sehen ist.

Beispiele

- Ein *Bezug* steht für eine Zelle (Zellbezug) bzw. einen Bereich (Bereichsbezug), d.h. für eine *Zelladresse* bzw. *Bereichsadresse* der Tabelle (siehe Abschn.1.2.4 und 1.2.5). Steht ein Bezug in einer Formel, so rechnet EXCEL mit den Inhalten der durch den Bezug angesprochenen Zellen, wie im Beisp.1.6, 2.4 und 2.5 illustriert ist.
- EXCEL unterscheidet zwischen zwei Formen von Bezügen, deren Unterschiede erst beim Kopieren sichtbar werden:
  - *absoluter* (fester) *Bezug*
    Wie bereits aus der Bezeichnung ersichtlich ist, werden in Formeln feste Zell- oder Bereichsadressen verwendet, die sich durch Kopieren nicht verändern (siehe Beisp. 2.5c). Absolute Bezüge haben für beide mögliche Bezugsarten (siehe Abschn.1.2.4) folgende Form:
    * A1-Bezugsart
      Hier werden Zelladressen mit einem oder zwei Dollarzeichen geschrieben, so bedeuten z.B.:
      – A1 absoluten Bezug auf Zeile 1 und Spalte A, d.h. auf die Zelle mit Adresse A1.
      – $A1 absoluten Bezug nur auf Spalte A.
      – A$1 absoluten Bezug nur auf Zeile 1.
    * Z1S1-Bezugsart
      Hier werden Zelladressen in der Form Z1S1,....., Z65536S256 geschrieben, wie im Beisp.2.5c illustriert ist.
  - *relativer Bezug*
    Wie bereits aus der Bezeichnung ersichtlich ist, werden hier in der Formel keine festen Zell- oder Bereichsadressen verwendet, sondern Adressen relativ zur Zelladresse der Formel. Beim Kopieren der Formelzelle verändern sich diese Adressen (siehe Beisp.2.5c). Relative Bezüge haben für beide Bezugsarten folgende Form:
    * *A1-Bezugsart*
      Hier werden die Zelladressen in der Form A1,....., IV65536 ohne Dollarzeichen geschrieben.
    * *Z1S1-Bezugsart*
      Hier werden die Zelladressen in der Form Z(-m)S(-n) geschrieben, wobei m und n die Lage der Zelle zur Formelzelle beschreiben, wie im Beisp.2.5c illustriert ist.
- Zu *Bezügen* ist Folgendes zu bemerken:
  - Für einzelne mathematische Rechnungen ist es gleich, welche Bezugsart man wählt:
    * Den Unterschied zwischen beiden Bezugsarten sieht man erst beim Kopieren von Formeln.
    * Wir verwenden neben absoluten Bezügen, die in Z1S1-Bezugsart durch konkrete Zeilennummer m und Spaltennummer n charakterisiert sind (siehe Beisp.2.5c), auch *relative Bezüge*. Diese werden herangezogen, wenn Formeln für mehrere in der Tabelle befindliche Werte zu berechnen sind (siehe Beisp.11.7).

Beispiel 2.3:
Illustrieren wir die Anwendung von *Formeln,* indem wir in einer Tabelle die Formel für das Zylindervolumen und die Zinseszinsformel anwenden:

- Im folgenden Tabellenausschnitt befindet sich in Zelle Z4S1 die Formel für das *Volumen* eines *Zylinders* mit Radius r und Höhe h und in Zelle Z4S3 die *Zinseszinsformel* (siehe Beisp.1.9 und Abschn.13.2.2) für das Anfangskapital K0, die Laufzeit N (Jahre) und Zinsfuß p (%):

	1	2	3	4	5
1	r	h	K0	N	p
2	2	3	1000	5	3
3					
4	37,70		1159,27		

- Die berechneten *Ergebnisse* befinden sich in den Zellen Z4S1 und Z4S3, wobei vorher für die Zahlenwerte in Zeile 2 die darüberstehenden Namen erstellt wurden, wie im Abschn.2.5 und Beisp.2.4b beschrieben ist.
- Im folgenden Tabellenausschnitt werden durch Drücken der Tastenkombination Strg # anstelle der berechneten Ergebnisse die in den Zellen Z4S1 und Z4S3 stehenden Formeln für Zylindervolumen bzw. Zinseszins angezeigt:

	1	2	3	4	5
1	r	h	K0	N	p
2	2	3	1000	5	3
3					
4	=PI()*r^2*h		=K0*(1+p/100)^N		

Beispiel 2.4:
Führen wir Rechnungen unter Verwendung von *Bezügen* und *Namen* durch, um die Vorgehensweise beider Möglichkeiten zu illustrieren (siehe auch Beisp.1.6):

a) Im folgenden Tabellenausschnitt ist das Rechnen mit *Bezügen* zu sehen:
   - Die Formel =Z2S1+Z2S2 wird in Zelle Z2S3 eingegeben, die mit Bezügen (*Zellbezügen/Zelladressen*) zu beiden Zellen Z2S1 und Z2S2 rechnet.
   - Mittels der Formel wird der konkrete Inhalt beider Zellen Z2S1 und Z2S2 addiert.

Z2S3		fx	=Z2S1+Z2S2
	1	2	3
1	x	y	
2	1,25	2,5	3,75

b) Im Folgenden lösen wir die gleiche Aufgabe wie im Beisp.2.4a unter Verwendung von *Namen*, so dass man die Vorgehensweisen vergleichen kann:
   - Für mathematische Rechnungen sind Namen der Problematik angepasst, da sie in der Mathematik für Konstanten, Variablen, Vektoren und Matrizen verwendet werden.

- Wenn man nur in einer Tabelle mit Bezügen arbeitet, so nennt man diese *2D-Bezüge*. EXCEL kennt weiterhin sogenannte *3D-Bezüge*, die sich auf Zellen oder Bereiche in verschiedenen Tabellen beziehen. So bezeichnet z.B. TABELLE2!Z10S1 den Bezug auf Zelle Z10S1 (in Zeile 10 und Spalte 1) in Tabelle 2.

2.5 Rechnen mit Namen

Neben Bezügen kann EXCEL zusätzlich mit Namen rechnen:

- EXCEL versteht unter einem *Namen* eine Zeichenfolge, die bis zu 255 Zeichen lang sein kann und folgenden Regeln unterworfen ist:
  - Namen dürfen Buchstaben, Ziffern, Unterstriche _ , Punkte **.** , Fragezeichen **?** und umgekehrte Schrägstriche (Backslash) **** enthalten.
  - Namen müssen als erstes Zeichen einen Buchstaben , _ oder **** besitzen.
  - Namen dürfen nicht Zellbezügen wie z.B. A1 oder Z1S1 ähnlich sein.
- Einen *Namen* kann man einer aktive Zelle (*Zellname*) bzw. einem markierten Bereich (*Bereichsname*) auf folgende zwei Arten *zuweisen:*
  - Mittels der Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Definieren**
    im erscheinenden Dialogfeld **Namen definieren** bei *Namen in der Arbeitsmappe*, wie im Beisp.1.6, 2.4 und 2.5 illustriert ist. Bei dieser Zuweisungsart spricht man von *Namen definieren*.
  - Mittels der Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen**
    im erscheinenden Dialogfeld **Namen erstellen**, wie im Beisp.2.4 illustriert ist. Bei dieser Zuweisungsart spricht man von *Namen erstellen*.
- Mit zugewiesenen (d.h. definierten bzw. erstellten) Namen kann in der gesamten Arbeitsmappe von EXCEL gerechnet werden:
  - Für mathematische Rechnungen ist die Verwendung von Namen der Problematik besser angepasst als die Verwendung von Bezügen, da Konstanten, Variablen, Vektoren und Matrizen in der Mathematik durch Namen bezeichnet werden.
  - Mit Namen wird allgemein in Formeln und Ausdrücken gearbeitet, d.h. man kann diese Namen als *variable Größen* (Variablen) ansehen, für die bei Rechnungen die konkreten Größen (Zahlen bzw. Vektoren oder Matrizen) eingesetzt werden.

2.6 EXCEL als Taschenrechner

EXCEL kann alle mittels Taschenrechner möglichen Rechnungen durchführen, da Grundrechenarten, höhere Rechenarten wie Potenzieren und Radizieren und elementare und höhere mathematische Funktionen integriert sind:

- Bei der Verwendung von EXCEL als Taschenrechner ist zu beachten, dass alle Rechnungen im Rahmen von Formeln (Abschn.2.3) stattfinden müssen.
- Damit sind ebenfalls alle kaufmännischen Rechnungen mittels EXCEL durchführbar, wie im Abschn.2.7 illustriert ist.

- Aus folgendem Tabellenausschnitt ist die Rechnung mittels *Namen* zu sehen:
  - ∗ Durch Markierung der Zellen Z1S1 bis Z2S2 und anschließendem Aufruf der Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen** wird für die Zellen Z2S1 und Z2S2 der in den darüberliegenden Zellen Z1S1 und Z1S2 stehende Name x bzw. y im erscheinenden Dialogfeld **Namen erstellen** durch Anklicken von *Oberster Zeile* erstellt.
  - ∗ Danach kann mit den in den Zellen Z2S1 bzw. Z2S2 befindlichen Werten von x und y gerechnet werden, wie aus Zelle Z2S3 des folgenden Tabellenausschnitts zu sehen ist, in der sich die Formel für die Addition von x und y befindet.

Z2S3 | =x+y

	1	2	3
1	x	y	
2	1,25	2,5	3,75

- Die Zuweisung der Namen x und y kann auch geschehen, wenn man nur die Zelle Z2S1 bzw. Z2S2 markiert und über die Menüfolge
  Einfügen ⇒ Namen ⇒ Definieren
  im erscheinenden Dialogfeld **Namen definieren** durch Eintrag von x bzw. y den Namen x bzw. y definiert.

Beispiel 2.5:
Betrachten wir neben Beisp.1.6 und 2.4 weitere Beispiele für das Rechnen mit *Bereichsbezügen* (Bereichsadressen) und *Namen:*

a) Im folgenden Tabellenausschnitt wird die EXCEL-Funktion **PRODUKT** mit Bereichsadresse angewendet:

Z1S3 | =PRODUKT(Z1S1:Z3S2)

	1	2	3	4
1	1,5	2	292,5	
2	4	1,25		
3	3,25	6		

- Der zusammenhängende Bereich mit 3 Zeilen und 2 Spalten, der mit Zelle Z1S1 beginnt und mit Zelle Z3S2 endet, hat die Bereichsadresse Z1S1**:**Z3S2.
- In Zelle Z1S3 wird die EXCEL-Funktion **PRODUKT** mit dem Argument Z1S1**:**Z3S2 (Bereichsadresse) angewendet, so dass die Zahleninhalte aller Zellen dieses Bereichs multipliziert und das Ergebnis angezeigt wird.

b) Statt mit Bereichsadresse wie im Beisp.2.5a kann man auch mit *Namen* (*Bereichsnamen*) rechnen, wie aus folgendem Tabellenausschnitt zu sehen ist:

2.7 Kaufmännisches Rechnen-Wirtschaftsrechnen

Kaufmännisches Rechnen bezeichnet man auch als *Wirtschaftsrechnen:*

- Wichtige Gebiete sind
  - *Bruchrechnung*
  - *Prozentrechnung*
  - Rechnen mit *Proportionen* (*Verteilungsrechnung*)
  - *Dreisatzrechnung*
  - *Währungsrechnung*
  - Rechnen mit *Summen* (Reihen) und *Produkten*
  - *Zins*- und *Zinseszinsrechnung*

  für deren Verständnis nur Kenntnisse der Elementarmathematik erforderlich sind, wie in den Beispielen dieses Kapitels an typischen Aufgaben illustriert ist.
- Im Folgenden geben wir einen Einblick in das Rechnen mit Brüchen, Prozenten, Proportionen, Dreisatz, Währungen, Summen (Reihen) und Produkten.
  Die Zins- und Zinseszinsrechnung als weiteres wichtiges Gebiet stellen wir im Rahmen der Finanzmathematik im Kap.13 vor.

2.7.1 Bruchrechnung

EXCEL gestattet neben Rechnen mit Dezimalzahlen zusätzlich das Rechnen mit Brüchen (siehe Beisp.2.6a):

- Man erreicht dies, indem man mittels der Menüfolge **Format ⇒ Zellen** im erscheinenden Dialogfeld **Zellen formatieren** die Registerkarte **Zahlen** auswählt und hier die Kategorie *Bruch* markiert.
- Zusätzlich ist in dieser Registerkarte der *Typ* des Bruches zu markieren:
  - einstellig (für Brüche mit einer Ziffer in Zähler und Nenner, z.B. 1/4),
  - zweistellig (für Brüche mit zwei Ziffern in Zähler oder Nenner, z.B. 1/25),
  - dreistellig (für Brüche mit drei Ziffern in Zähler oder Nenner, z.B. 1/124).
- Falls man einen Bruch in eine Zelle eingibt, die nicht mit der Kategorie *Bruch* formatiert wurde, wandelt EXCEL den Bruch automatisch in eine Dezimalzahl um, die allerdings eine Näherung sein kann, da nur die eingestellte endliche Anzahl von Dezimalstellen angezeigt wird.
- Die umgekehrte Vorgehensweise, eine gegebene endliche Dezimalzahl in einen Bruch umzuwandeln, geschieht einfach durch Erweiterung mit 10^n, wobei n die Anzahl der Dezimalstellen (Nachkommastellen) bezeichnet. Wir geben hierfür im Beisp.2.6b eine Illustration.

2.7.2 Prozentrechnung

Die *Prozentrechnung* bildet eine wesentliche Säule des kaufmännischen Rechnens, da der Begriff *Prozent* (Prozentpunkt) bei vielen ökonomischen Betrachtungen und Begriffen wie z.B. bei Inflationsraten, Preisen, Rabatten, Steuern, Wachstum, Zinsen vorkommt:

Z1S3		=PRODUKT(A)		
	1	2	3	4
1	1,5	2	292,5	
2	4	1,25		
3	3,25	6		

- Nachdem der Bereich mit Adresse Z1S1**:**Z3S2 markiert ist, wird für ihn mittels der Menüfolge **Einfügen** ⇒ **Namen** ⇒ **Definieren** im erscheinenden Dialogfeld **Namen definieren** durch Eintrag von A der Name (Bereichsname) A definiert.
- Danach kann bei der Anwendung von EXCEL-Funktionen (wie **PRODUKT**) im Argument der Bereichsname A stehen, wie aus obigem Tabellenausschnitt zu sehen ist.

c) Illustrieren wir den Unterschied zwischen *absoluten* und *relativen Bezügen*, der sich beim Kopieren von Formeln zeigt:

- *Absoluter Bezug:*
  - Im folgenden Tabellenausschnitt wird in Zelle Z1S3 in der eingegebenen Formel für die Addition der beiden linken Zellinhalte der gleichen Zeile der *absolute Bezug* Z1S1 bzw. Z1S2 verwendet.
  - Danach wird der Zellinhalt Z1S3 mittels des Ausfüllkästchen in die Zellen Z2S3 und Z3S3 kopiert.
  - Aufgrund des absoluten Zellbezugs werden in den Zellen Z2S3 und Z3S3 ebenfalls die Zellinhalte Z1S1 und Z1S2 addiert, wie aus den berechneten Zahlenwerten 3 zu sehen ist:

Z1S3		=Z1S1+Z1S2		
	1	2	3	
1	1	2	3	
2	3	4	3	
3	5	6	3	

- *Relativer Bezug:*
  - Im folgenden Tabellenausschnitt wird in der Zelle Z1S3 in der eingegebenen Formel für die Addition der beiden linken Zellinhalte der gleichen Zeile der *relative Bezug* ZS(-2) bzw. ZS(-1) verwendet:

Z1S3		=ZS(-2)+ZS(-1)		
	1	2	3	4
1	1	2	3	
2	3	4	7	
3	5	6	11	

- Bei der Prozentrechnung findet ein Vergleich im Verhältnis zur Zahl 100 statt. Die Regeln der Prozentrechnung gelten auch bei der *Promillerechnung*, bei der die Vergleichsbasis 1000 statt 100 beträgt.
- Alle Aufgaben der Prozentrechnung lassen sich mittels *Dreisatz* (siehe Abschn.2.7.4) lösen. Er liefert
  - die grundlegende Formel (*Prozentformel*)
    Prozentwert = Prozentsatz · Grundwert / 100 , d.h. PW = PS · GW / 100
  - die Proportion (Verhältnisgleichung - siehe Abschn.2.7.3) PW / PS = GW / 100

  in denen die enthaltenen Größen Folgendes bedeuten (siehe auch Beisp.2.7.6):
  - *Grundwert* GW
    Dies ist die Bezugszahl.
  - *Prozentsatz* PS (= p)
    Man teilt den Grundwert GW in hundert gleiche Teile auf:
    * Ein Hundertstel von GW (d.h. GW / 100) heißt 1 Prozent und man schreibt 1%.
    * Offensichtlich ergibt sich dann für p Hundertstel von GW, d.h. für p% : p* GW / 100 , wobei p den Prozentsatz bezeichnet.
  - *Prozentwert* PW
    Hiermit werden Vielfache von GW/100 bezeichnet, die sich durch Multiplikation mit dem Prozentsatz p ergeben, d.h. PW = p · GW/100.
- EXCEL kennt das Zahlenformat *Prozent:*
  - Dieses in EXCEL als *Prozentformat* bezeichnete Zahlenformat kann man für eine Zelle mittels des Symbols

    aus der Formatsymbolleiste vor Eingabe von Zahlenwerten festlegen.
  - Die gleiche Formatierung einer Zelle gelingt mittels der Menüfolge
    Format ⇒ Zellen
    im erscheinenden Dialogfeld **Zellen formatieren**, indem man hier in der Registerkarte **Zahlen** die Kategorie *Prozent* einstellt.
  - Nach Formatierung als Prozentformat erscheint ein eingegebener Zahlenwert mit dem Prozentzeichen **%**, wie im Beisp.2.7a illustriert ist.

2.7.3 Proportionen und Verteilungsrechnung

Proportionen sind folgendermaßen *charakterisiert:*

- Sind zwei Zahlen a und b ungleich Null, so heißt der Quotient a / b das *Verhältnis* von a zu b, wobei a und b als *Glieder* bezeichnet werden. Man stellt in Verhältnissen den Bruchstrich / auch mittels Doppelpunkt dar, d.h. a **:** b.
- Gilt a / b = k bzw. a · b = k (k = konstant), so heißt k *Proportionalitätsfaktor* und man sagt, dass a zu b *direkt* bzw. *indirekt proportional* ist.

- Danach wird der Zellinhalt Z1S3 mittels des Ausfüllkästchens in die Zellen Z2S3 und Z3S3 kopiert.
- Aufgrund des relativen Zellbezugs werden in den Zellen Z2S3 und Z3S3 die beiden linken Zellinhalte der entsprechenden Zeile addiert, wie aus den berechneten Zahlenwerten 7 bzw. 11 zu sehen ist.

Beispiel 2.6:

Illustrieren wir das Rechnen mit *Brüchen* im Rahmen von EXCEL:

a) Bevor man mit *Bruchrechnung* beginnen kann, muss man zuerst die verwendeten Zellen der Tabelle für Brüche formatieren:

- Man erreicht dies, indem man mittels der Menüfolge **Format ⇒ Zellen** im erscheinenden Dialogfeld **Zellen formatieren** die Registerkarte **Zahlen** auswählt und hier die Kategorie (Zahlenformat) *Bruch* markiert. Zusätzlich muss man in dieser Registerkarte den *Typ* des Bruches markieren.
- Im folgenden Tabellenausschnitt werden alle verwendeten Zellen als Kategorie *Bruch* und bis auf Zelle Z3S3 (*zweistellig*) als Typ *einstellig* eingestellt, da nur Zelle Z3S3 einen zweistelligen Bruch enthält:
  - Zelle Z1S3 enthält das Ergebnis 4 1/4 für die Addition der beiden Brüche aus Zelle Z1S1 und Z1S2.
  - Zelle Z3S3 enthält das Ergebnis –1/12 für die Subtraktion der beiden Brüche aus Zelle Z3S1 und Z3S2.

Z1S3 ▾ fx =Z1S1+Z1S2

	1	2	3
1	1 3/4	2 1/2	4 1/4
2			
3	2/3	3/4	- 1/12

b) Geben wir ein Beispiel für die *Umwandlung* einer endlichen *Dezimalzahl* in einen *Bruch:*

12,345 wird durch Erweiterung mit $10^3 = 1000$ (da 3 Dezimalstellen vorliegen) in den Bruch $\frac{12345}{1000}$ umgewandelt, den EXCEL zu $12\frac{69}{200}$ vereinfacht.

Beispiel 2.7:

Illustrieren wir im Folgenden die Problematik der *Prozentrechnung* (siehe Abschn.2.7.2) unter Anwendung von EXCEL:

a) Im Tabellenausschnitt ist Folgendes zu sehen:

- Für die Zelle Z1S1 wird die Kategorie *Prozent* (Prozentformat) gewählt: Dies geschieht entweder mittels Symbol % aus der Symbolleiste oder mittels Menüfolge **Format ⇒ Zellen** im erscheinenden Dialogfeld **Zellen formatieren** in der Registerkarte **Zahlen**.

- Verbindet man zwei gleiche Verhältnisse a/b und c/d zu einer Gleichung, d.h. $a/b = c/d$, so spricht man von einer *Verhältnisgleichung* oder *Proportion*. Damit stellen Proportionen eine einfache Form von *Gleichungen* dar.
- Sind in einer Proportion nicht nur zwei, sondern mehrere Verhältnisse gleichgesetzt, so spricht man von einer *fortlaufenden Proportion*, wie z.B. bei $a / d = b / e = c / f$
  die man auch in folgender Form schreibt: $a / b / c = d / e / f$
- Bekannte *Rechenregeln* für Proportionen sind:
  - *Erweitern* und *Kürzen*, d.h. Glieder einer Seite mit derselben Zahl multiplizieren bzw. dividieren:
    Die Proportion $a / b = c / d$ bleibt unverändert, wenn man die Glieder eines Verhältnisses mit derselben Zahl $p\neq0$ multipliziert bzw. durch $q\neq0$ dividiert:
    $a / b = (c \cdot p) / (d \cdot p) = (c : q) / (d : q)$
  - Überführung der Proportion $a / b = c / d$
    in die *Produktgleichung* $a \cdot d = b \cdot c$

Bemerkung

Proportionen spielen im kaufmännischen Rechnen eine große Rolle:

- Sie sind uns bei der Prozentrechnung in der gegebenen Prozentformel begegnet und werden uns im folgenden Abschnitt beim Dreisatz erneut begegnen.
- Des Weiteren werden Proportionen bei Aufgaben der Verteilung (*Verteilungsrechnung*) benötigt, die in der Praxis auftreten, wenn z.B. Waren oder Geldbeträge an mehrere Personen, Einrichtungen usw. in einem bestimmten Verhältnis zu verteilen sind. Wir illustrieren diese Problematik im Beisp.2.8.

♦

2.7.4 Dreisatz

Die *Dreisatzrechnung* spielt in kaufmännischen Rechnungen eine fundamentale Rolle, da sich viele Anwendungsaufgaben hiermit lösen lassen:

- In der *Dreisatzrechnung* werden unbekannte Größen x in (direkten bzw. indirekten) proportionalen Zusammenhängen (Proportionen) in folgenden vier Formen berechnet (*Dreisatzformeln*), wobei wir den einfachen Dreisatz zugrunde legen:

  (1) $x / b = c / d$ daraus folgt $x = b \cdot c / d$

  (2) $a / x = c / d$ daraus folgt $x = a \cdot d / c$

  (3) $a / b = x / d$ daraus folgt $x = a \cdot d / b$

  (4) $a / b = c / x$ daraus folgt $x = b \cdot c / a$

  Diese Formeln braucht man sich nicht zu merken, da man sie problemlos für jede Aufgabe herleiten kann, wie im Beisp.2.9 illustriert ist.
- In der *Dreisatzrechnung* unterscheidet man zwischen einfachem und zusammengesetztem (erweitertem) Dreisatz.

- Anschließend wird die Zahl 123 in Zelle Z1S1 eingegeben.
- Damit wird für die Zahl 123 eine Prozentformatierung vorgenommen, d.h. sie wird in Zelle Z1S1 in der Form 123 % dargestellt:

Z1S1	fx 123%		
	1	2	3
1	123%		

b) Ein Konsumartikel kostet netto 399 Euro (Nettopreis = Grundwert GW). Wieviel muss der Kunde bei einer Mehrwertsteuer von 16% (Prozentsatz PS) hierfür bezahlen, d.h. wie hoch ist der Bruttopreis GW+PW:

- Berechnung des zu 16% gehörenden Prozentwertes PW mittels *Dreisatz*:
  100% = 399 Euro , 1% = 399 Euro / 100 = 3,99 Euro
  16% = 16 · 3,99 Euro = 63,84 Euro
- Berechnung des zu 16% gehörenden Prozentwertes PW mittels *Prozentformel:*
  PW = PS · GW / 100 für PS = 16 und GW = 399 , d.h. es wird der Prozentwert PW 16 · 399 Euro / 100 = 63,84 Euro berechnet.
- Damit beträgt der Bruttopreis GW+PW für den Kunden:
  399 Euro + 63,84 Euro = 462,84 Euro
- In EXCEL kann man die Berechnung mittels *Prozentformel* z.B. wie im folgenden Tabellenausschnitt gestalten:

Z2S4	fx =GW+PW			
	1	2	3	4
1	PS	GW	PW	Bruttopreis
2	16	399	63,84	462,84

  - Nachdem für die Zellen Z2S1, Z2S2 und Z2S3 mittels der Menüfolge
    Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen
    die Namen PS bzw. GW bzw. PW für Prozentsatz bzw. Grundwert bzw. Prozentwert erstellt wurden, sind in Zelle Z2S3 die Prozentformel = PS · GW / 100 und in Zelle Z2S4 die Formel =GW+PW für den Bruttopreis eingetragen.
  - Damit kann man die Formeln für beliebige konkrete Zahlenwerte von PS und GW benutzen, indem man diese in die entsprechenden Zellen Z2S1 bzw. Z2S2 eingibt und EXCEL anschließend automatisch den dafür berechneten Prozentwert und Bruttopreis in Zelle Z2S3 bzw. Z2S4 anzeigt.

Beispiel 2.8:

Lösen wir zwei typische Aufgaben der *Verteilungsrechnung*, wobei wir die Anwendung von EXCEL dem Leser als Übung überlassen:

- Wir illustrieren die Problematik der Dreisatzrechnung unter Anwendung von EXCEL im Beisp.2.9.

2.7.5 Währungsrechnung

Unter *Währungsrechnung* versteht man das Umrechnen von einer Währung in eine andere. Dies ist einfach unter Anwendung der Dreisatzrechnung möglich, wie im Beisp.2.10 illustriert ist.

2.7.6 Folgen, Reihen, Summen und Produkte

In der Wirtschaftsmathematik und speziell der Finanzmathematik benötigt man Folgen und Reihen (Summen) reeller Zahlen, die als Zahlenfolgen bzw. Zahlenreihen bezeichnet werden:

- Ordnet man natürlichen Zahlen k = 1, 2, ... , n eindeutig reelle Zahlen a_k zu, so spricht man von einer *Zahlenfolge* mit n Gliedern $a_1, a_2, ..., a_n$, die man kurz mit

  $$\{a_k\}$$

  bezeichnet:
  - Ist n eine endliche Zahl, so spricht man von *endlichen Zahlenfolgen*.
  - Lässt man n gegen unendlich gehen, so spricht man von *unendlichen Zahlenfolgen,* die konvergent oder divergent sein können.
- Wichtige Zahlenfolgen für die Wirtschaftsmathematik sind
  - *arithmetische Zahlenfolgen:* Hier gilt für alle Glieder

    $$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k-1) \cdot d$$

    wobei $d \neq 0$ eine konstante reelle Zahl ist, d.h. ein Glied der Folge berechnet sich aus dem vorhergehenden durch Addition der Konstanten d.
  - *geometrische Zahlenfolgen:* Hier gilt für alle Glieder

    $$a_k = a_{k-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{k-1}$$

    wobei $q \neq 0$ eine konstante reelle Zahl ist, d.h. ein Glied der Folge berechnet sich aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit der Konstanten q.
- Man erhält endliche *Zahlenreihen*, wenn man die Glieder endlicher Zahlenfolgen addiert, d.h. unter Verwendung des Summenzeichens gilt

  $$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (a_k \text{ - reelle Zahlen})$$

  wobei S_n für die Summe der Reihe aus n Gliedern steht:
  - Wir bevorzugen die Bezeichnung Reihe, obwohl für endliche Reihen auch die Bezeichnung (endliche) *Summe* verwendet wird.

a) Ein Lotteriegewinn von 100 000 Euro ist auf drei Personen a, b und c auf Grund ihrer Einzahlungsbeträge im Verhältnis 3:5:8 aufzuteilen. Wieviel Geld bekommt jeder:

- Die Lösung dieser Aufgabe erhält man, indem man die Verhältniszahlen addiert, d.h. 3 + 5 + 8 =16, so dass sich 16 Teile ergeben.
- Wegen 100 000/16 ergeben sich für einen Teil 6250 Euro.
- Abschließend ergeben Multiplikationen mit den entsprechenden Teilen
  $3 \cdot 6250 = 18\,750$, $5 \cdot 6250 = 31\,250$, $8 \cdot 6250 = 50\,000$
  die Anteile für die drei Personen, d.h.
  a = 18 750 Euro, b = 31 250 Euro, c = 50 000 Euro

b) Ein Firmengewinn von 324 000 Euro ist auf vier Inhaber a, b, c und d nach deren Kapitalanteilen von a=800 000 Euro, b=700 000 Euro, c=300 000 Euro und d=900 000 Euro aufzuteilen. Wieviel vom Gewinn erhalten die einzelnen Inhaber:

- Die Lösung erfolgt wie bei Beisp.2.8a.
- Der Gewinn ist im Verhältnis 800 000 **:** 700 000 **:** 300 000 **:** 900 000 aufzuteilen. Da man hier kürzen kann, ergibt sich das Verhältnis 8 **:** 7 **:** 3 **:** 9, so dass 27 Teile entstehen.
- Wegen 324 000/27 ergeben sich für einen Teil 12000 Euro, d.h. die einzelnen Inhaber erhalten folgende Gewinnanteile:
  a = 96 000 Euro , b = 84 000 Euro , c = 36 000 Euro , d = 108 000 Euro

Beispiel 2.9:

Betrachten wir Anwendungsaufgaben für den *Dreisatz:*

a) *Einfacher Dreisatz*:

a1) 2,5 kg Zucker kosten 4 Euro . Wieviel kg Zucker erhält man für 6 Euro:

- Hier kann die Dreisatzformel (3) aus Abschn.2.7.4 angewandt werden, wobei x für die zu berechnende Menge von Zucker steht:
  $2{,}5 / 4 = x / 6$ ergibt $x = 2{,}5 \cdot 6 / 4 = 3{,}75$
  Damit erhält man 3,75 kg Zucker für 6 Euro.
- Man kann sich die entsprechende Dreisatzformel auch direkt herleiten:
  Für 4 Euro erhält man 2,5 kg. Dann erhält man für 1 Euro 2,5/4 kg und für 6 Euro folglich $6 \cdot 2{,}5 / 4 = 3{,}75$ kg.

a2) 5 Maschinen stellen in einem gewissen Zeitraum 120 Bolzen her. Wieviel werden von 3 Maschinen hergestellt:

- Hier kann die Dreisatzformel direkt hergeleitet oder die Dreisatzformel (4) aus Abschn.2.7.3 angewandt werden:
  $5/120 = 3/x$ ergibt $x = 3 \cdot 120/5 = 72$
  Somit stellen 3 Maschinen 72 Bolzen her.
- Die Anwendung von EXCEL zur Lösung von Dreisatzaufgaben ist problemlos möglich, wie aus folgendem Tabellenausschnitt zu sehen ist:

- Ist n eine endliche Zahl, so spricht man von *endlichen Zahlenreihen:*
  * Bilden die Glieder der Reihe eine endliche arithmetische Folge, so ergibt sich eine *endliche arithmetische Reihe* mit der Summe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)\cdot d) = a_1 \cdot n + \frac{n\cdot(n-1)\cdot d}{2}$$

  * Bilden die Glieder der Reihe eine endliche geometrische Folge, so ergibt sich eine *endliche geometrische Reihe* mit der Summe

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

- Lässt man n gegen unendlich gehen, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

  so spricht man von *unendlichen Zahlenreihen,* die als Grenzwert der Summen S_n endlicher Reihen definiert sind. Sie können konvergent oder divergent sein, je nachdem ob dieser Grenzwert existiert oder nicht, d.h. sie können eine Summe besitzen oder nicht:
  * Die endliche geometrische Reihe geht für n gegen unendlich in die unendliche geometrische Reihe über, die für $|q|<1$ konvergent (hinreichende Konvergenzbedingung) und für $|q|>1$ divergent ist und folgende Summe S besitzt, die man durch Grenzwertberechnung aus der Summe S_n der endlichen geometrischen Reihe erhält:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1} = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \qquad (\text{für } |q|<1)$$

  * Die arithmetische Reihe liefert ein Beispiel für eine divergente unendliche Reihe, wenn n gegen unendlich geht. Hier ist bereits die notwendige Konvergenzbedingung

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

    für unendliche Reihen nicht erfüllt.

Bemerkung

Neben der Berechnung endlicher Summen (Reihen) werden bei kaufmännischen Rechnungen gelegentlich endliche *Produkte* reeller Zahlen benötigt, die sich in folgender Form schreiben:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \qquad (a_k \text{ - reelle Zahlen})$$

EXCEL stellt Funktionen sowohl zur Berechnung endlicher Summen als auch Produkte bereit, die im folgenden Abschn.2.7.7 vorgestellt werden.

♦

Z2S4		fx	=Maschinen2*Bolzen1/Maschinen1		
	1	2	3	4	5
1	Maschinen1	Bolzen1	Maschinen2	Bolzen2	
2	5	120	3	72	

- Dreisatzformeln benötigen als Rechenoperationen nur Multiplikation und Division.
- Man braucht nur vorliegende Größen und Dreisatzformeln in entsprechende Zellen der Tabelle einzugeben und die Berechnung der Formel auszulösen, wie im obigen Tabellenausschnitt für die betrachtete Aufgabe illustriert ist:
  - * Hier sind mittels der Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen** im erscheinenden Dialogfeld **Namen erstellen** die Namen *Maschinen1*, *Bolzen1* für die gegebenen Zahlenwerte 5 bzw. 120 erstellt, ebenso der Name *Maschinen2* für die 3 Maschinen, für die mit *Bolzen2* bezeichnete Bolzen mittels der in Zelle Z2S4 befindlichen Formel zu berechnen sind.
  - * Der abgebildete Tabellenausschnitt kann als Vorlage für die Durchführung von Dreisatzrechnungen mittels EXCEL dienen.

b) *Zusammengesetzter Dreisatz*:
5 Maschinen (M) stellen in 2 Tagen (T) 400 Bolzen (B) her. Wie lange brauchen dann 3 Maschinen für 480 Bolzen:

- Da drei Größen vorkommen, ist der zusammengesetzte Dreisatz anzuwenden, der zwei einfache Dreisätze erfordert:
  - *1. einfacher Dreisatz:* Wenn 400 B von 5 M in 2 T hergestellt werden, dann brauchen 3 M hierfür $2\cdot 5 / 3$ T, d.h. 10/3 Tage.
  - *2. einfacher Dreisatz:* 480 B werden dann von 3 M in $480\cdot 2\cdot 5/(400\cdot 3)\text{T} = 4$ T hergestellt, d.h. das Ergebnis lautet 4 Tage.
- Die Anwendung von EXCEL zur Lösung zusammengesetzter Dreisatzaufgaben ist analog zu Beisp.2.9a2 problemlos möglich. Wir überlassen dies dem Leser als Übungsaufgabe.

Beispiel 2.10:
Währungsrechnung befasst sich mit dem Umrechnen verschiedener Währungen und ist einfach unter Anwendung der Dreisatzrechnung durchführbar, wie folgende Aufgabe illustriert:

- Der Kurs zwischen Euro und Dollar betrage 1 Euro = 1,23 Dollar. Wieviel Euro bekommt man für 500 Dollar.
- Der Dreisatz liefert für diese Aufgabe

$$1 \text{ Dollar} = \frac{1}{1,23} \text{ Euro und damit } 500 \text{ Dollar} = \frac{500}{1,23} \text{ Euro} = 406,50 \text{ Euro}$$

Beispiel 2.11:
Betrachten wir einige Beispiele zur Berechnung von Reihen (Summen) und Produkten:

2.7.7 Einsatz von EXCEL

Kaufmännisches Rechnen (Wirtschaftsrechnen) ist mit EXCEL problemlos möglich (siehe Beisp.2.6-2.11):

- Auftretende Formeln sind aufgrund der Taschenrechnerfunktionen von EXCEL einfach berechenbar.
- Vorhandene EXCEL-Funktionen können eingesetzt werden, wie z.B. die zur Berechnung von Summen und Produkten (siehe Beisp.1.6, 2.5 und 2.11):
  - **SUMME** (Zahl1 **;** Zahl2 **;** ...)
    Diese Funktion addiert alle enthaltenen Argumente (bis zu 30), wobei als Argumente Zahl1 **;** Zahl2 **;** ... neben Zahlen, Zellbezügen auch Bereiche auftreten können, die durch Bereichsbezüge oder Namen gegeben sind.
  - **PRODUKT** (Zahl1 **;** Zahl2 **;** ...)
    Diese Funktion multipliziert alle enthaltenen Argumente (bis zu 30), wobei als Argumente Zahl1 **;** Zahl2 **;** ... neben Zahlen, Zellbezügen auch Bereiche auftreten können, die durch Bereichsbezüge oder Namen gegeben sind.
- Man kann VBA-Programme schreiben, wie im Folgenden an der Berechnung von Doppelsummen illustriert ist:
  - In mathematischen Modellen können *Doppelsummen* der Form

    $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

    auftreten, so bei der Summation von Matrizenelementen.
  - Zu ihrer Berechnung kann man folgendes VBA-Programm einsetzen:

```
Function DOPPELSUMME ( A , m , n )
'Summenberechnung der Elemente einer Matrix A mit m Zeilen und n Spalten
Dim i As Integer, j As Integer
DOPPELSUMME = 0
For i = 1 To m
For j = 1 To n
DOPPELSUMME = DOPPELSUMME + A(i, j)
Next j
Next i
End Function
```

  - Mit dem VBA-Funktionsprogramm DOPPELSUMME kann man die Summe der Elemente einer Matrix berechnen, für die in der Tabelle ein zusammenhängender Bereich definiert wurde. Wir illustrieren dies im Beisp.2.11b.

a) Im Tabellenausschnitt ist die Berechnung von Summen und Produkten von Zahlen mittels der EXCEL-Funktionen **SUMME** bzw. **PRODUKT** zu sehen:

- Die zu summierenden bzw. multiplizierenden Zahlen befinden sich im Bereich Z1S1 **:** Z2S2 (Bereichsadresse), dem Bereich Z1S4 **:** Z3S5 mit definiertem Namen (Bereichsnamen) A, einer Zahl in Zelle Z4S1 mit definiertem Namen b und in Zelle Z4S2 (Zelladresse).
- Die von EXCEL mittels =**SUMME** (Z1S1 **:** Z2S2 **;** A **;** b **;** Z4S2) und =**PRODUKT** (Z1S1 **:** Z2S2 **;** A **;** b **;** Z4S2) berechneten Ergebnisse findet man in den Zellen Z6S3 (Summe) bzw. Z6S5 (Produkt).

Z6S3 | fx =SUMME(Z1S1:Z2S2;A;b;Z4S2)

	1	2	3	4	5
1	1	2		5	6
2	3	4		7	8
3				9	10
4	11	12			
5					
6			78		479001600

- Weitere Anwendungen der EXCEL-Funktionen **SUMME** und **PRODUKT** findet man im Beisp.1.6 bzw. 2.5.

b) Geben wir eine Illustration des VBA-Funktionsprogramms DOPPELSUMME aus Abschn.2.7.7, indem wir es auf die für den Bereich Z1S1**:**Z2S3 definierte Matrix **B** anwenden:

- Das von EXCEL mit DOPPELSUMME berechnete Ergebnis findet man in Zelle Z1S4 des folgenden Tabellenausschnittes.

Z1S4 | fx =DOPPELSUMME(B;2;3)

	1	2	3	4
1	1	2	3	21
2	4	5	6	

- Das gleiche Ergebnis wird auch durch Anwendung der EXCEL-Funktion **SUMME** in der Form =**SUMME(B)** erhalten, wie man sich leicht überlegt.

c) Illustrieren wir die Anwendung *geometrischer Reihen* am Beispiel der Rentenrechnung in der Finanzmathematik (siehe Abschn.13.2.3):

- Der Rentenendwert R_T nach T Jahren bei einer Rentenrate R (mit Zinsfaktor $q = 1 + i = 1 + p/100$) ergibt sich für nachschüssige Rente durch Addition der T aufgezinsten Raten zu

$$R_T = R + R \cdot q + R \cdot q^2 + ... + R \cdot q^{T-1} = R \cdot (1 + q + q^2 + ... + q^{T-1})$$

2.8 Rechenfehler

Bei der Durchführung von Rechnungen mittels EXCEL bleiben *Fehler* (Rechenfehler) nicht aus, die jedoch meistens vom Anwender verschuldet sind:

- Häufige *Fehlerursachen* sind:
  - Funktionen von EXCEL oder vom Anwender definierte Funktionen werden falsch geschrieben oder mit unzulässigen Argumenten eingegeben.
  - Division durch Null:
    - ∗ In einer Formel wird nicht berücksichtigt, dass der Nenner Null werden kann. Dies kann auch in selbsterstellten VBA-Programmen auftreten (siehe Kap.4.5.5).
    - ∗ Im Nenner eines Bruchs steht die Adresse einer Zelle, die leer ist und damit von EXCEL als Zahl 0 interpretiert wird.
  - Formeln werden fehlerhaft geschrieben.
  - Wenn das Gleichheitszeichen zu Beginn einer Formel vergessen wird und die Formel nicht mit + oder − beginnt, interpretiert EXCEL die Eingabe als Text und es werden keine Rechnungen durchgeführt.
  - Statt des Dezimalkommas wird der Dezimalpunkt verwandt.
  - Bei der Division wird statt des Bruchstrichs / ein Doppelpunkt **:** geschrieben.
- EXCEL erkennt eine Reihe von Fehlern und gibt *Fehlermeldungen* aus, von denen man u.a. folgende antrifft (siehe Beisp.2.12):
  - **#DIV/0!**
    Steht für Division durch Null, d.h. es wird durch Null oder eine leere Zelle dividiert.
  - **#NAME?**
    Steht für einen nichtverfügbaren Namen, wenn z.B. der Name einer Funktion falsch geschrieben ist, so dass ihn EXCEL nicht erkennt.
  - **#WERT!**
    Steht für einen ungültigen Wert, wenn z.B. Klammern in Formeln falsch gesetzt sind oder innerhalb von Funktionen falsche Argumente verwandt werden.
  - **#ZAHL!**
    Steht für eine falsche Zahl, wenn z.B. Argumente einer Funktion außerhalb des zulässigen Bereichs liegen, d.h. nicht zulässig sind.
  - **#NUM!**
    Hier treten Probleme mit einer Zahl auf.
  - **#NV!**
    Steht für einen nichtverfügbaren Wert, wenn z.B. im Argument einer Funktion auf eine Zelle verwiesen wird, die keinen gültigen Inhalt hat.
  - **#BEZUG!**
    Der Zellbezug ist nicht richtig.

Bei falsch eingegebenen Formeln liefert EXCEL in gewissen Fällen auch Verbesserungsvorschläge, wie im Beisp.2.12d illustriert ist.

- Man sieht, dass die Summe $1+q+q^2+...+q^{T-1}$ eine endliche geometrische Reihe darstellt, so dass die Summenformel aus Abschn.2.7.6
  $1+q+q^2+...+q^{T-1} = \frac{1-q^T}{1-q}$ die *Rentenformel* $R_T = R \cdot \frac{1-q^T}{1-q}$ liefert.
- Berechnungen nach der Rentenformel lassen sich einfach in EXCEL realisieren, wie aus folgendem Tabellenausschnitt für die Werte aus Beisp.13.3 ersichtlich ist. Dieser Tabellenausschnitt kann als Vorlage zur Durchführung kaufmännischer Rechnungen mittels EXCEL dienen:

Z1S4 ▾ fx =R*(1-q^T)/(1-q)

	1	2	3	4
1	R	q	T	25155,7851
2	2000	1,05	10	

  - Man erstellt Namen R, q und T für die darunter stehenden konkreten Werte, wie im Abschn.2.5 beschrieben ist.
  - Die zu berechnende Formel (Rentenformel) in Zelle Z1S4 kann mit diesen Namen alle Aufgaben für verschiedene konkrete Werte von R, q und T berechnen:
    - ∗ Man braucht nur die entsprechenden Zahlenwerte unterhalb der Namen zu verändern.
    - ∗ EXCEL berechnet dann automatisch den neuen Wert (Rentenendwert).

Beispiel 2.12:
Betrachten wir einige fehlerhafte Eingaben, um die von EXCEL angezeigten *Fehlermeldungen* zu illustrieren:

a) Bei Eingabe der Formel =1/**LN**(1)
zeigt EXCEL die *Fehlermeldung* **#DIV/0!**
an, da der Logarithmus von 1 Null ist und somit durch Null dividiert wird.

b) Bei Eingabe der Formel =**WURZEL**(–2)
zeigt EXCEL die *Fehlermeldung* **#ZAHL!**
an, da die Quadratwurzel nur aus positiven Zahlen gezogen werden kann, d.h. hier wurde für die Funktion ein unzulässiges Argument eingegeben.

c) Bei Eingabe der Funktion =**ABRUNDEN**(12,234**;**Z1S1**:**Z2S1)
zeigt EXCEL die *Fehlermeldung* **#WERT!**
an, da als zweites Argument anstatt einer Zelladresse eine Bereichsadresse eingegeben wurde.

d) Bei Eingabe der fehlerhaft geschriebenen Formel =(1+2)(3+4)
liefert EXCEL ein Dialogfeld mit dem *Verbesserungsvorschlag*
= (1+2) ∗ (3+4)
d.h. EXCEL erkennt, dass der Multiplikationspunkt * vergessen wurde, der im Gegensatz zur mathematischen Schreibweise in EXCEL immer zu schreiben ist.

3 EXCEL: Mathematik

3.1 Einführung

EXCEL lässt sich neben seiner Hauptaufgabe *Tabellenkalkulation* auch effektiv zum Rechnen (kaufmännischen Rechnen) einsetzen, wie im vorangehenden Kap.2 zu sehen ist. Dies ist aber nicht die einzige Stärke:

- Das EXCEL zugrundeliegende Prinzip der *Tabelle* kann man nutzbringend in der Mathematik anwenden, so z.B. beim Rechnen mit *Matrizen*, die häufig in mathematischen Modellen der Wirtschaft auftreten.
- Weiterhin haben die Entwickler zahlreiche Funktionen und Zusatzprogramme (Add-Ins) in neuere Versionen von EXCEL aufgenommen, um Aufgaben der Mathematik mit EXCEL lösen zu können (siehe Abschn.3.3.1 und 7.3).
- EXCEL kann man in der Mathematik zur Lösung von Aufgaben folgender Gebiete einsetzen, wie in den angegebenen Kapiteln zu sehen ist:

  Grafische Darstellung mathematischer Funktionen (Abschn.7.4), Matrizenrechnung (Kap.5), Gleichungen und Ungleichungen (Kap.6), Optimierung (Kap.12), Finanzmathematik (Kap.13), Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Kap.14), Simulation/ Monte-Carlo-Methoden (Abschn.14.6).

3.2 Wirtschaftsmathematik

Man versteht unter *Wirtschaftsmathematik* Folgendes:

- Die Wirtschaftsmathematik ist kein spezielles Gebiet der Mathematik mit eigenständigen Methoden, sondern wendet die allgemeine mathematische Theorie an.
- Unter der Sammelbezeichnung Wirtschaftsmathematik werden diejenigen mathematischen Gebiete betrachtet, die eine Anwendung auf Aufgabenstellungen der Wirtschaft erkennen lassen.
- In Lehrbüchern der Wirtschaftsmathematik findet man neben der allgemeinen mathematischen Theorie
  - eine ökonomische Interpretation mathematischer Begriffe und Resultate,
  - konkrete Anwendungsbeispiele aus der Wirtschaft, die den Nutzen mathematischer Methoden illustrieren.
- Aufgrund der Charakterisierung der Wirtschaftsmathematik lassen sich EXCEL und die im Buch behandelten mathematischen Methoden nicht nur zur Lösung von Aufgaben aus der Wirtschaft, sondern auch aus Technik und Naturwissenschaften anwenden (siehe Literaturverzeichnis [144-146]).

3.3 Einsatz von EXCEL

Neben zahlreichen Funktionen zur Mathematik (siehe Abschn.3.3.1 und 7.3) bietet EXCEL weitere Möglichkeiten zur Lösung von Aufgaben der Wirtschaftsmathematik:

- Zielwertsuche zur Lösung von Gleichungen (siehe Abschn.3.3.2),
- Anwendung von Add-Ins (siehe Abschn.3.3.3).

Beispiel 3.1:
Die Arbeit mit allen EXCEL-Funktionen gestaltet sich effektiv unter Anwendung des *Funktions-Assistenten* (siehe Abschn.2.2 und Beisp.2.2):

- Nach seinem Aufruf erscheint das Dialogfeld **Funktion einfügen** (siehe Abb.3.1), in dem bei *Funktion auswählen* alle Funktionen aufgelistet sind, deren Kategorie bei *Kategorie auswählen* angegeben ist.
- Wenn man EXCEL-Funktionen für zu lösende Aufgaben sucht, kann man im Dialogfeld **Funktion einfügen** bei *Funktion suchen* hierzu Stichworte eingeben:
  - In Abb.3.1 ist bei *Funktion suchen* der Begriff *Zinsen* eingegeben.
  - EXCEL zeigt jetzt alle Funktionen zur Zinsberechnung an und gibt nach Markierung einer entsprechenden Funktion eine kurze Beschreibung, wie für die markierte Funktion ZINS zu sehen ist.
- Bei *Kategorie auswählen* kann man ein Gebiet auswählen, für das man EXCEL-Funktionen sucht. Stellt man hier *Alle* ein, so werden sämtliche EXCEL-Funktionen in alphabetischer Reihenfolge angezeigt.
- Ausführlichere Informationen zu einzelnen markierten Funktionen erhält man durch Anklicken von <u>*Hilfe für diese Funktion*</u> am unteren Rand des Dialogfeldes **Funktion einfügen**. Im anschließend erscheinenden Hilfefenster werden die Funktion und ihre benötigten Argumente ausführlicher beschrieben.

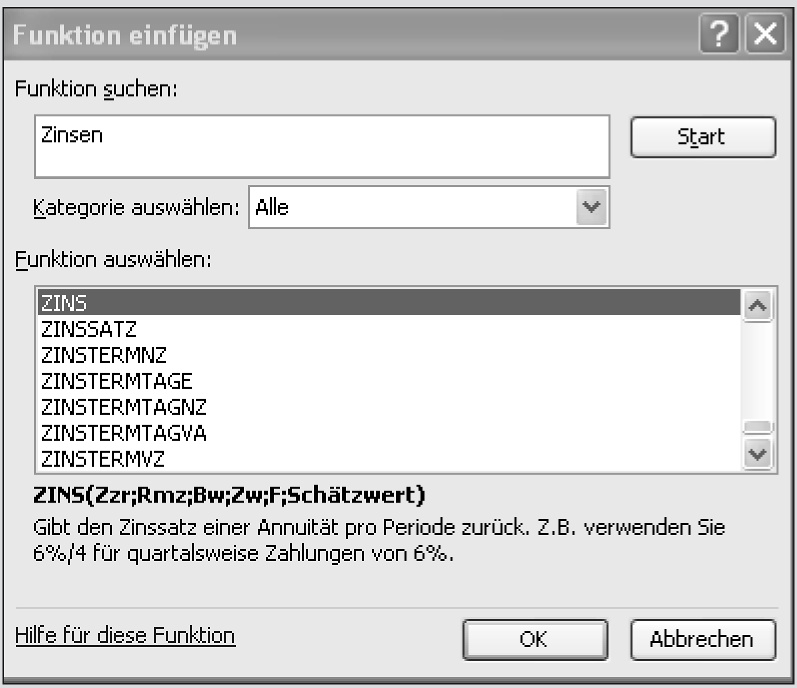


Abb.3.1: Dialogfeld **Funktion einfügen** des Funktions-Assistenten

- Mittels der in EXCEL integrierten Programmiersprache VBA (siehe Kap.4) können Aufgaben verschiedenster Gebiete durch Erstellung eigener Programme gelöst werden, wofür eine Illustration in den Kap.8, 9 und 11 zu sehen ist.

3.3.1 Funktionen

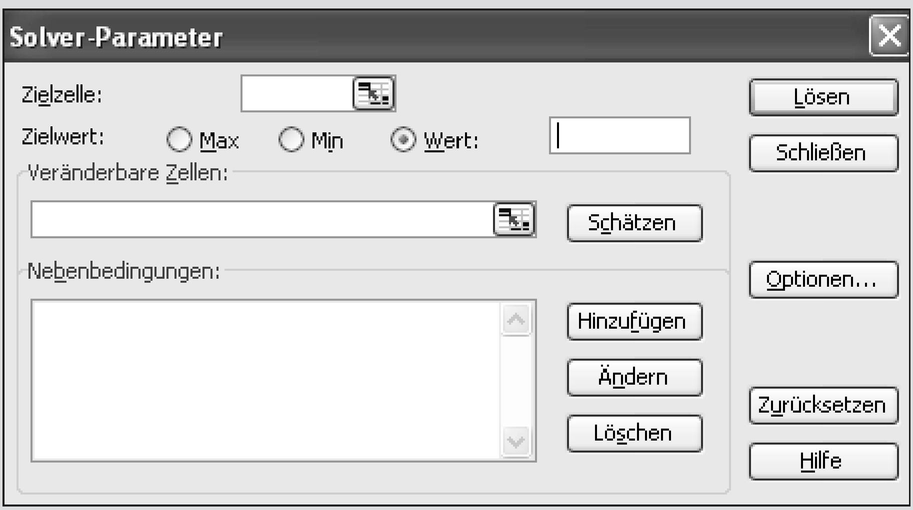
In EXCEL sind eine Vielzahl von Funktionen integriert (vordefiniert), die wir als *EXCEL-Funktionen* bezeichnen und die folgendermaßen charakterisiert sind:

- Sie liefern Ergebnisse in Form von Zahlen, Text oder Wahrheitswerten, wenn die erforderlichen Argumente eingegeben werden.
- Sie können geschachtelt werden, d.h. als Argumente einer EXCEL-Funktion können wieder EXCEL-Funktionen auftreten, wie im Beisp.5.7 und 5.9 illustriert ist.
- Sie erleichtern die Arbeit mit EXCEL wesentlich, da man nicht die zugrundeliegenden Berechnungsformeln kennen bzw. eingeben muss.
- Eine kurze Beschreibung zu jeder EXCEL-Funktion wird im Dialogfeld **Funktion einfügen** des *Funktions-Assistenten* angezeigt, wenn man die entsprechende Funktion markiert. Eine ausführlichere Beschreibung erhält man hier, wenn man <u>*Hilfe für diese Funktion*</u> anklickt (siehe Abschn.2.2 und Beisp.2.2 und 3.1).
- Sie sind in Gruppen (Kategorien) eingeteilt:
  - Für mathematische Rechnungen wichtige EXCEL-Funktionen werden im Buch ausführlicher beschrieben, da wir sie in zahlreichen Beispielen einsetzen.
  - Im Folgenden stellen wir diejenigen Gruppen (Kategorien) von Funktionen vor, die für mathematische Rechnungen interessant sind:
    - *Finanzmathematik*
      Enthält zahlreiche Funktionen für finanzmathematische Rechnungen (*finanzmathematische Funktionen*). Wir geben im Kap.13 eine Einführung in die Fähigkeiten von EXCEL auf dem Gebiet der Finanzmathematik.
    - *Math. & Trigonom.*
      Hier findet man die gesamte Palette der elementaren mathematischen Funktionen wie Potenz-, Exponential- und trigonometrischen Funktionen und deren inversen Funktionen und weitere Funktionen, wie z.B. zur Summen- und Produktbildung, Kombinatorik und Erzeugung von Zufallszahlen.
    - *Statistik*
      Enthält zahlreiche Funktionen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Statistikfunktionen). Im Kap.14 geben wir eine kurze Einführung in die Fähigkeiten von EXCEL auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.
    - *Matrix*
      Enthält Funktionen zur Matrizenrechnung (*Matrizenfunktionen*). Weitere Funktionen hierzu findet man in der Gruppe *Math.& Trigonom.* Im Kap.5 gehen wir ausführlich auf die Anwendung von EXCEL in der Matrizenrechnung ein.
    - *Logik*
      Enthält logische Funktionen und Operatoren.

- Mit Hilfe des Dialogfeldes **Funktion einfügen** des Funktions-Assistenten kann man benötigte EXCEL-Funktionen in Zellen der aktuellen Tabelle eingeben. Diese Vorgehensweise wird empfohlen:
  - Man erhält die exakte EXCEL-Schreibweise einer Funktion.
  - Nach Mausklick auf OK im Dialogfeld **Funktion einfügen** können im erscheinenden Dialogfeld **Funktionsargumente** alle von einer Funktion benötigten Argumente eingegeben werden, wie im Beisp.2.2 illustriert ist.

Beispiel 3.2:
Es gibt *Add-Ins* (Zusatzprogramme, Erweiterungsprogramme) für EXCEL, die für eine Reihe von Gebieten der Wirtschaftsmathematik einsetzbar sind. Im Rahmen des Buches stellen wir folgende vor:

- Lösung von *Gleichungen*, *Ungleichungen* und *Optimierungsaufgaben:*
  Hierfür kann das von der Firma FRONTLINE SYSTEMS entwickelte Add-In SOLVER eingesetzt werden, von dem sich eine Standardversion auf der Installations-CD von EXCEL befindet:
  - Der SOLVER wird bei der Installation von EXCEL mit installiert, muss aber beim ersten Start von EXCEL mittels der Menüfolge
    Extras ⇒ Add-Ins
    im erscheinenden Dialogfeld **Add-Ins** bei *Verfügbare Add-Ins* aktiviert werden.
  - Es gibt von FRONTLINE SYSTEMS eine Weiterentwicklung unter dem Namen PREMIUM-SOLVER, der z.B. dem Buch [156] beigefügt ist.
  - Wenn der SOLVER in EXCEL aktiviert ist, kann er mittels der Menüfolge
    Extras ⇒ Solver
    aufgerufen werden und es erscheint das folgende Dialogfeld **Solver-Parameter**:



* *Information*
  Hier findet man u.a. Funktionen, die man zur Programmierung benötigt, wie z.B. Tests auf Text, Zahlen, gerade oder ungerade Zahlen.
* *Technisch*
  Hier findet man u.a. Funktionen zur Umwandlung von Zahlen, die Gaußsche Fehlerfunktion und Besselfunktionen.

3.3.2 Zielwertsuche

Wenn sich in einer Zelle eine Formel befindet, die verschiedene Zahlenwerte liefern kann, so lässt sich hierzu die in EXCEL integrierte *Zielwertsuche* heranziehen, um einen bestimmten Wert zu erhalten:

- Diese Zielwertsuche wird mittels der Menüfolge **Extras** ⇒ **Zielwertsuche** gestartet und es erscheint das Dialogfeld **Zielwertsuche**

- In der Mathematik kann man diese Zielwertsuche z.B. zur Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten heranziehen, wie im Abschn.6.3.1 illustriert ist.

3.3.3 Anwendung von Add-Ins

Wie für viele WINDOWS-Programmsysteme existieren auch für EXCEL zahlreiche *Zusatzprogramme* (Erweiterungsprogramme), mit denen komplexere Aufgaben lösbar sind:

- Diese Zusatzprogramme bezeichnet man als *Add-Ins*.
- Add-Ins kann man für EXCEL selbst erstellen, wofür im Abschn.4.7 die Vorgehensweise erklärt ist.
- Die Erstellung anspruchsvoller und effektiver Add-Ins erfordert gute Programmierkenntnisse und tiefere Kenntnisse der zu lösenden Aufgaben.
- Professionelle Add-Ins werden von Softwarefirmen angeboten und müssen bis auf den SOLVER käuflich erworben werden.
- Wichtige für die Wirtschaftsmathematik vorhandene Add-Ins von EXCEL sind im Beisp.3.2 vorgestellt, während ihre Anwendung in den entsprechenden Kap.6, 12 und 14 illustriert ist.

- Im Kap.6 und 12 stellen wir den SOLVER ausführlicher vor:
  - * Hier lösen wir mit seiner Hilfe lineare und nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen und Optimierungsaufgaben.
  - * Hier findet man detaillierte Hinweise, wie das Dialogfeld **Solver-Parameter** auszufüllen ist.

- Lösung von Aufgaben der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und *Statistik:*

  Hierfür gibt es mehrere Add-Ins, die man extra erwerben muss. Dies hängt wesentlich vom Geldbeutel des Anwenders ab, da die Preise stark variieren. Im Abschn.14.2.2 stellen wir jeweils ein Add-In der unteren (WINSTAT) und oberen (UNISTAT) Preiskategorie vor.

- Durchführung von *Monte-Carlo-Simulationen:*

  Hierfür existieren zwei Add-Ins, die wir im Abschn.14.6.4 kurz vorstellen.

Beispiele

4 EXCEL: Programmierung

4.1 Einführung

In EXCEL ist die *Programmiersprache* VISUAL BASIC FOR APPLICATIONS (kurz: VBA) integriert, so dass man selbst Programme schreiben bzw. VBA-Programme anderer Anbieter anwenden kann:

- Mittels der Programmiersprache VBA kann EXCEL erweitert und eigenen Erfordernissen angepasst werden, d.h. es lassen sich z.B. Funktionen erstellen, die nicht in EXCEL integriert (vordefiniert) sind.
- Wir illustrieren dies im Folgenden, indem wir in den Abschn.4.2-4.4 VBA vorstellen und in den Abschn.4.5-4.6 einen Einblick in die strukturierte Programmierung geben.

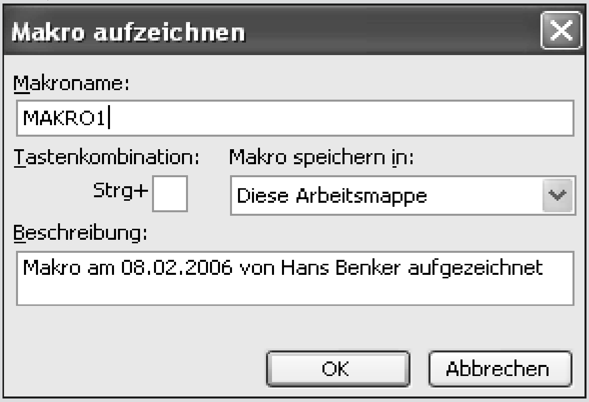
4.2 VISUAL BASIC FOR APPLICATIONS - VBA

VISUAL BASIC ist eine an BASIC orientierte Programmiersprache, die von MICROSOFT für das Betriebssystem WINDOWS entwickelt wurde.
Die in EXCEL integrierte Programmiersprache VISUAL BASIC FOR APPLICATIONS (kurz: VBA) ist eine spezielle Version von VISUAL BASIC:

- VBA wurde in EXCEL ab Version 5 integriert und ersetzt die Makrosprache früherer Versionen.
- VBA liegt für EXCEL 2003 in der Version 6.0 vor.
- VBA besitzt alle Merkmale und Konzepte moderner Programmiersprachen.
- VBA gestattet die Erstellung effektiver Programme und ist einfach zu erlernen.
- VBA ist außer in EXCEL in weiteren OFFICE-Programmen von MICROSOFT wie WORD, POWERPOINT und ACCESS und in Programmen anderer Softwarefirmen integriert.
  Damit existiert mit VBA für viele aktuelle Programmsysteme eine einheitliche Programmiersprache im Gegensatz zu früheren Versionen dieser Systeme, in die nicht kompatible sogenannte Makrosprachen integriert waren.
- Es ist jedoch zu beachten, dass z.B. ein in EXCEL erstelltes VBA-Programm nicht ohne weiteres in einem anderen OFFICE-Programm wie z.B. WORD läuft. Dies liegt daran, dass jedes OFFICE-Programm spezielle VBA-Komponenten besitzt.
- Im Unterschied zu Programmen, die in VISUAL BASIC erstellt sind, können in VBA erstellte Programme (*VBA-Programme*) nicht selbstständig in WINDOWS gestartet werden, sondern nur innerhalb eines Softwarepakets (Applikation) wie z.B. eines OFFICE-Pakets:
  - Dies liegt daran, dass VBA keine eigenständige Programmiersprache ist, sondern immer in eine andere sogenannte Applikation wie z.B. EXCEL integriert ist.

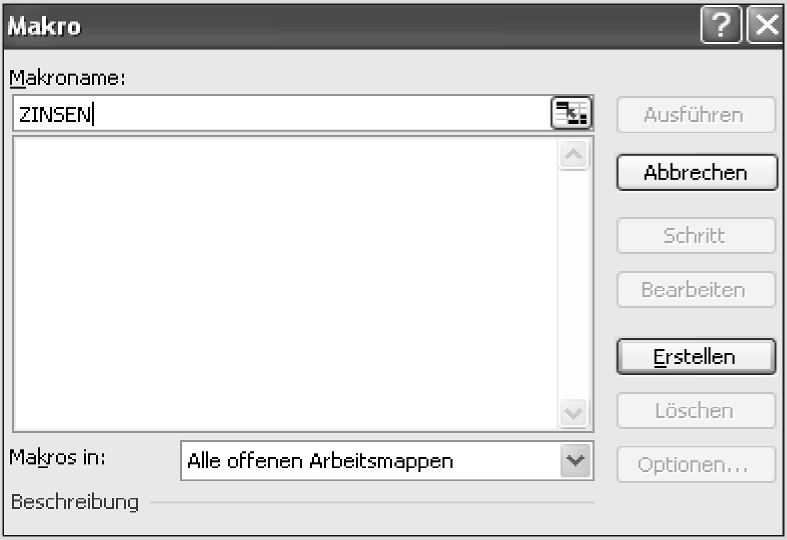
Beispiel 4.1:
Der in EXCEL integrierte *Makro-Rekorder* kann folgendermaßen eingesetzt werden:

- Durch Aktivierung der Menüfolge **Extras ⇒ Makro ⇒ Aufzeichnen** erscheint das folgende Fenster **Makro aufzeichnen**, in dem man dem Makro einen Namen (*Makronamen*) wie z.B. MAKRO1 zuweisen muss:



  - Danach klickt man auf OK und es erscheint eine Menüleiste mit deren Hilfe man die Aufzeichnung beenden kann.
  - Bis zur Beendigung werden alle Aktivitäten in der aktuellen Tabelle aufgezeichnet und können bei Bedarf später mittels des zugewiesenen Makronamen in einem Schritt ausgeführt werden.

- Das *Makro-Fenster*



  erscheint nach Aktivierung der Menüfolge **Extras ⇒ Makro ⇒ Makros**.
  In diesem Makro-Fenster wird dem Makro ein Name (z.B. ZINSEN) zugewiesen:

- Dies ist der Hauptunterschied von VBA im Vergleich zu anderen Programmiersprachen, wie auch die Bezeichnung FOR APPLICATIONS ausdrückt, dass VBA nur innerhalb einer Applikation einsetzbar ist.
- In EXCEL ist ein VBA-Programm immer Teil einer EXCEL-Arbeitsmappe und kann deshalb nicht außerhalb dieser Arbeitsmappe gespeichert, editiert oder ausgeführt werden.

Bemerkung

Wir können im Rahmen des Buches keine umfassende Darstellung von VBA geben, sondern nur Elemente der *strukturierten Programmierung* vorstellen (siehe Abschn.4.5 und 4.6), die auch als imperative oder prozedurale Programmierung bezeichnet wird und die unterste Ebene moderner Programmiersprachen und damit auch von VBA bildet:

- Mit Kenntnissen der strukturierten Programmierung ist man in der Lage, VBA-Programme zur Lösung mathematischer Aufgaben zu schreiben. So können Funktionen programmiert werden, die nicht in EXCEL integriert sind, wie z.B. für numerische Differentiation und Integration (siehe Kap.8 und 9 und Beisp.8.13 und 9.6).
- Die im Buch gegebenen Programmbeispiele können als Mustervorlagen dienen, um eigene Programme zur Lösung mathematischer Aufgaben zu erstellen.
- Wer sich ausführlicher mit VBA-Programmierung beschäftigen möchte, kann die zahlreichen Lehrbücher konsultieren (siehe Literaturverzeichnis).

♦

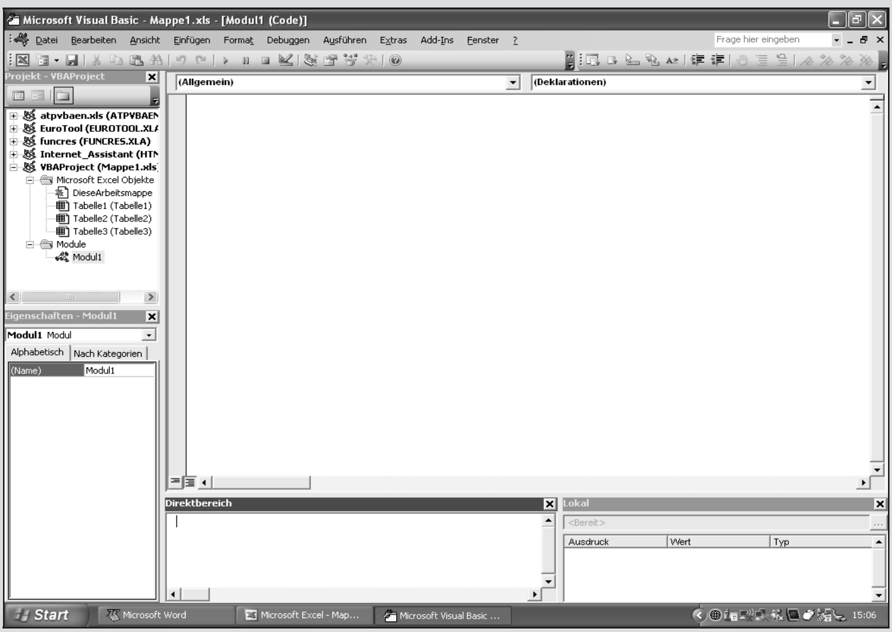
4.3 Makro-Rekorder

In Anlehnung an die mit der Makrosprache früherer Versionen von EXCEL erstellten Programme bezeichnet man VBA-Programme in EXCEL manchmal als *Makros:*

- Auch in aktuellen Versionen von EXCEL lassen sich Makros erstellen. Der in EXCEL integrierte *Makro-Rekorder* (siehe Beisp.4.1):
  - kann eine konstante Reihe von Aktionen (Befehlen) in der aktuellen Tabelle während der Eingabe aufzeichnen, die dann anschließend über den gewählten Makro-Namen als eine einzige Aktivität (Befehl) ausgeführt werden.
  - ist ein Hilfsmittel, um einfache VBA-Programme in Form von Prozeduren erstellen zu können, ohne Programmierkenntnisse zu besitzen.
  - speichert die erstellten Makros als VBA-Programme (Prozeduren), d.h. Makros und VBA-Prozeduren sind im Großen und Ganzen dasselbe.
- Da wir den Makro-Rekorder nicht anwenden, verweisen wir für weitergehende Informationen auf die Literatur.

- Durch Anklicken von *Erstellen* im Makro-Fenster erscheint die Benutzeroberfläche des VBA-Editors mit folgendem Codefenster.
- Im Codefenster hat VBA bereits Prozedurkopf und -fuß für die Prozedur ZINSEN eingetragen, so dass nur noch der erforderliche VBA-Code des Prozedurrumpfes von ZINSEN einzugeben ist (siehe Beisp.4.4b).

Beispiel 4.2:
Die *Benutzeroberfläche* des VBA-Editors von EXCEL



teilt sich von oben nach unten folgendermaßen auf:

- *Menüleiste*
  Die hier enthaltenen Menübefehle dienen zur Arbeit mit dem Editor.

4.4 VBA-Entwicklungsumgebung

VBA benötigt wie jede Programmiersprache eine *Entwicklungsumgebung*, die in den Abschn.4.4.1-4.4.3 vorgestellt wird.

4.4.1 VISUAL BASIC-EDITOR - VBE

Der VISUAL BASIC-EDITOR (Abkürzung: VBA-Editor oder VBE) ist die Entwicklungsumgebung von VBA:

- Die Bezeichnung *Editor* ist in VBA etwas irreführend, da er nicht nur ein Editor sondern eine vollständige Entwicklungsumgebung ist.
- VBA-Programme können hier erstellt (eingegeben), editiert, getestet und ausgeführt werden.
- Der Editor wird mittels der Menüfolge

  Extras ⇒ Makro ⇒ Visual Basic-Editor

  aufgerufen und erscheint nicht innerhalb von EXCEL sondern in einem eigenen Fenster mit einer Benutzeroberfläche, die im Beisp.4.2 erläutert ist.

4.4.2 Projektexplorer

Der *Projektexplorer* (siehe Beisp.4.2) des VBA-Editors dient zur Verwaltung von VBA-Programmen:

- Er zeigt alle geöffneten Arbeitsmappen (EXCEL-Dateien) sowie darin enthaltene Objekte (Tabellen) und Module als sogenannte VBA-Projekte an.
- Er verwaltet VBA-Projekte nach einem System, das dem Dateisystem von WINDOWS ähnlich ist, d.h. der Projektexplorer hat eine Struktur wie der Datei-Explorer von WINDOWS (WINDOWS-Explorer).
- Er besitzt VBA-Projekte als oberste Ebene, die sich ihrerseits aus verschiedenen Objekten (Ordnern) zusammensetzen, von denen für unsere Zwecke der Ordner **Module** benötigt wird:
  - Ein *Modul* ist eine Sammlung von Prozeduren bzw. Funktionen, die im Codefenster des VBA-Editors nach Mausklick auf das entsprechende Modul angezeigt werden.
  - Der Projektexplorer kann neue Module einfügen oder auf bereits vorhandene Module zugreifen, die erstellte VBA-Programmen enthalten:
    - ∗ Die verschiedenen Module werden mittels Modul1, Modul2, Modul3, ... fortlaufend nummeriert.
    - ∗ Das Einfügen neuer Module geschieht im Projektexplorer durch Klicken mit rechter Maustaste auf **VBAProject (Mappe...)** und Auswahl der Menüfolge **Einfügen ⇒ Modul** im erscheinenden Kontextmenü.
- Weitere Erläuterungen zum Projektexplorer findet man im Abschn.4.5.6 und Beisp.4.4.

- *Symbolleisten*
  Mittels der Menüfolge **Ansicht ⇒ Symbolleisten** kann man eine Reihe von Symbolleisten ein oder ausblenden, die sich zusätzlich individuell gestalten lassen:
  - Die einzelnen Symbole dieser Leisten werden erklärt, wenn man den Mauszeiger auf das gewünschte Symbol stellt.
  - In obiger Abbildung haben wir folgende zwei Symbolleisten unterhalb der Menüleiste von links nach rechts eingeblendet:
    * Symbolleiste *Voreinstellung*
      Diese Symbolleiste enthält häufig benötigte Funktionen für die Programmerstellung.
    * Symbolleiste *Bearbeiten*
      Diese Symbolleiste enthält Funktionen, die dabei helfen, Programmcode sicher und schnell zu bearbeiten.
- *Fenster*
  Die Programmierung vollzieht sich in folgenden Fenstern der VBA-Entwicklungsumgebung, die bis auf das Codefenster ausgeblendet werden können:
  - *Codefenster* (Quelltextfenster, Editorfenster):
    * Es nimmt den größten Teil der Benutzeroberfläche ein.
    * Es ist das wichtigste Fenster für den Programmierer, da es zur Eingabe des VBA-Programms (VBA-Quellcodes, VBA-Programmcodes) dient.
    * Es ist beim Starten des VBA-Editors nicht geöffnet und kann auf verschiedene Arten geöffnet werden:
      So z.B. im Projektexplorer durch Klicken mit der rechten Maustaste auf **VBA-Project (Mappe1)** und Auswahl der Menüfolge **Einfügen ⇒ Modul**.
  - *Fenster des Projektexplorers* (Projektfenster):
    Dieses Fenster kann mittels der Menüfolge
    Ansicht ⇒ Projekt-Explorer
    eingeblendet werden, falls es nicht in der Benutzeroberfläche des VBA-Editors erscheint. Im Projektexplorer werden alle geöffneten Arbeitsmappen sowie darin enthaltene Objekte (Tabellen) und Module angezeigt.
  - *Eigenschaftenfenster*
    Es liegt direkt unterhalb des Projektfensters. Hier werden Eigenschaften für das im Projektexplorer markierte Objekt angezeigt.
  - *Direktfenster*
    Hier kann man Anweisungen testen und Werte ausgeben, die man zur Kontrolle des VBA-Programms benötigt.
  - *Lokalfenster*
    Hier kann man sich Variableninhalte und -typen anzeigen lassen.

Beispiele

4.4.3 VBA-Hilfe

Die *VBA-Hilfe* gibt nicht nur Hilfen zu Anweisungen, integrierten Funktionen und Schlüsselwörtern, sondern auch Informationen zu zahlreichen anderen Themen der VBA-Programmierung:

- Diese Hilfe kann man im VBA-Editor aufrufen, wie im Beisp.4.3 illustriert ist.
- Da wir nur eine Einführung in VBA geben können, empfehlen wir bei tiefergehenden Fragen, zuerst die ausführlichen Hilfefunktionen von VBA heranzuziehen, ehe spezielle VBA-Lehrbücher konsultiert werden.

4.5 VBA-Programme

4.5.1 Einführung

Wir beschreiben im Folgenden die Erstellung von Programmen mittels VBA (*VBA-Programmen*) im Rahmen der *strukturierte Programmierung*. Diese Art der Programmierung bezeichnet man auch als *imperative* oder *prozedurale Programmierung:*

- In der strukturierten Programmierung erstellte Programme unterteilen sich in *Prozeduren* und *Funktionen* (*Funktionsprogramme*), die wir im Abschn.4.5.3 bzw. 4.5.4 vorstellen.
- Da bei der Programmierung häufig Fehler auftreten, gehen wir auf diese Problematik im Abschn.4.5.5 ein.
- Die Vorgehensweise, konkrete Programme zu erstellen, auszuführen und zu testen, beschreiben wir im Abschn.4.5.6 und 4.5.7.
- Im Abschn.4.6 stellen wir die im Rahmen der strukturierten Programmierung benötigten Programmierelemente von VBA vor:
  - Zahlen
  - Zeichenfolgen
  - Konstanten und Variablen
  - Felder
  - Operatoren
  - Ausdrücke
  - Zuweisungen
  - Integrierte Funktionen
  - Ein- und Ausgaben
  - Verzweigungen - Bedingte Anweisungen
  - Schleifen

Beispiel 4.3:
Die *Hilfe* für VBA wird in der Benutzeroberfläche des VISUAL BASIC-EDITORS (siehe Beisp.4.2) in Menü- oder Symbolleiste mittels des Fragezeichens

? bzw. 

aufgerufen und es erscheint ein Fenster, mit dem man sich benötigte Informationen anzeigen lassen kann:

- Bei **Suchen** kann ein Suchbegriff eingegeben werden.
- Im **Inhaltsverzeichnis** werden alle Hilfethemen angezeigt, wobei es sich um Hyperlinks handelt, die zu anderen Verzeichnisebenen führen oder in einem erscheinenden Fenster das gewählte Hilfethema anzeigen.
- Weiterhin kann man sich mittels der Menüfolge

  ? ⇒ Microsoft Visual Basic-Info...

  die auf dem Computer installierte Version von VBA anzeigen lassen, wie aus folgender Abbildung ersichtlich ist:

Beispiel 4.4:
Illustrieren wir die VBA-Programmierung, indem wir die Zinseszinsformel (siehe Abschn. 13.2.2) als *Funktionsprogramm* (*Funktion*) bzw. *Prozedur* ZINSEN schreiben, um berechnen zu können, wie ein bei einer Bank eingezahltes Anfangskapital K0 bei einem Zinsfuß von p% (pro Jahr) nach einer Laufzeit von N Jahren angewachsen ist.

a) Bei der Programmierung als Funktion ZINSEN sind folgende Schritte erforderlich:
   I. Zuerst wird in EXCEL der VBA-Editor geöffnet.
   II. Danach öffnen wir in der erscheinenden Benutzeroberfläche des VBA-Editors das Codefenster, indem wir im Projektexplorer mit der rechten Maustaste auf **VBAProject (Mappe1)** klicken und im erscheinenden Kontextmenü die Menüfolge **Einfügen ⇒ Modul** auswählen. Damit wird das zu erstellende Funktionsprogramm ZINSEN in einem Modul eingefügt, wobei das erste Modul von VBA mit Modul1 bezeichnet wird.

Bemerkung

Anstatt von *VBA-Programmen* spricht man auch vom *VBA-Quellcode* oder *VBA-Programmcode* oder kurz *VBA-Code*.

♦

4.5.2 Deklarationen und Anweisungen

Mittels strukturierter Programmierung erstellte VBA-Programme (*strukturierte Programme*) in Form von Prozeduren und Funktionen bestehen aus Folgen von *Deklarationen* (Vereinbarungen) und *Anweisungen* (Befehlen):

- VBA kennt verschiedene Datentypen für Variablen:
  - Für alle in einem Programm verwendeten Variablen können entsprechende Datentypen deklariert (vereinbart), d.h. *Deklarationen* vorgenommen werden, die als *Variablendeklarationen* oder *Typdeklarationen* (*Typvereinbarungen*) bezeichnet werden.
  - *Deklarationen* geschehen im Rahmen von *Dimensionsanweisungen*, die mittels des Schlüsselworts **Dim** zu erstellen sind, wobei hinter das weitere Schlüsselwort **As** der Datentyp zu schreiben ist. Wir illustrieren dies im Abschn.4.6.4 und Beisp.4.6.
- Es kommen die Sprachelemente einfache (elementare) Anweisungen und Steueranweisungen (Kontrollstrukturen) zum Einsatz, die unter Verwendung von Schlüsselwörtern gebildet werden:
  - *Einfache Anweisungen*
    sind Anweisungen für Eingabe, Verarbeitung und Ausgabe von Daten.
  - *Steueranweisungen* (*Kontrollstrukturen*)
    sind Verzweigungen (bedingte Anweisungen, Bedingungen) und Schleifen.
  - *Schlüsselwörter*
    sind reservierte Worte in VBA, die zur Bezeichnung von Prozeduren, Funktionen und Anweisungen (Befehlen) verwendet werden und in ihrer Gesamtheit die Programmiersprache VBA repräsentieren:
    - ∗ Man kann alle Schlüsselwörter in Kleinbuchstaben schreiben. Sie werden anschließend automatisch von VBA in die erforderliche Syntax umgewandelt.
    - ∗ Schlüsselworte dürfen nicht als Namen von Variablen oder Prozeduren verwendet werden.
    - ∗ Schlüsselworte werden in VBA zur Unterscheidung in blauer Schrift und im Rahmen des Buches im Fettdruck dargestellt. Falls sie VBA nicht blau darstellt, kann man dies mittels der Menüfolge **Extras** ⇒ **Optionen** in der Registerkarte **Editorformat** des erscheinenden Dialogfeldes **Optionen** bei *Schlüsselworttext* einstellen.

III. In das geöffnete Codefenster wird die Zinseszinsformel in der Form

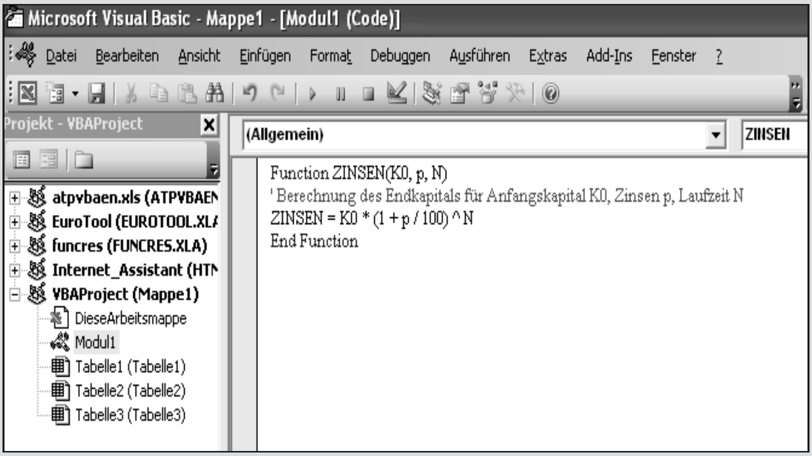
Function ZINSEN (K0 , p , N)

' Berechnung des Endkapitals für Anfangskapital K0, Zinsfuß p, Laufzeit N

ZINSEN = K0 * (1 + p/100) ^ N

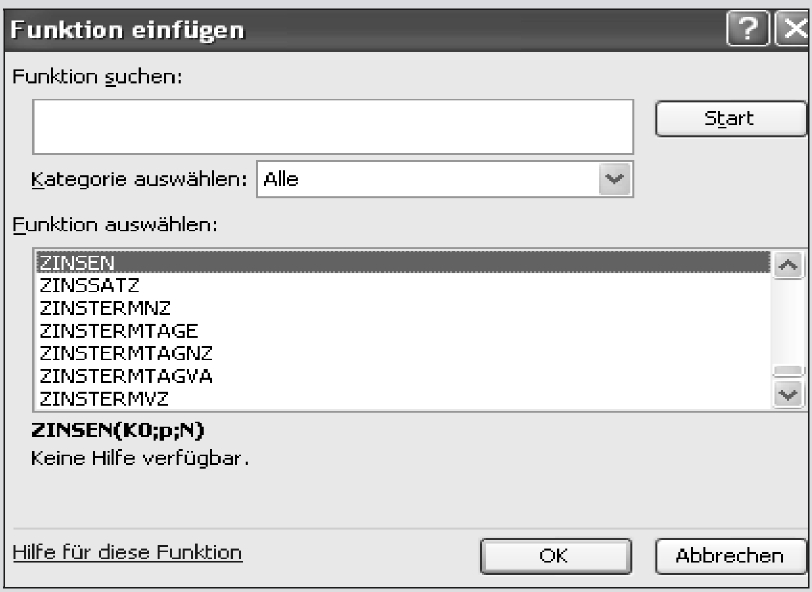
End Function

als Funktionsprogramm ZINSEN eingegeben:



IV. Nach Speicherung ist die Funktion ZINSEN bei späterem Einsätzen von EXCEL anwendbar:

- z.B. über das Dialogfeld **Funktion einfügen** des Funktions-Assistenten:



4.5.3 Prozeduren

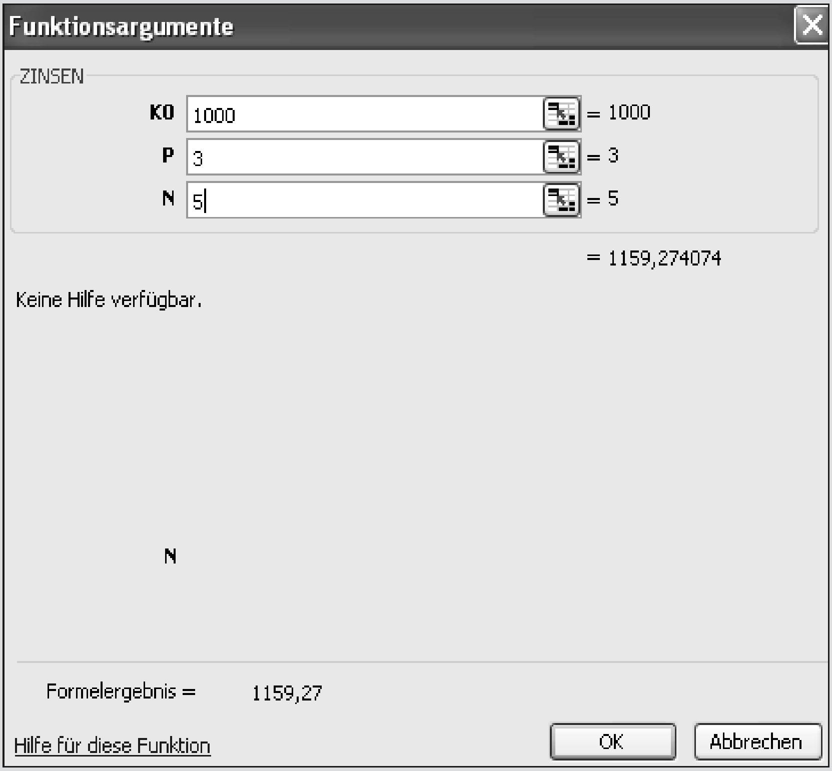
Prozeduren (Unterprogramme) werden in VBA als *VBA-Prozeduren* bezeichnet:

- Prozeduren bestehen wie in allen Programmiersprachen aus einer *Folge* von *Anweisungen* (Befehlen), die mittels VBA-Schlüsselwörtern gebildet und nacheinander ausgeführt werden.
- Prozeduren können vor den Anweisungen eventuell erforderliche *Deklarationen* (in Form von Dimensionsanweisungen) für den Datentyp verwendeter Variablen enthalten (siehe Abschn.4.6.4).
- Prozeduren besitzen die *Struktur:*

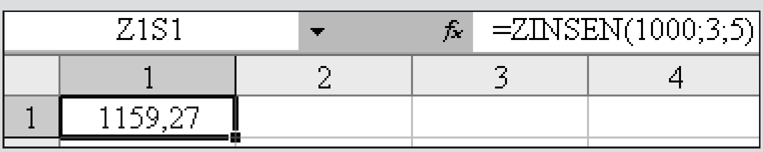
Sub NAME()	} *Prozedurkopf*
Dimensionsanweisungen Folge von Anweisungen	} *Prozedurrumpf*
End Sub	} Pr*ozedurfuß*

- Prozeduren sind folgendermaßen *charakterisiert:*
  - Prozeduren sind in die beiden Schlüsselwörter **Sub** und **End Sub** eingeschlossen, die den *Prozedurkop*f bzw. *Prozedurrump*f bilden. Nach **Sub** ist ein Prozedurname NAME festzulegen.
  - Die Klammern () für die Argumentenliste (Parameterliste) (siehe Abschn.4.5.4) hinter NAME werden von VBA automatisch gesetzt. Eine Argumentenliste ist im Unterschied zu Funktionen nur für diejenigen Prozeduren möglich, die aus anderen Prozeduren aufgerufen werden.
  - Zwischen Prozedurkopf und Prozedurrumpf werden zuerst die Dimensionsanweisungen und anschließend die erforderlichen Anweisungen (Befehle) geschrieben.
  - Während Dimensionsanweisungen in Prozeduren für mehrere Variablen in eine Zeile des Codefensters geschrieben werden können, schreibt man pro Zeile nur eine Anweisung. Deshalb sind bei aufeinanderfolgenden Anweisungen (Anweisungsfolgen) keine Trennzeichen erforderlich.
  - Prozeduren können in jeder beliebigen Zeile *erläuternden Text* (*Kommentare*) enthalten:
    - ∗ Er ist durch Hochkomma ' zu kennzeichnen.
    - ∗ Es ist zu beachten, dass in einer Zeile der Text allein oder nach einer Anweisung steht. Steht Text vor einer Anweisung, so wird die gesamte Zeile als Text interpretiert und die Anweisung nicht ausgeführt.
  - Prozeduren können auf folgende Arten aufgerufen (gestartet) werden:
    - ∗ Im Tabellenblatt von EXCEL mittels der Menüfolge
      Extras ⇒ Makro ⇒ Makros

- Durch Markierung von ZINSEN im Dialogfeld **Funktion einfügen** und abschließendem Anklicken von OK erscheint folgendes Dialogfeld **Funktionsargumente**, in das die für ZINSEN benötigten konkreten Werte für die Argumente einzugeben sind, wobei wir als Anfangskapital K0 = 1000 Euro, Zinsfuß p = 3% und Laufzeit N = 5 Jahre gewählt haben:



- Durch abschließendes Anklicken von OK wird das von der Funktion ZINSEN berechnete Endkapital 1159,27 Euro in der aktiven Zelle (z.B. Z1S1) ausgegeben, wie aus dem Tabellenausschnitt zu sehen ist:



- Man kann die programmierte Funktion ZINSEN auch ohne Anwendung des Funktions-Assistenten direkt mittels Tastatur in die aktive Zelle als Formel
  =ZINSEN(1000;3;5)
  eingeben.

Beispiele

indem im erscheinenden Dialogfeld **Makro** die gewünschte Prozedur ausgewählt und abschließend die Schaltfläche **Ausführen** angeklickt wird.

* In der Benutzeroberfläche des VBA-Editors gibt es mehrere Möglichkeiten, wie
  - Anklicken der gewünschten Prozedur im Codefenster und abschließender Aktivierung der Menüfolge
    Ausführen ⇒ Sub/UserForm ausführen
  - Anklicken der gewünschten Prozedur im Codefenster und abschließender Betätigung der Taste F5 .

Bemerkung

Zur Lösung mathematischer Aufgaben benötigt man meistens Funktionen (siehe Abschn. 4.5.4) als Sonderfall von Prozeduren.
Bei Bedarf kann man eine Funktion auch in Form einer Prozedur programmieren, wie im Beisp.4.4b illustriert ist.

♦

4.5.4 Funktionen

Funktionsprogramme (kurz: *Funktionen*) sind in VBA spezielle Prozeduren und werden als *VBA-Funktionen* bezeichnet:

- VBA-Funktionen besitzen die *Struktur:*

  Function NAME (*Argumentenliste*) **As ...**
  Dimensionsanweisungen
  Anweisungen
  NAME =...
  End Function

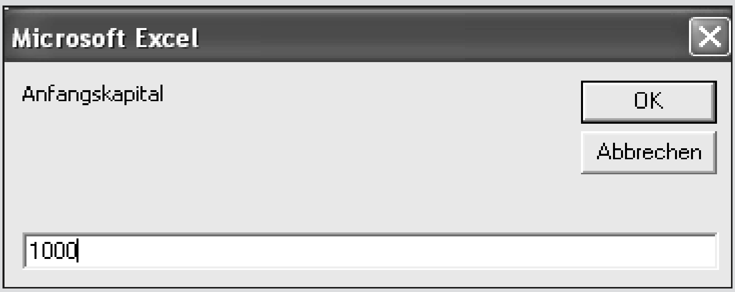
- VBA-Funktionen sind folgendermaßen *charakterisiert:*
  - Funktionen werden durch die beiden *Schlüsselwörter* **Function** und **End Function** eingeschlossen.
    * Nach **Function** ist ein Funktionsname NAME festzulegen.
    * Die Klammern () für die Argumentenliste (Parameterliste) hinter NAME werden von VBA automatisch gesetzt.
  - Dem Funktionsnamen NAME ist innerhalb der Anweisungen ein Wert (z.B. Zahlenwert) zuzuweisen:
    * Sein Datentyp kann zu Beginn hinter **As** deklariert werden.
    * Der zugewiesene Wert liefert das von der Funktion berechnete Ergebnis und wird beim Aufruf der Funktion in der entsprechenden Zelle angezeigt.
  - Funktionen können Argumente (Parameter) in der *Argumentenliste* (Parameterliste) enthalten, die sich an den Namen anschließt, in runde Klammern eingeschlossen ist und die Gestalt

b) Bei der Programmierung als Prozedur ZINSEN sind die gleichen Schritte I und II wie im Beisp.4.4a durchzuführen. Danach geben wir im Schritt III folgenden VBA-Code in das Codefenster ein:

```
Sub ZINSEN()
K0 = InputBox ( "Anfangskapital" )
p = InputBox ( "Zinsen" )
N = InputBox ( "Laufzeit" )
KN = K0 * (1 + p / 100) ^ N
MsgBox ( "Endkapital=" & KN )
End Sub
```

Die so erstellte Prozedur ZINSEN ist folgendermaßen einzusetzen:

- Die benötigten Grössen K0, p und N werden mittels des Schlüsselworts **InputBox** eingegeben, d.h. nach dem Start der Prozedur ZINSEN erscheinen folgende drei Eingabefenster, in die konkrete Werte wie z.B. K0 = 1000, p = 3, N = 5 mittels Tastatur einzugeben und jeweils durch Anklicken von OK zu bestätigen sind:



(Argument1 **As...** , Argument2 **As...** , ...) hat:

  * Hinter jedem Argument kann das Schlüsselwort **As** auftreten, mit dem sein Datentyp deklariert wird.
  * Die einzelnen Argumente sind durch Kommas zu trennen.
  * Beim Aufruf von Funktionen in einer EXCEL-Tabelle müssen für die Argumente konkrete Werte in die Argumentenliste eingesetzt werden, wobei jetzt die einzelnen Werte durch Semikolon zu trennen sind.

- Alle innerhalb von Funktionen verwandten Variablen können zu Beginn, d.h. vor den Anweisungen, in Dimensionsanweisungen vereinbart (deklariert) werden, wie im Beisp.4.12a1 illustriert ist. Derartige Deklarationen werden empfohlen, da sie die Effektivität von Funktionsprogrammen erhöhen (siehe Abschn. 4.6.4).

4.5.5 Programmierfehler

Bei der Programmierung mittels VBA lassen sich Programmierfehler ebenso wie bei Anwendung anderer Programmiersprachen nicht vermeiden. Man unterscheidet zwei Arten von *Programmierfehlern:*

- *Syntaxfehler* (syntaktische Fehler)

  Hierunter versteht man Fehler, die gegen die Regeln (Syntax) der Programmiersprache verstoßen:

  - Typische Syntaxfehler sind falsche Schreibweise von Schlüsselwörtern, Fehlen von Klammern und Textanführungsstrichen.
  - Syntaxfehler werden in vielen Fällen von VBA richtig erkannt.

- *logische Fehler*

  Hierunter versteht man Fehler, die gegen die Logik des zu erstellenden Programms verstoßen:

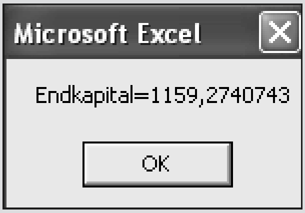
  - Bei Mathematikprogrammen treten logische Fehler auf, wenn zugrundeliegende Algorithmen fehlerhaft in ein VBA-Programm umgesetzt werden.
  - Programme mit logischen Fehlern liefern i.Allg. keine brauchbaren Ergebnisse bzw. werden nicht beendet.
  - Typische logische Fehler sind *Division durch Null* und sogenannte *Endlosschleifen* (siehe Abschn.4.6.12).

Bemerkung

Während das Finden von Syntaxfehlern weniger Schwierigkeiten bereitet, bildet das Aufspüren logischer Fehler eine komplizierte Problematik (siehe Abschn.4.5.7).

♦

- Nach Eingabe von Laufzeit und Anklicken von OK gibt VBA mittels der **MsgBox** das berechnete Ergebnis im folgenden Meldungsfenster aus:



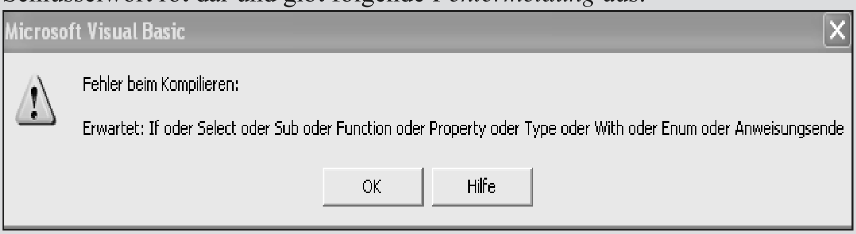
Beispiel 4.5:

Betrachten wir die *Fehlerproblematik* beim Programmieren, indem wir in das einfache Funktionsprogramm aus Beisp.4.4a *syntaktische* und *logische Fehler* einfügen und die Reaktionen von VBA beobachten:

- In folgender Programmvariante ist das Schlüsselwort **Function** nach dem Schlüsselwort **End** syntaktisch falsch geschrieben:

  Function ZINSEN (K0 , p , N)
  ZINSEN = K0 * (1 + p/100) ^ N
  End Funtion

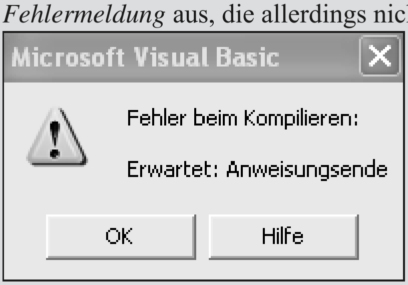
  VBA erkennt den *syntaktischen Fehler*, stellt die Zeile mit dem falsch geschriebenen Schlüsselwort rot dar und gibt folgende *Fehlermeldung* aus:



- In folgender Programmvariante sind alle Schlüsselwörter syntaktisch richtig geschrieben, aber in der Berechnungsformel fehlt der Potenzoperator ^:

  Function ZINSEN (K0 , p , N)
  ZINSEN= K0 * (1 + p/100) N
  End Function

  VBA erkennt den *syntaktischen Fehler*, stellt die Formel rot dar und gibt folgende *Fehlermeldung* aus, die allerdings nicht die genaue Fehlerquelle enthält:



4.5.6 Programme erstellen und ausführen

Um ein Programm erstellen und ausführen zu können, ist folgende Vorgehensweise erforderlich:

- Nach dem Start des VBA-Editors mittels der Menüfolge

  Extras ⇒ Makro ⇒ Visual Basic-Editor

  ist in der erscheinenden Benutzeroberfläche ein *Codefenster* zu öffnen:
  - Man klickt im *Projektexplorer* des VBA-Editors mit der rechten Maustaste auf **VBAProject (Mappe...)** und wählt im erscheinenden Kontextmenü die Menüfolge **Einfügen ⇒ Modul** aus. Hierdurch wird das zu erstellende Programm einem *Modul* der gewählten **Mappe** (Arbeitsmappe) zugeordnet und ein *Codefenster geöffnet* (siehe Beisp.4.4).
  - Im geöffneten *Codefenster* (siehe Beisp.4.2 und 4.4) kann anschließend das zu erstellende Programm (Prozedur oder Funktion) eingegeben werden, indem nach eventueller Deklaration benötigter Variablen (d.h. Dimensionsanweisungen) die erforderlichen Anweisungen geschrieben werden.
  - Wenn man mehrere Programme erstellen möchte, so kann man sie alle innerhalb eines Moduls in das Codefenster schreiben. Es ist jedoch auch möglich, mittels der Menüfolge **Einfügen ⇒ Modul** weitere Module in der ausgewählten Arbeitsmappe zu öffnen und jedes einzelne Programm in einem gesonderten Modul zu speichern. VBA nummeriert bei dieser Vorgehensweise die einzelnen Module fortlaufend mit Modul1, Modul2, Modul3, ...
- Um erstellte VBA-Programme im Rahmen von EXCEL ausführen zu können, ist Folgendes erforderlich:
  - Wenn ein *Funktionsprogramm* in einem Modul der aktuellen Mappe vorhanden ist, kann die damit definierte Funktion in allen Tabellenblättern der Mappe angewandt werden:
    Man findet die Funktion jetzt unter dem entsprechenden Namen im Dialogfeld **Funktion einfügen** des *Funktions-Assistenten* von EXCEL, wie im Beisp.4.4 zu sehen ist.
  - Möchte man erstellte Programme später erneut anwenden, so ist folgendermaßen vorzugehen:
    * Diejenige Mappe von EXCEL, in deren Modulen sich die Programme befinden, ist als Datei mit der Endung **.**XLS zu speichern.
    * Eine erneute Anwendung der Programme muss in der Mappe geschehen, in der die Programme gespeichert sind, d.h. diese Mappe ist vor Einsatz der Programme auf die übliche Art zu öffnen.

Bemerkung

Konkrete Programme zur Lösung mathematischer Aufgaben findet man in den Beisp.4.4, 4.11, 4.12, 8.13, 9.6, 11.7, 14.1, 14.10. Sie können als Muster für erste Programmversuche herangezogen werden. ♦

- In der Programmvariante

  Function ZINSEN (K0 , p , N)

  ZINSEN = K0 * (1 + p/100) * N

  End Function

  ist der *logische Fehler* enthalten, dass anstatt des Potenzoperators der Multiplikationsoperator geschrieben wurde:

  - Diesen logischen Fehler kann VBA nicht erkennen, da alles syntaktisch richtig geschrieben ist.
  - Logische Fehler lassen sich z.B. durch Testbeispiele oder im konkreten Fall aufgrund der Einfachheit des Programms durch gründliche Durchsicht aufspüren.

Beispiel 4.6:

Betrachten wir einige Beispiele für die *Deklaration* (Vereinbarungen, Typvereinbarung) von Konstanten, Variablen und Feldern:

- Deklarationen sind nicht zwingend erforderlich, aber aus Effektivitätsgründen zu empfehlen.
- Deklarationen werden in *Dimensionsanweisungen* mittels der Schlüsselworte **Const** bzw. **Dim** und **As** durchgeführt, wobei nach **Const** bzw. **Dim** mehrere Deklarationen möglich sind:
  - **Const** a **As Double** = 3.14159265358979, b **As Integer** = 1

    Hierdurch werden a und b als Konstanten deklariert, wobei a ein Näherungswert der Zahl π als Gleitkommazahl mit doppelter Genauigkeit (16 Stellen) und der Konstanten b die ganze Zahl 1 zugewiesen werden.
  - **Dim** v **As Integer**, w **As Double**, x **As Boolean**, y

    Hierdurch werden die Variablen v als Datentyp **Integer** (ganze Zahl), w als Datentyp **Double** (Gleitkommazahl mit 16 Stellen) und x als Datentyp **Boolean** (logisch mit Wahrheitswerten WAHR oder FALSCH) deklariert. Die Variable y erhält von VBA den Datentyp **Variant**, da für sie keine konkrete Deklaration vorliegt.
  - **Dim** u(10) **As Double**, B(9,14) **As Single**

    Hierdurch werden **u** als *eindimensionales Feld* (Vektor) mit 11 Elementen in Form von Gleitkommazahlen mit 16 Stellen und **B** als *zweidimensionales Feld* (Matrix) mit 150 Elementen in Form von Gleitkommazahlen mit 8 Stellen deklariert, da VBA von Null an indiziert.

Beispiel 4.7:

Betrachten wir Beispiele für die beiden in VBA vorhandenen Operatoren **** und MOD, die Ganzzahldivision bzw. Modulo-Division bewirken:

a) Der *Ganzzahldivisions-Operator* **** wird in folgender Form angewandt:

   Operand1 **** *Operand2* (*Operand1* , *Operand2* - Zahlen)

4.5.7 Programme testen

Da beim Programmieren auch *Fehler* auftreten können, wie im Abschn.4.5.5 beschrieben ist, empfiehlt sich vor Anwendungen eines Programms, eine Reihe von Tests (*Programmtests*) durchzuführen, um enthaltene Fehler aufzuspüren:

- *Syntaxfehler* sind weniger problematisch, da sie i.Allg. vor dem Programmstart von VBA erkannt und angezeigt werden (siehe Beisp.4.5).
- *Logische Fehler* erkennt VBA bis auf wenige Ausnahmen (wie z.B. Division durch Null) nicht. Sie müssen vom Programmierer selbst aufgespürt werden:
  - Sie werden erst nach dem Programmstart wirksam und sind besonders bei umfangreichen Programmen schwierig zu finden.
  - Man erkennt sie meistens daran, dass das erstellte Programm nicht die gewünschten Ergebnisse bzw. keine Ergebnisse liefert oder nicht beendet wird (siehe Beisp.4.5).
  - Zum Suchen *logischer Fehler* gibt es eine Reihe von Vorgehensweisen (Teststrategien), so u.a. durch die Berechnung von Testbeispielen, wozu VBA einige Hilfsmittel zur Verfügung stellt, wie z.B. den integrierten *Debugger*. Man spricht auch vom Testen des Programms. Wir können hierauf nicht näher eingehen und verweisen auf die Literatur.
  - Für überschaubare Programme (wie die im Buch gegebenen) bilden logische Fehler kein Problem, da sich diese Programme durch einfache Testrechnungen bzw. gründliche Durchsicht überprüfen lassen.

4.6 Elemente der strukturierten Programmierung

Im Folgenden besprechen wir Programmierelemente von VBA, die im Rahmen der *strukturierten Programmierung* zum Einsatz kommen.

4.6.1 Zahlen

VBA kennt eine Reihe von Zahlenformaten für Dezimalzahlen, die in VBA als Gleitkommazahlen bezeichnet werden:

- Zahlenformate können in Dimensionsanweisungen festgelegt werden, wie im Beisp.4.6 illustriert ist.
- Des Weiteren sind Funktionen zur Verarbeitung von Zahlen in VBA integriert, über die man in der VBA-Hilfe ausführliche Informationen erhält, wenn man als Suchbegriff *Zahl* bzw. *Gleitkommazahl* eingibt.
- Während Gleitkommazahlen in VBA-Programmen mit Punkt (Dezimalpunkt) geschrieben werden, sind sie in EXCEL-Tabellen mit Komma (Dezimalkomma) zu schreiben.

4.6.2 Zeichenfolgen

Zeichenketten werden in VBA als *Zeichenfolgen* bezeichnet, müssen zwischen Hochkommas " " eingeschlossen werden und sind folgendermaßen charakterisiert:

- Er liefert als Ergebnis eine ganze Zahl, die ohne Rest angibt, wie oft sich die Zahl *Operand1* durch die Zahl *Operand2* teilen (dividieren) lässt.
- Es ist zu beachten, dass beide Operanden vorher auf ganze Zahlen auf- bzw. abgerundet werden.
- Man erhält z.B. Folgendes:
  * 5 \ 2 = 2 , 3,6 \ 1,2 = 4 , 1 \ 3 = 0 , 0,6 \ 0,9 = 1
  * 1 \ 0,5 liefert kein Ergebnis, da 0,5 auf 0 gerundet wird und somit als Fehler *Division durch Null* auftritt.
- Man kann sich die *Ganzzahldivision* in VBA durch folgendes Funktionsprogramm GANZDIV berechnen lassen:

  Function GANZDIV (a , b)

  GANZDIV = a \ b

  End Function

b) Der *Modulo-Operator* (Rest-Operator) MOD ist das Gegenstück zum Ganzzahldivisions-Operator **** :

- Mit ihm kann man ermitteln, wie groß der Rest ist, der sich nach einer Ganzzahldivision ergibt.
- Er wird in folgender Form angewandt:

  Operand1 MOD *Operand2* (*Operand1*, *Operand2* - Zahlen)
- Man erhält z.B. Folgendes:

  4 MOD 2 = 0 , 1 MOD 3 = 1 , 4,8 MOD 1,6 = 1 , 4,8 MOD 1,4 = 0
- Man kann sich die *Modulo-Division* in VBA durch folgendes Funktionsprogramm MODULO berechnen lassen:

  Function MODULO (a , b)

  MODULO = a MOD b

  End Function

Beispiel 4.8:

Betrachten wir einige Beispiele für *Ausdrücke:*

- *Arithmetische Ausdrücke*

  Arithmetische Ausdrücke werden aus Operanden (Konstanten, Variablen, mathematischen Funktionen) und arithmetischen Operatoren gebildet und liefern Zahlen als konkrete Ergebnisse:
  - Im Gegensatz zur mathematischen Schreibweise sind arithmetische *Ausdrücke* in VBA wie in den meisten Programmiersprachen *streng linear* zu schreiben.
  - So ist z.B. die rechte Seite der aus der Finanzmathematik bekannten Zinseszinsformel (siehe Beisp.4.4 und Abschn.13.2.2)

$$K_N = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^N$$

- Zeichenfolgen können aus einer Folge von Buchstaben, Ziffern und Sonderzeichen bestehen.
- Werden Zeichenfolgen einer Variablen zugewiesen, so muss diese vom Datentyp **Variant** oder **String** sein, wie im Abschn.4.6.4 zu sehen ist.
- Für Zeichenfolgen kennt VBA Verknüpfungsoperatoren (siehe Abschn.4.6.6) und eine Reihe von Funktionen zu ihrer Bearbeitung, die man aus der VBA-Hilfe entnehmen kann, wenn man als Suchbegriff *Zeichenfolge* eingibt.
- Zeichenfolgen benötigt man z.B. dann, wenn Informationen im Textformat bearbeitet oder ausgegeben werden, so zur Ausgabe von Hinweisen und Fehlermeldungen (siehe Beisp.4.11c und 4.12c)
- Zeichenfolgen sind nicht mit erläuterndem Text (siehe Abschn.4.5.3) innerhalb eines VBA-Programms zu verwechseln, der durch Hochkomma gekennzeichnet ist.

4.6.3 Konstanten

Analog wie in der Mathematik sind *Konstanten* in VBA feste (konstante) Größen, deren Wert einmal zugewiesen wird und bei Rechnungen nicht mehr veränderbar ist. Sie sind folgendermaßen charakterisiert:

- Konstanten werden durch Namen gekennzeichnet (*Konstantennamen*), die nach den gleichen Regeln wie bei Variablen zu bilden sind (siehe Abschn.4.6.4).
- Konstanten sind mittels des Schlüsselworts **Const** zu deklarieren (vereinbaren):

  Const *Konstantenname* **As Datentyp** = *Wert*,

  d.h. der Konstanten *Konstantenname* wird innerhalb der Deklaration bereits der feste *Wert* zugewiesen, wobei die gleichen *Datentypen* wie bei Variablen auftreten (siehe Beisp.4.6).

4.6.4 Variablen

Analog wie in der Mathematik sind *Variablen* in VBA veränderliche Größen, denen man im Verlauf des Programms verschiedene Werte zuweisen und mit denen gerechnet werden kann. Sie sind folgendermaßen *charakterisiert:*

- Variablen werden durch Namen gekennzeichnet (*Variablennamen*), die in VBA mit einem Buchstaben beginnen und bis zu 255 Zeichen enthalten dürfen:
  - Man unterscheidet nicht zwischen Groß- und Kleinschreibung.
  - Als Zeichen sind außer Buchstaben auch Zahlen, aber keine Leerzeichen, Punkte oder andere Sonderzeichen erlaubt.
  - Schlüsselwörter von VBA sind nicht als Variablennamen zu verwenden.
- Für Variablen kennt VBA verschiedene *Datentypen* wie Zahlen (ganze Zahlen, Gleitkommazahlen), Text (Zeichenfolgen) und logische Werte (Wahrheitswerte), die deklariert (vereinbart) werden können aber nicht müssen.
- *Deklarationen* von Variablen gestalten sich folgendermaßen:

ein arithmetischer Ausdruck und in VBA in der Form K0 * (1 + p / 100) ^ N zu schreiben.

- *Vergleichsausdrücke*
  Vergleichsausdrücke (als spezielle logische Ausdrücke) sind wie arithmetische Ausdrücke aus Operanden und Operatoren aufgebaut und liefern als Ergebnisse einen der logischen Wahrheitswerte WAHR oder FALSCH, die vom Datentyp **Boolean** sind:
  - Als Operatoren treten *Vergleichsoperatoren* auf.
  - So liefern z.B. folgende konkrete Vergleichsausdrücke die in Klammern angegebenen logischen Wahrheitswerte:
    $1 < 2$ (WAHR) , $1 \geq 2$ (FALSCH) , $1 = 2$ (FALSCH)
- *Logische Ausdrücke*
  Logische Ausdrücke sind wie arithmetische Ausdrücke aus Operanden und Operatoren aufgebaut und liefern als Ergebnisse einen der logischen Wahrheitswerte WAHR oder FALSCH, die vom Datentyp **Boolean** sind:
  - Logische Ausdrücke werden häufig durch Vergleichsausdrücke gebildet, d.h. *Vergleichsausdrücke* sind spezielle logische Ausdrücke.
  - Zusätzlich können in logischen Ausdrücken die im Abschn.4.6.6 beschriebenen *logischen Operatoren* auftreten.
  - So liefern z.B. folgende konkrete logische Ausdrücke die in Klammern angegebenen logischen Wahrheitswerte:
    $1 \geq 2$ OR $5 < 6$ (WAHR) , $2 < 4$ AND NOT $3 \leq 7$ (FALSCH)

Beispiel 4.9:
Betrachten wir typische *Zuweisungen* an Variable wie z.B. v, u bzw. w:

- v = 3.25 (Zuweisung einer Dezimalzahl)
- u = K0 * (1 + p/100) ^ N (Zuweisung eines arithmetischen Ausdrucks)
- w = 2 < 4 AND NOT 3 ≤ 7 (Zuweisung eines logischen Ausdrucks)

Beispiel 4.10:
Wenn man in der Hilfe des VBA-Editors den Begriff *Funktionen* eingibt, so werden alle in VBA integrierten (vordefinierten) Funktionen angezeigt:

- Die für unsere Zwecke wichtigen *mathematischen Funktionen* sind in folgender Abbildung zu sehen.
- Unter der Bezeichnung *Abgeleitete mathematische Funktionen* kann man sich anzeigen lassen, welche weiteren mathematischen Funktionen sich aus den in VBA integrierten Funktionen bilden (herleiten) lassen.

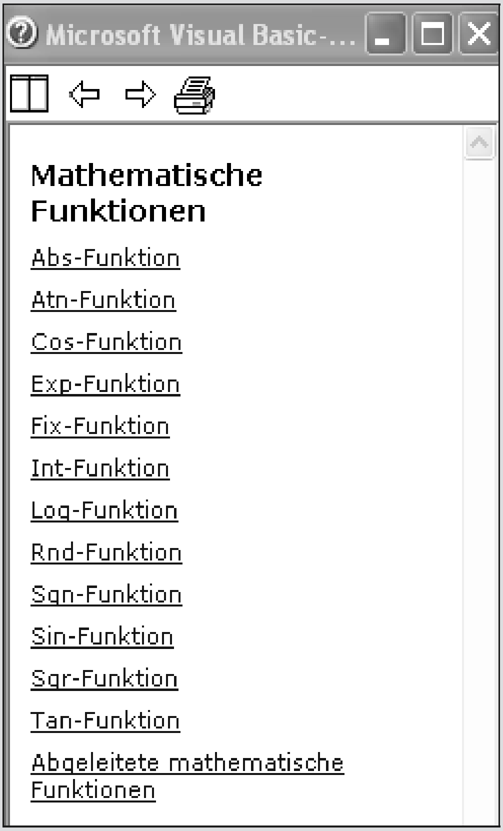
- Zur Erhöhung der Programmeffektivität wird empfohlen, für alle in einem Programm verwendeten Variablen entsprechende Datentypen zu deklarieren, d.h. Deklarationen vorzunehmen, die als Variablendeklarationen oder Typdeklarationen (Typvereinbarungen) bezeichnet werden (siehe Abschn. 4.5.2).
- *Deklarationen* geschehen im Rahmen von *Dimensionsanweisungen*, die mittels des Schlüsselworts **Dim** zu erstellen sind, wobei hinter das weitere Schlüsselwort **As** der Datentyp zu schreiben ist, wie im Beisp. 4.6 illustriert ist.
- Folgende Deklarationen sind für Variablen möglich:
  - **Integer**, **Long** für ganze Zahlen,
  - **Single**, **Double** für Gleitkommazahlen (Dezimalzahlen),
  - **Boolean** für logische (boolesche) Variable, die nur die beiden Wahrheitswerte WAHR oder FALSCH (TRUE/FALSE) annehmen können,
  - **String** für Zeichenfolgen.

  Die Bedeutung dieser Deklarationen erhält man aus der Hilfe von VBA.
- Wenn man für eine Variable *keine Deklaration* vornimmt, so wird ihr von VBA der Datentyp **Variant** zugewiesen:
  - Derart vereinbarte Variable passen sich automatisch an die zugewiesenen Daten an und können damit alle möglichen Datentypen enthalten.
  - Der Aufwand und Speicherbedarf ist in VBA für diese Variablen am höchsten, so dass ein weiterer Grund für Variablendeklarationen gegeben ist.
- Man kann sich von VBA zur Deklaration der verwendeten Variablen zwingen lassen, indem man das Schlüsselwort **Option Explicit** vor der ersten Prozedur (Funktion) in das Codefenster des VBA-Editors eingibt. Danach müssen in allen folgenden Prozeduren und Funktionen die verwendeten Variablen deklariert werden (siehe Beisp.4.12a1), ansonsten gibt VBA eine Fehlermeldung aus.

4.6.5 Felder

Als *Feld* bezeichnet man in der Programmierung ein Gruppe von Elementen (Variablen), die unter einem gemeinsamen Namen (*Feldnamen*) gespeichert werden:

- Anstatt Feld verwendet man oft die englische Bezeichnung *Array*.
- Die Anzahl (Anordnung) der Elemente, die ein Feld aufnehmen kann, bezeichnet man als *Dimension* des Feldes.
- Für die Mathematik benötigt man hauptsächlich eindimensionale und zweidimensionale Felder in Form von *Vektoren* bzw. *Matrizen*.
- Vor Verwendung eines Feldes muss dieses in einer Dimensionsanweisung deklariert (vereinbart) werden. Dazu werden wie bei Variablen die Schlüsselwörter **Dim** und **As** verwandt, wie im Beisp.4.6 illustriert ist.



Beispiel 4.11:
Betrachten wir Beispiele für die Anwendung von *Verzweigungen* innerhalb von VBA-Programmen:

a) Obwohl in EXCEL die Funktion **VORZEICHEN** integriert ist, schreiben wir im Folgenden zur Illustration der *Mehrfachverzweigung* **If–Then–ElseIf–Else** ein Funktionsprogramm SIGNUM:

```
Function SIGNUM ( x )
If x > 0 Then
SIGNUM = 1
ElseIf x = 0 Then
SIGNUM = 0
Else
SIGNUM = –1
End If
End Function
```

für die Vorzeichenfunktion SIGNUM (x):

- Sie ist folgendermaßen definiert:

- Bei der Deklaration von Feldern ist zu beachten, dass VBA immer mit dem Index 0 beginnt.

4.6.6 Operatoren

Operatoren dienen in einer Programmiersprache zur Verknüpfung von Daten und Bildung von Ausdrücken:

- VBA kennt mehrere Gruppen von *Operatoren*, so u.a.:
  - *Arithmetische Operatoren*

+	Additionsoperator
–	Subtraktionsoperator
*	Multiplikationsoperator
/	Divisionsoperator
^	Potenzoperator
\	Ganzzahldivisions-Operator
MOD	Modulo-Operator (Rest-Operator)

    ∗ Arithmetische Operatoren sind bis auf die beiden letzten unmittelbar verständlich, da sie auch EXCEL kennt (siehe Abschn.2.3).

    ∗ Die beiden in VBA enthaltenen Operatoren \ und MOD stellen wir im Beisp.4.7 vor.
  - *Vergleichsoperatoren*

=	gleich
<>	ungleich
<	kleiner
<=	kleiner oder gleich
>	größer
>=	größer oder gleich

    ∗ Diese Vergleichsoperatoren kennt auch EXCEL.

    ∗ Bei ihrer Anwendung wird der *Wahrheitswert* WAHR oder FALSCH geliefert.
  - *logische Operatoren*

NOT	Nicht
AND	Und
OR	Oder

    ∗ Logische Operatoren kennt auch EXCEL.

    ∗ Bei ihrer Anwendung wird der *Wahrheitswert* WAHR oder FALSCH geliefert.
  - *Verkettungsoperatoren*

    Unter *Verkettung* versteht man das Zusammenfügen (Verknüpfen) von Zeichenfolgen (siehe Abschn.4.6.2):

    ∗ Als Verkettungsoperator wird **&** verwendet.

    ∗ Mit **+** gibt es einen weiteren Verkettungsoperator, der die gleichen Eigenschaften wie **&** besitzt und seltener angewandt wird.

$$\text{SIGNUM}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Im Folgenden sind die Ergebnisse bei der Anwendung der programmierten Funktion SIGNUM für die x-Werte −5 , 0 , 3 zu sehen:

  SIGNUM (−5) = −1 , SIGNUM (0) = 0 , SIGNUM (3) = 1

b) Zur Erstellung eines Funktionsprogramms für die stetige Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \le 1 \\ 2x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

die sich aus zwei Geradenstücken x und 2x−1 zusammensetzt, reicht die *Mehrfachverzweigung* **If−Then−Else**, wie folgende Programmvariante zeigt:

```
Function g ( x )
If x <= 1 Then
g = x
Else
g = 2 * x – 1
End If
End Function
```

c) Obwohl in EXCEL die Funktion **FAKULTÄT** zur Berechnung der Fakultät n! einer positiven ganzen Zahl n integriert (vordefiniert) ist, schreiben wir ein Funktionsprogramm FAK in zwei Varianten (mit bzw. ohne Rekursion):

- Dabei wird illustriert, dass in VBA *rekursive Programmierung* möglich ist. Diese ist dadurch charakterisiert, dass ein Programm sich selbst aufruft.
- Im Unterschied zur EXCEL-Funktion **FAKULTÄT** geben folgende Funktionsprogramme FAK die Fehlermeldung *Fehler: n<0* aus, wenn man versehentlich eine negative ganze Zahl n eingibt:

Programm mit Rekursion	Programm ohne Rekursion
Function FAK (n)	**Function** FAK (n)
If n = 0 **Then**	**If** n = 0 **Then**
FAK = 1	FAK = 1
ElseIf n > 0 **Then**	**ElseIf** n > 0 **Then**
FAK = n *FAK (n – 1)	FAK = 1
Else	**For** i = 2 **To** n
FAK = "*Fehler: n<0*"	FAK = FAK * i
End If	**Next** i
End Function	**Else**
	FAK = "*Fehler: n<0*"
	End If
	End Function

- Zur Anwendung von Operatoren ist Folgendes zu bemerken:
  - Vergleichsoperatoren und logische Operatoren werden u.a. in Verzweigungen und Schleifen benötigt, wie im Abschn.4.6.11 und 4.6.12 zu sehen ist.
  - Zwischen einzelnen Operatorgruppen existiert eine *Rangordnung* (Priorität):
    - * Zuerst kommen arithmetische Operatoren, danach Verkettungs- und Vergleichsoperatoren und abschließend logische Operatoren.
    - * Innerhalb der einzelnen Operatorgruppen gibt es ebenfalls eine Rangordnung, so z.B. bei arithmetischen Operatoren in der Reihenfolge Potenzieren, Multiplizieren/Dividieren, Addieren/Subtrahieren. Falls man sich über die Rangordnung nicht sicher ist, empfiehlt sich das Setzen zusätzlicher Klammern.
  - Bei Anwendung von Operatoren ist zu beachten, dass die Datentypen bei auftretenden Operanden zueinander kompatibel sind. So lassen sich z.B. Zahlen durch arithmetische Operatoren nicht mit Zeichenfolgen verknüpfen.

4.6.7 Ausdrücke

Wir geben keine exakte Definition von Ausdrücken, sondern nur folgende anschauliche Interpretation:

- Einfachste Ausdrücke bestehen aus einer Variablen oder Konstanten. Ausdrücke, die aus mehr als einer Variablen oder Konstanten bestehen, enthalten Operatoren.
- Ausdrücke können nicht beliebig mit den im Abschn.4.6.6 beschriebenen Operatoren gebildet werden, sondern unterliegen gewissen Regeln. Je nach Art der auftretenden Operatoren unterscheidet man zwischen
  - *arithmetischen Ausdrücken*
  - *Vergleichsausdrücken*
  - *logischen Ausdrücken*
  - *Zeichenfolgenausdrücken*

  wie im Beisp.4.8 illustriert ist.
- Jeder Ausdruck liefert einen Wert, der je nach Art des Ausdrucks eine Zahl, ein Wahrheitswert oder eine Zeichenfolge ist und kann einer Variablen zugewiesen werden (siehe Abschn.4.6.8).

4.6.8 Zuweisungen

Zuweisungsanweisungen (kurz: Zuweisungen) zählen zu wichtigen Anweisungen in der strukturierten Programmierung:

- Durch *Zuweisungen* werden Variablen gewisse Werte oder Ausdrücke zugeordnet.
- Zuweisungen geschehen mittels eines *Zuweisungsoperators*, für den in VBA das Gleichheitszeichen = vorgesehen ist (siehe Beisp.4.9).

d) Obwohl in EXCEL die Funktion **MIN** zur Berechnung des Minimums ihrer im Argument stehenden Zahlen integriert (vordefiniert) ist, schreiben wir im Folgenden ein Funktionsprogramm MINIMUM zur Bestimmung des Minimums von drei Zahlen, um die *Mehrfachverzweigung* **If–Then–ElseIf–Else** zu illustrieren:

```
Function MINIMUM ( a , b , c )
If a <= b AND a <= c Then
MINIMUM = a
ElseIf b <= a AND b <= c Then
MINIMUM = b
Else
MINIMUM = c
End If
End Function
```

Beispiel 4.12:

Im Folgenden illustrieren wir die Anwendung von *Zählschleifen* und *bedingten Schleifen* (*Iterationsschleifen*) zur Lösung mathematischer Aufgaben:

a) Illustrieren wir die Berechnung einer Summe unter Verwendung von Schleifen, indem wir in VBA ein Funktionsprogramm GANZSUM zur Berechnung der Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n in verschiedenen Varianten unter Verwendung einer Zählschleife bzw. bedingten Schleife erstellen:

a1) Wenden wir im Folgenden eine *Zählschleife*n der Form **For-To-Next** an:

```
Option Explicit
Function GANZSUM (n As Integer) As Integer
Dim i As Integer
GANZSUM = 0
For i = 1 To n
GANZSUM = GANZSUM + i
Next i
End Function
```

- In der Programmvariante wird zusätzlich mit dem Schlüsselwort **Option Explicit** gefordert, dass alle Variablen zu deklarieren sind.
- Mittels GANZSUM kann man z.B. für n = 100 die Summe der Zahlen von 1 bis 100 berechnen, wofür GANZSUM(100) das Ergebnis 5050 liefert. Zur Lösung dieser Aufgabe hat der berühmte Mathematiker Gauß im Alter von 6 Jahren die Summenformel der arithmetischen Reihe (siehe Abschn.2.7.6) hergeleitet.

a2) Obwohl Zählschleifen zur Berechnung von Summen effektiv sind, können sie auch durch bedingte Schleifen in Form von kopf- bzw. fußgesteuerten **Do-While** oder **Do-Until**-Schleifen ersetzt werden, wie im Folgenden für das Funktionsprogramm GANZSUM aus Beisp.4.12a1 illustriert ist:

4.6.9 Integrierte Funktionen

In VBA sind wie in allen Programmiersprachen zahlreiche Funktionen integriert (vordefiniert), die die Programmierung wesentlich erleichtern:

- Wir bezeichnen in VBA integrierte Funktionen als *VBA-Funktionen*.
- Man erhält eine Übersicht und ausführliche Erläuterungen zu diesen Funktionen, indem man in die Hilfe des VBA-Editors den Suchbegriff *Funktionen* eingibt.
- In VBA integrierte *mathematische Funktionen* stellen wir im Beisp.4.10 vor.

4.6.10 Ein- und Ausgaben

Es gibt Möglichkeiten, notwendige Ein- und Ausgaben in VBA-Programmen mittels der VBA-Funktionen **Inputbox** und **MsgBox** zu programmieren:

- **Inputbox**
  Diese VBA-Funktion erwartet eine Eingabe in der Form:

  Variable = **Inputbox** (" *Bezeichnung* ")

  - Für die als Argument einzugebende Zeichenfolge " *Bezeichnung* " ist ein für die Eingabe zutreffender Text zu wählen.
  - Die von **Inputbox** bewirkte Eingabe
    * geschieht in dem erscheinenden Eingabefenster *Bezeichnung* mittels Tastatur, wie im Beisp.4.4b illustriert ist.
    * wird der Variablen mit Namen *Variable* zugewiesen, die vom Typ **Variant** ist, wenn kein anderer Typ deklariert ist (siehe Abschn.4.6.4).
- **MsgBox** (Abkürzung für die englische Bezeichnung *Messagebox*)
  Diese VBA-Funktion dient zur Ausgabe von Text (Zeichenfolgen) und Zahlenwerten auf dem Bildschirm:
  - Dies geschieht in einem eigenen Meldungsfenster (Meldungsfeld).
  - Wendet man die Funktion in der Form

    MsgBox ("*Bezeichnung*=" & *Variable*)

    an, so wird in dem erscheinenden Meldungsfenster *Bezeichnung*= der Wert der Variablen mit Namen *Variable* angezeigt, wie im Beisp.4.4b zu sehen ist.

4.6.11 Verzweigungen - Bedingte Anweisungen

Verzweigungen (bedingte Anweisungen) gehören zu Steueranweisungen (Kontrollstrukturen) strukturierter Programme und dienen dazu, alternative Anweisungen in Abhängigkeit von Bedingungen auszuführen:

- Als *Bedingungen* treten Ausdrücke auf, wobei logische Ausdrücke überwiegen, so dass in Abhängigkeit von ihren Wahrheitswerten WAHR oder FALSCH unterschiedliche Anweisungen ausgeführt werden.

kopfgesteuerte **Do-While**-Schleife:

```
Function GANZSUM ( n )
GANZSUM = 0
i = 1
Do While i <= n
GANZSUM = GANZSUM + i
i = i + 1
Loop
End Function
```

kopfgesteuerte **Do-Until**-Schleife:

```
Function GANZSUM ( n )
GANZSUM = 0
i = 1
Do Until i>n
GANZSUM = GANZSUM + i
i = i + 1
Loop
End Function
```

fußgesteuerte **Do-While**-Schleife:

```
Function GANZSUM ( n )
GANZSUM = 0
i = 1
Do
GANZSUM = GANZSUM + i
i = i + 1
Loop While i <= n
End Function
```

fußgesteuerte **Do-Until**-Schleife:

```
Function GANZSUM ( n )
GANZSUM = 0
i = 1
Do
GANZSUM = GANZSUM + i
i = i + 1
Loop Until i > n
End Function
```

b) Illustrieren wir die Anwendung *geschachtelter Zählschleifen*, indem wir mittels eines Funktionsprogramms MINMAT das minimale Element einer in der EXCEL-Tabelle definierten Matrix mit m Zeilen und n Spalten unter Verwendung einer *Einfachverzweigung* berechnen:

```
Function MINMAT ( A , m , n )
'Bestimmung eines minimalen Elements einer Matrix A vom Typ (m,n)
'mit Angabe der Indizes
Dim i As Integer, k As Integer, imin As Integer, kmin As Integer
MINMAT = A(1, 1)
imin = 1
kmin = 1
For i = 1 To m
For k = 1 To n
If A(i, k) <= MINMAT Then
MINMAT = A(i, k)
imin = i
kmin = k
End If
Next k
Next i
MsgBox ("imin=" & imin)        ' Ausgabe Zeilenindex
MsgBox ("imax=" & kmin)        ' Ausgabe Spaltenindex
End Function
```

- Verzweigungen werden in VBA wie in den meisten Programmiersprachen mit dem Schlüsselwort **If** gebildet, so dass man von **If**-Verzweigungen oder **If**-Anweisungen spricht.
- Man unterscheidet in VBA wie in anderen Programmiersprachen zwischen
  - *Einfachverzweigungen* (siehe Beisp.4.12b):
    Sie werden mit den Schlüsselwörtern **If**, **Then** und **End** in der Form

    If (*logischer) Ausdruck* **Then**

    Anweisungen

    End If

    gebildet.
  - *Mehrfachverzweigungen* (siehe Beisp.4.11):
    - Sie werden häufiger benötigt und mit den Schlüsselwörtern **If**, **Then**, **Else**, **ElseIf** und **End** gebildet.
    - Sie unterteilen sich in folgende zwei Formen, je nachdem ob zwischen zwei oder mehreren Alternativen unterschieden wird:

If-Then-Else-Verzweigung:	**If-Then-ElseIf-Else**-Verzweigung:

If (*logischer*) *Ausdruck* **Then**
Folge von *Anweisungen*
Else
Folge von *Anweisungen*
End If
	If (*logischer*) *Ausdruck* **Then**
	Folge von *Anweisungen*
	ElseIf (*logischer*) *Ausdruck* **Then**
	Folge von *Anweisungen*
	Else
	Folge von *Anweisungen*
	End If

- Die beschriebenen Einfach- und Mehrfachverzweigungen werden als *bedingte Verzweigungen* (bedingte Anweisungen) bezeichnet, da sie von der Erfüllung einer Bedingung abhängen.
- VBA kennt zusätzlich die *unbedingte Verzweigung* **GoTo** *Zeilenmarke*, die zur Zeile mit *Zeilenmarke* führt. Da diese Verzweigung selten angewandt wird, gehen wir hierauf nicht näher ein.

4.6.12 Schleifen

Schleifen gehören zu Steueranweisungen (Kontrollstrukturen) strukturierter Programme und dienen dazu, in einem Programm gewisse Folgen von Anweisungen (Anweisungsfolgen) mehrmals zu durchlaufen:

- Man unterscheidet zwei Arten von *Schleifen*, die wir im Beisp.4.12 illustrieren:
  - *Zählschleifen* (**For**-Schleifen)
    - Hier ist die Anzahl von Durchläufen bereits zu Beginn festgelegt.
    - Ein Zähler (Laufvariable oder Schleifenzähler) zählt die Anzahl der Durchläufe.

Das Funktionsprogramm MINMAT berechnet als Ergebnis ein minimales Element einer Matrix und zeigt mittel **MsgBox** in Meldungsfenstern die Indizes des berechneten minimalen Elements an, wie im Folgenden zu sehen ist:

- Für die in der EXCEL-Tabelle definierte Matrix **B** (Z1S1**:**Z2S3) wird in Zelle Z1S4 durch Aufruf der Funktion MINMAT mit den Argumenten **B** (Matrixname), 2 (Anzahl der Zeilen von **B**) und 3 (Anzahl der Spalten von **B**) das Ergebnis –3,5 berechnet:

Z1S4 fx =MINMAT(B;2;3)

	1	2	3	4
1	6	2	-1	-3,5
2	12,5	-3,5	11	

- Folgende beide Meldungsfenster zeigen die Indizes des berechneten minimalen Elements:

c) Illustrieren wir die Anwendung von *bedingten Schleife*n (*Iterationsschleifen*) der Form **Do-While** bzw. **Do-Until**, indem wir in VBA ein Funktionsprogramm NEWTON erstellen, mit der wir die klassische *Newtonsche Iterationsmethode* (siehe Abschn.6.7.1)

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} \qquad (n = 0 , 1 , 2 , 3 , ... \ , \ x^0 \text{ - Anfangsnäherung})$$

zur numerischen (näherungsweisen) Berechnung einer Nullstelle der Funktion $f(x)$ oder äquivalent einer Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ realisieren:

- Das Funktionsprogramm NEWTON benötigt die Argumente s, eps und N, die folgende Bedeutung haben:
  - s
    steht für die Anfangsnäherung x^0 für eine zu berechnende Näherungslösung, die vorgegeben werden muss:
    - ∗ Falls man keine Informationen über die gesuchte Lösung hat, muss man s raten.
    - ∗ Es empfiehlt sich, die Newton-Methode für verschiedene Anfangsnäherungen durchzuführen.
    - ∗ Man erhält z.B. Anfangsnäherungen für reelle Lösungen, indem man sie aus der grafischen Darstellung von $f(x)$ abliest.

* *Zählschleifen* werden als **For**-Schleifen bezeichnet, da sie mit dem Schlüsselwort **For** beginnen.
* VBA kennt zwei Arten von Zählschleifen (**For**-Schleifen) **For-To-Next** und **For-Each-Next**, die mit den Schlüsselwörtern **For**, **To**, **Step**, **Each** und **Next** zu bilden sind.
* Wir benötigen für im Buch zu lösende Aufgaben nur **For-To-Next**-Schleifen, die folgendermaßen gebildet werden:

  For *Variable=Anfangswert* **To** *Endwert* **Step** *Schrittweite*

  Folge von Anweisungen (Anweisungsfolge)

  Next *Variable*

  – Die *Anweisungen* werden für die *Variable* (Zählvariable, Zähler, Laufvariable oder Schleifenzähler) vom *Anfangswert* bis zum *Endwert* mit der angegebenen *Schrittweite* durchgeführt.
  – Falls die *Schrittweite* 1 beträgt, kann **Step** *Schrittweite* weggelassen werden.

● *Bedingte Schleifen* (Iterationsschleifen):
  • Hier ist die Anzahl der Schleifendurchläufe zu Beginn nicht bekannt.
  • Sie sind flexibler einsetzbar, da hier eine Bedingung (*Abbruchbedingung*) das Beenden der Schleife bestimmt.
  • Man unterscheidet mehrerer Arten, von denen wir folgende benötigen, die mit den Schlüsselwörtern **Do**, **While** bzw. **Until** und **Loop** gebildet werden:

Do-While-Schleife:	**Do-Until**-Schleife:
Do While *Bedingung*	**Do Until** *Bedingung*
Folge von Anweisungen	*Folge von Anweisungen*
Loop	**Loop**

● Wir möchten auf folgende wichtige Sachverhalte bzgl. Schleifen hinweisen:
  • Schleifen können geschachtelt werden, d.h. innerhalb einer Schleife kann eine weitere Schleife auftreten usw. Man spricht hier von *äußeren* bzw. *inneren Schleifen*.
  • Zählschleifen lassen sich mittels bedingter Schleifen realisieren, wie im Beisp. 4.12a2 illustriert ist.
  • Zählschleifen kommen in der Mathematik u.a. bei der Berechnung von Summen zum Einsatz, wie im Beisp.4.12a1 zu sehen ist.
  • Bedingungen (Abbruchbedingungen) in bedingten Schleifen werden meistens durch logische Ausdrücke gebildet, wie im Beisp.4.12 illustriert ist.
  • Beide bedingten Schleifenarten unterscheiden sich dadurch, dass bei **Do-While**-Schleifen die Anweisungsfolge ausgeführt wird *solange* die *Bedingung* erfüllt ist, während dies bei **Do-Until**-Schleifen der Fall ist, *bis* die *Bedingung* erfüllt ist. Wir illustrieren dies im Beisp.4.12c.

- eps
  bezeichnet die Genauigkeitsschranke für den Abbruch der Iteration im Falle der Konvergenz:
  * Da man die exakte Lösung nicht kennt, ist es nicht einfach, eine optimale Genauigkeitsschranke zu finden.
  * Wir beenden die Iteration, wenn $|f(x)| \le$ eps gilt, d.h. die Werte der Funktion f(x) hinreichend nahe bei Null liegen.
- N
  bezeichnet die Maximalzahl N durchzuführender Iterationen:
  Da die Newton-Methode nicht immer konvergiert, geben wir N vor, um bei Nichtkonvergenz eine *Endlosschleife* zu vermeiden.

- Im Folgenden realisieren wir die Newton-Methode mittels eines Funktionsprogramms NEWTON, wobei wir zwei Varianten angeben, um die Anwendung von **Do-While**- bzw. **Do-Until**-Schleifen zu illustrieren:

Anwendung einer **Do-While**-Schleife:	Anwendung einer **Do-Until**-Schleife:
Function NEWTON (s , eps , N)	**Function** NEWTON (s , eps , N)
x = s	x = s
i = 1	i = 1
Do While ABS(f (x))>eps AND i<=N	**Do Until ABS**(f (x))<=eps OR i >N
x = x – f (x) / fs (x)	x = x – f (x) / fs (x)
i = i + 1	i = i + 1
Loop	**Loop**
NEWTON = x	NEWTON = x
If i > N **Then**	**If** i >N **Then**
NEWTON = "i>N"	NEWTON = "i>N"
End If	**End If**
End Function	**End Function**
Function f (x)	**Function** f (x)
f = x ^ 7 + x + 1	f = x ^ 7 + x + 1
End Function	**End Function**
Function fs (x)	**Function** fs (x)
fs = 7 * x ^ 6 + 1 'Ableitung von f (x)	fs = 7 * x ^ 6 + 1 'Ableitung von f (x)
End Function	**End Function**

- Bei bedingten Schleifen unterscheidet man zwischen *abweisenden* und *nichtabweisenden*, die sich dadurch unterscheiden, dass die Bedingung hinter **Do** bzw. **Loop** auftritt:
  * Deshalb werden sie als *kopfgesteuert* bzw. *fußgesteuert* bezeichnet.
  * Den Unterschied zwischen beiden Formen von Schleifen kann man sich leicht überlegen. Wir geben eine Illustration im Beisp.4.12a2.
- Bedingte Schleifen werden in der Mathematik meistens als *Iterationsschleifen* bezeichnet:
  * Sie kommen bei der Programmierung von Iterationsmethoden zum Einsatz.
  * Wir illustrieren dies im Beisp.4.12c, indem wir die bekannte Newtonsche Iterationsmethode zur numerischen (näherungsweisen) Lösung nichtlinearer Gleichungen programmieren.
- Ein häufig begangener Fehler bei der Erstellung von Schleifen sind sogenannte *Endlosschleifen*. Diese sind dadurch charakterisiert, dass sie aufgrund fehlerhafter Programmierung (fehlerhafter Abbruchbedingung) oder Nichtkonvergenz des verwendeten Algorithmus nicht beendet werden. In diesem Fall kann man das Programm durch Drücken der Taste [Esc] oder Tastenkombination [Strg] [Pause] abbrechen.

4.7 Erzeugung von Add-Ins

Eine Methode, um erstellte VBA-Programme verschiedenen Anwendern zur Verfügung zu stellen, besteht in der Erstellung von Add-Ins (siehe Abschn.3.4.2):

- Man kann ein VBA-Programm (Funktion) in folgenden Schritten in ein *Add-In* umwandeln:

  I. Zuerst wird in EXCEL eine neue leere Arbeitsmappe geöffnet.

  II. Danach wird in den VBA-Editor gewechselt und das als Add-In vorgesehene Programm (z.B. NAME) einem Modul zugeordnet und ins erscheinende Codefenster eingefügt (geschrieben), wie im Abschn.4.5.6 erläutert ist.

  III. Anschließend wird wieder zur EXCEL-Arbeitsmappe gewechselt und diese als Add-In (d.h. als Datei NAME**.**XLA) abgespeichert, indem man mittels der Menüfolge **Datei ⇒ Speichern unter** im erscheinenden Dialogfeld **Speichern unter** den Dateityp MICROSOFT OFFICE EXCEL ADD IN auswählt, bei Dateiname den Programmnamen NAME einfügt und abschließend die Speicherung in das Verzeichnis ADDINS durch Mausklick auslöst.

  IV. Nach Durchführung der Schritte I bis III ist ein Neustart von EXCEL erforderlich:
  - Man ruft mittels der Menüfolge **Extras ⇒ Add-Ins** das Dialogfeld **Add-Ins** (*Add-Ins-Manager*) auf, in dem sich jetzt das erstellte Add-In NAME befindet, das durch Anklicken des vorangestellten Kontrollkästchens aktiviert werden kann.

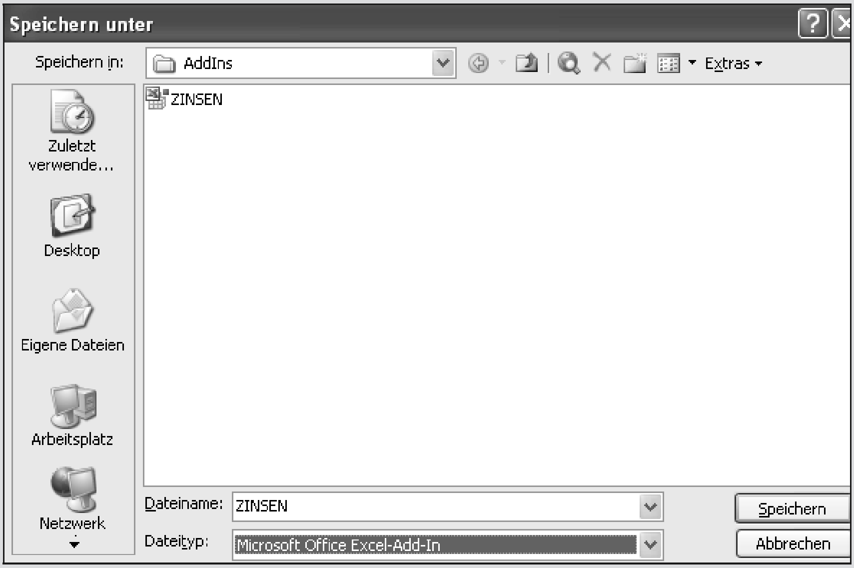
- Die Funktionsprogramme NEWTON sind folgendermaßen einzusetzen:
  - Sie benötigen die beiden Funktionen $f(x)$ und $fs(x)$:
    - ∗ Von $f(x)$ sind die Nullstellen zu bestimmen und $fs(x)$ stellt die erste Ableitung von $f(x)$ dar.
    - ∗ Beide Funktionen $f(x)$ und $fs(x)$ müssen vom Anwender für eine konkrete Aufgabe ebenfalls als Funktionsprogramme erstellt werden und im gleichen Modul wie NEWTON stehen, wie für die im Beispiel verwendete Funktion $f(x) = x^7 + x + 1$ zu sehen ist.
  - Ihre Anwendung mit konkreten Werten für die Argumente berechnet folgendes numerisches Ergebnis für die reelle Nullstelle der Polynomgleichung

    $x^7 + x + 1 = 0$
    - ∗ =NEWTON (0 **;** 0,0001 **;** 7) liefert –0,7965449
    - ∗ =NEWTON (0 **;** 0,0001 **;** 5) liefert i>N
    - ∗ Man sieht, dass für die Anfangsnäherung 0 bei 7 Iterationen die reelle Näherungslösung –0,7965449 bzgl. der vorgegebenen Genauigkeit eps = 0,0001 berechnet wird, während 5 Iterationen nicht reichen, um die vorgegebene Genauigkeit zu erreichen.

Beispiel 4.13:

Wir empfehlen dem Leser, ein Add-In für das im Beisp.4.4a erstellte Funktionsprogramm ZINSEN mittels der im Abschn.4.7 beschriebenen Schritte I bis IV zu erzeugen:

- Im abgebildeten Dialogfeld **Speichern unter** ist zu sehen, wie das erstellte Funktionsprogramm ZINSEN als Datei ZINSEN**.**XLA im Verzeichnis ADDINS gespeichert wird:

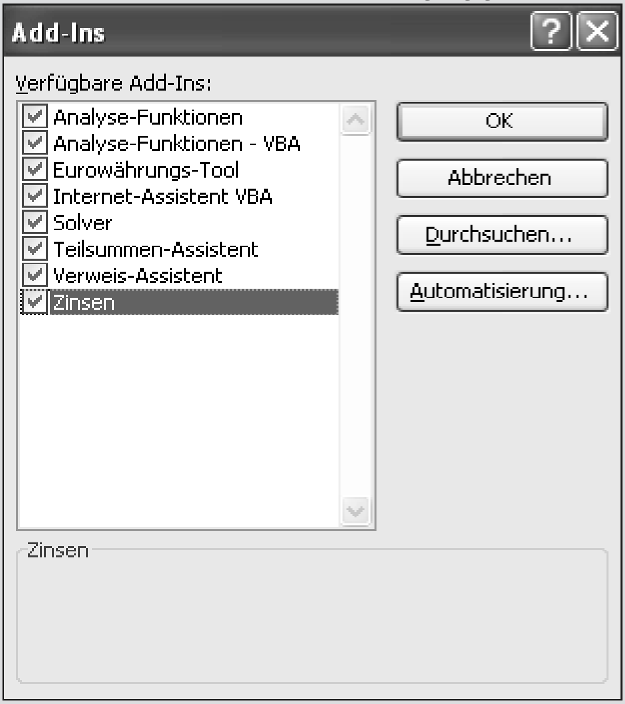


- Damit steht das erzeugte Add-In NAME bei jedem Start von EXCEL zur Verfügung:
  * Falls der Add-Ins-Manager das erzeugte Add-In nicht anzeigt, kann man die zugrundeliegende **.**XLA-Datei mittels Durchsuchen ermitteln.
  * Wenn man nach Aktivierung eines Add-Ins in den VBA-Editor wechselt, werden das zum erstellten Add-In NAME zugehörige **VBA-Projekt (NAME.XLA)** im Projektexplorer und nach Mausklick im Codefenster der zugehörige Programmcode angezeigt.

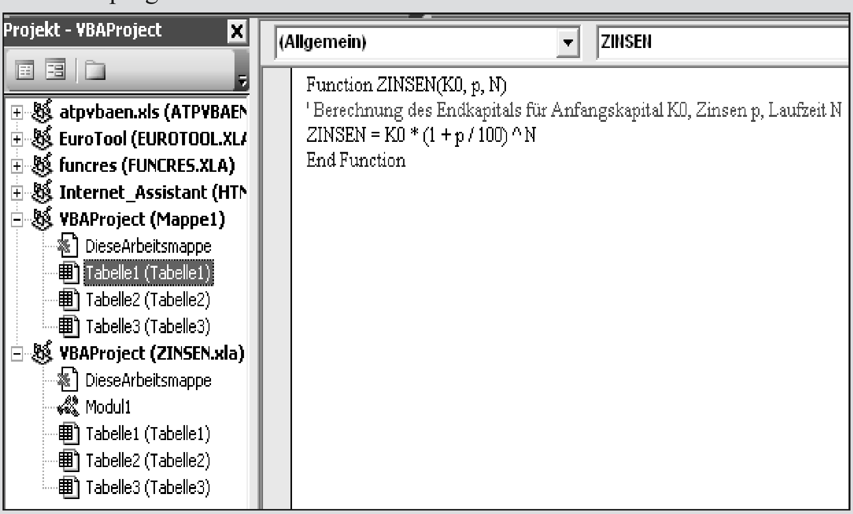
- Im Beisp.4.13 geben wir eine Illustration der gegebenen Vorgehensweise zur Erzeugung von Add-Ins.

- Möchte man ein erstelltes *Add-In* NAME wieder *löschen*, so ist folgendermaßen vorzugehen:
  - Zuerst ruft man den Add-Ins-Manager (Dialogfeld **Add-Ins**) auf und deaktiviert das entsprechende Kontrollkästchen.
  - Abschließend löscht man die entsprechende Datei NAME**.**XLA im Verzeichnis ADDINS.

- Im abgebildeten Add-Ins-Manager (Dialogfeld **Add-Ins**) ist zu sehen, dass das erstellte und gespeicherte Add-In ZINSEN aufgeführt und aktiviert ist. Die anderen angezeigten Add-Ins sind die von EXCEL zu Verfügung gestellten:



- Im abgebildeten Ausschnitt der Benutzeroberfläche des VBA-Editors sind im Projektexplorer das **VBAProjekt (ZINSEN.XLA)** und im Codefenster das entsprechende Funktionsprogramm ZINSEN zu sehen:



5 Matrizenrechnung

5.1 Einführung

Matrizen bilden mit linearen Gleichungssystemen die Säulen der *linearen Algebra*, die zu den Grundlagen der Wirtschaftsmathematik gehört.
Im Folgenden geben wir eine Einführung in die Matrizenrechnung und erklären den Einsatz von EXCEL.

5.1.1 Matrizen

Eine *Matrix* **A** ist als rechteckiges Schema von Elementen

a_{ij} $\qquad$ (i = 1, 2, **...** , m ; j = 1, 2, **...** , n)

definiert, das durch runde Klammern eingeschlossen und in der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)$$

geschrieben wird:

- In diesem Schema sind die als Matrizenelemente bezeichneten Elemente a_{ij} mit Indizes i und j versehen, wobei i den *Zeilenindex* und j den *Spaltenindex* bezeichnet:
  - Die Matrizenelemente

    a_{i1} a_{i2} ... a_{in}

    bilden die i-te *Zeile* der Matrix.
  - Die Matrizenelemente

    $$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

    bilden die j-te *Spalte* der Matrix.
  - Die angegebene Matrix besitzt m Zeilen und n Spalten, so dass man von einer Matrix vom *Typ* (m,n) spricht.
  - Da man Zeilen und Spalten einer Matrix als Vektoren (siehe Abschn.5.1.2) interpretieren kann, spricht man auch von *Zeilen*- bzw. *Spaltenvektoren*.
- Man bezeichnet Matrizen üblicherweise mit Großbuchstaben **A** , **B** , **C**, ... und ihre Elemente mit zugehörigen Kleinbuchstaben a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , ...

Beispiel 5.1:
Illustrieren wir im Folgenden die im Abschn.5.1 besprochenen Eigenschaften von Matrizen und Vektoren, wobei wir uns auf Matrizen mit maximal 3 Zeilen und 3 Spalten beschränken, da diese für eine Illustration ausreichen:

a) Illustrieren wir den *Rang* von Matrizen:

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ist vom Typ (2,3) da sie

- zwei Zeilenvektoren (1 , 2 , 4) und (0 , 5 , 1)
- drei Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

besitzt:

- Der *Rang* der Matrix kann höchstens gleich 2 sein, da der Zeilenrang höchstens gleich 2 ist und der Rang mit Zeilen- und Spaltenrang übereinstimmt.
- Man überprüft leicht, dass die beiden Zeilenvektoren linear unabhängig sind (siehe Beisp.6.8a), so dass der *Zeilenrang* gleich 2 ist.
- Laut Theorie muss der *Spaltenrang* ebenfalls gleich 2 sein. Da laut Theorie drei zweidimensionale Vektoren immer linear abhängig sind, können höchstens 2 Spaltenvektoren linear unabhängig sein, wie z.B. die beiden Spaltenvektoren

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

  wie man leicht nachprüft (siehe Beisp.6.8b).

b) Illustrieren wir Eigenschaften quadratischer Matrizen:

- Die quadratische Matrix

  $$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

  ist eine dreireihige *Diagonalmatrix*, da die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind:

  - Sie wird für den Fall a = b = c = 1 als dreireihige *Einheitsmatrix* **E** bezeichnet, d.h.

    $$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Gilt a = b = c = 0, so ergibt sich die dreireihige *Nullmatrix:*

- In den meisten ökonomischen Anwendungen werden Matrizenelemente durch (reelle) Zahlen gebildet, so dass eine Matrix in diesem Fall ein *Zahlenschema* darstellt.
- Stellen wir wichtige Begriffe und Bezeichnungen für Matrizen zusammen:
  - Zwei Matrizen **A** und **B** vom gleichen Typ sind gleich, d.h. **A** = **B**, wenn ihre entsprechenden Elemente gleich sind, d.h. $a_{ij} = b_{ij}$ gilt.
  - Sind alle Elemente einer Matrix gleich Null, so spricht man von einer *Nullmatrix* **0**.
  - Ein wichtiger Begriff für Matrizen ist der des *Ranges*, der für Anwendungen große Bedeutung besitzt. Er ist unter Verwendung der Unabhängigkeit von Zeilen- und Spaltenvektoren (siehe Abschn.5.1.2) folgendermaßen definiert:
    * Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- und Spaltenvektoren einer Matrix bezeichnet man als ihren *Zeilen*- bzw. *Spaltenrang*.
    * Es lässt sich beweisen, dass Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix **A** gleich sind, so dass es sinnvoll ist vom Rang Rg(**A**) = r einer Matrix zu sprechen. Wenn die Matrix vom Typ (m,n) ist, kann folglich ihr Rang r höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen m und n sein.
    * Im Rahmen des Buches werden wir Methoden zur Rangbestimmung im Beisp. 5.1c und Abschn.5.9.1 und Anwendungen des Ranges im Abschn.6.4.2 kennenlernen.
  - Hat eine Matrix die gleiche Anzahl von Zeilen und Spalten, so gilt m = n und sie ist vom Typ (n,n). Für derartige Matrizen gibt es folgende Bezeichnungen (siehe Beisp. 5.1b):
    * Matrizen vom Typ (n,n) werden als *n-reihige Matrizen* oder *quadratische Matrizen* der Ordnung n bezeichnet.
    * Die Elemente a_{ii} (i = 1, 2, ... , n) bilden die *Hauptdiagonale* einer quadratischen Matrix **A**.
    * Eine quadratische Matrix heißt *Diagonalmatrix*, wenn nur Elemente der Hauptdiagonalen (*Diagonalelemente*) von Null verschieden sind.
    * Eine Diagonalmatrix heißt *Einheitsmatrix* (Bezeichnung **E**), wenn alle Diagonalelemente gleich 1 sind.
    * Eine quadratische Matrix heißt obere (untere) *Dreiecksmatrix*, wenn sämtliche Elemente unterhalb (oberhalb) der Hauptdiagonalen gleich Null sind. Man spricht von einer Matrix in *Dreiecksgestalt*.
    * Hat eine quadratische Matrix der Ordnung n den Rang n, so heißt sie *regulär*. Ist ihr Rang kleiner als n, so bezeichnet man sie als *singulär*.
    * Eine quadratische Matrix heißt *symmetrisch*, wenn ihre Elemente spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen sind, d.h. sie ist gleich ihrer Transponierten (siehe Abschn.5.4.1).

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Die Matrizen
  $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
  sind Beispiele für obere bzw. untere *Dreiecksmatrizen*, da die Elemente unterhalb bzw. oberhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind.
- Die Matrix
  $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
  ist ein Beispiel für eine *symmetrische Matrix*, da sie spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen ist. Man kann dies zusätzlich durch Berechnung der Transponierten, d.h. durch Vertauschen von Zeilen und Spalten nachprüfen, da Matrix und ihre Transponierte für symmetrische Matrizen übereinstimmen.

c) Stellen wir eine effektive Methode zur Rangbestimmung vor, die auf der Idee des Gaußschen Algorithmus beruht, den wir bei der Lösung linearer Gleichungssysteme ausführlicher kennenlernen:
- Diese Methode beruht auf der Eigenschaft, dass sich der Rang einer Matrix nicht ändert, wenn man das Vielfache einer Zeile (oder einer Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) addiert.
- Mit dieser Methode kann man Zeilen bzw. Spalten derart umformen, dass die umgeformte Matrix Dreiecksgestalt hat und ihr Rang ablesbar ist.
- Geben wir eine Illustration im folgenden Umformschema:
  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  Aus diesem Umformschema kann der Rang 3 der gegebenen linken Matrix unmittelbar abgelesen werden, da Zeilen- bzw. Spaltenvektoren ab umgeformter zweiter Matrix offensichtlich linear unabhängig sind:
  - Folgende Operationen werden im Umformschema durchgeführt:
    * In der gegebenen linken Matrix wird im ersten Schritt die erste Zeile von der zweiten und danach von der dritten abgezogen und die zweite Matrix erhalten, die Dreiecksgestalt hat. Hieraus ist bereits Rang 3 ersichtlich.
    * Man kann weiter umformen, wie im obigen Umformschema zu sehen ist:

5.1.2 Vektoren

Vektoren mit n Komponenten (n-dimensionale Vektoren) ergeben sich als Sonderfälle von Matrizen:

- $(a_1, \ldots, a_n)$ *Zeilenvektor* (Matrix vom Typ (1,n))
- $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *Spaltenvektor* (Matrix vom Typ (n,1))
- Man bezeichnet Vektoren üblicherweise mit Kleinbuchstaben **a** , **b** , **c** , ... und ihre Komponenten mit a_i , b_i , c_i , ...
- Stellen wir wichtige Begriffe und Bezeichnungen für Vektoren zusammen:
  - Zwei n-dimensionale Vektoren **a** und **b** sind gleich, d.h. **a** = **b**, wenn ihre entsprechenden Komponenten gleich sind, d.h. $a_i = b_i$ für i = 1, 2, **...** , n.
  - Sind alle Komponenten eines Vektors gleich Null, so spricht man von einem *Nullvektor* **0**.
  - Ein Vektor der Länge 1 heißt *Einheitsvektor*, wobei sich für n-dimensionale Vektoren (Spalten- oder Zeilenvektoren) **a** die *Länge* $|\mathbf{a}|$ folgendermaßen aus den Komponenten berechnet:

    $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$
  - Zwei n-dimensionale Vektoren **a** und **b** heißen *linear abhängig*, wenn es reelle Zahlen λ und μ gibt, die nicht beide gleich Null sein dürfen, so dass

    $\lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$

    gilt. Ansonsten heißen sie *linear unabhängig*. Analog lässt sich die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit für mehr als zwei Vektoren definieren (siehe Beisp. 5.1a und 6.8)

5.1.3 Matrizen in EXCEL

Da Tabellen einer Arbeitsmappe eine Aufteilung in Zeilen und Spalten (d.h. Matrizenformat) besitzen (siehe Abschn.1.2.3), bereitet EXCEL die Arbeit mit Vektoren und Matrizen keine Schwierigkeiten:

- Man kann *Zeilen* (für *Zeilenvektoren*) oder *Spalten* (für *Spaltenvektoren*), bzw. zusammenhängende *rechteckige Bereiche* (für *Matrizen*) der aktuellen EXCEL-Tabelle mit Komponenten/Elementen benötigter Vektoren/Matrizen ausfüllen.
- Für so in zusammenhängende Zellen eingegebene Vektoren/Matrizen kann nach Markierung mit gedrückter Maustaste ein *Name* mittels der Menüfolge

  Einfügen ⇒ Namen ⇒ Definieren bzw. **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen**

  definiert bzw. erstellt werden, wie im Abschn.2.5 erläutert ist.

– Im zweiten Schritt wird die zweite Zeile der zweiten Matrix mit 2 multipliziert und von der ersten abgezogen und damit die dritte Matrix erhalten.
– Im abschließenden dritten Schritt wird die dritte Zeile der dritten Matrix mit 3 multipliziert und von der ersten abgezogen und damit die vierte Matrix erhalten, die eine Einheitsmatrix ist.

d) Wenden wir die im Beisp.5.1c vorgestellte Methode zur Rangbestimmung auf folgende Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -12 \end{pmatrix}$$

- Man sieht, dass die erste Zeile mit 2 multipliziert und von der zweiten Zeile und danach mit 7 multipliziert und von der dritten Zeile abgezogen wurde.
- Damit besitzt die gegebene linke Matrix den Rang 2, da beide übrigbleibende Zeilenvektoren der umgeformten rechten Matrix offensichtlich linear unabhängig sind.

Beispiel 5.2:
Betrachten wir Beispiele für die Anwendung von Matrizen in Kosten-, Verflechtungs-, Produktions- und Transportmodellen, die einen Einblick in wirtschaftliche Anwendungen geben:

a) Stellen wir ein *Kostenmodell* vor:
Für m Betriebe $B_1, B_2, ..., B_m$, die n Produkte $P_1, P_2, ..., P_n$ herstellen, lassen sich Kosten (in Geldeinheiten GE), die im i-ten Betrieb für das j-te Produkt

k_{ij} $\qquad (i = 1, 2, ... , m ; j = 1, 2, ... , n)$

betragen, übersichtlich mittels einer *Kostenproduktmatrix* **K** darstellen:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & ... & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & ... & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & ... & k_{mn} \end{pmatrix}$$

b) Stellen wir ein *Verflechtungsmodell* vor:
Ein Betrieb stellt aus m Rohstoffen $R_1, R_2, ..., R_m$ n Produkte $P_1, P_2, ..., P_n$ her:

- Wenn der Bedarf (in Mengeneinheiten ME) des Betriebes am Rohstoff R_i für die Produktion einer ME des Produkts P_j gleich v_{ij} beträgt, so lässt sich der Bedarf an Rohstoffen mittels der *Verflechtungsmatrix*

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & ... & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & ... & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & ... & v_{mn} \end{pmatrix}$$ übersichtlich darstellen:

- In EXCEL sind für Operationen (Rechnungen) mit Matrizen eine Reihe von Funktionen integriert (vordefiniert), die man als *Matrizenfunktionen* bezeichnet (siehe Abschn.5.3-5.9).

5.2 Anwendungen in der Wirtschaft

Matrizen spielen in der Wirtschaft eine wesentliche Rolle bei der Aufstellung mathematischer Modelle.
Bereits die im Beisp.5.2 und 6.2 gegebenen praktischen Anwendungen zeigen anschaulich, dass *Matrizen* nicht nur übersichtliche Darstellungen *ökonomischer Sachverhalte* liefern, sondern dass man mit ihrer Hilfe *ökonomische Vorgänge* darstellen kann:

- Man findet Matrizen u.a. in *Input-Output-Modellen, Kosten-, Verflechtungs-, Produktions-* und *Transportmodellen*.
- Matrizen treten in *Modellen* auf, die durch *lineare Gleichungen* und *Ungleichungen* beschrieben sind.
- Matrizen bilden ein wichtiges Hilfsmittel, um große verflochtene Systeme der Volks- und Betriebswirtschaft beschreiben und analysieren zu können.

Bemerkung

In ökonomischen Modellen werden häufig Rechenoperationen mit Matrizen wie Addition, Multiplikation und Berechnung von Inversen benötigt, die wir im Folgenden besprechen (siehe auch Beisp.5.2).
♦

5.3 Operationen mit Matrizen

Matrizen sind als rechteckiges Schema von Elementen definiert:

- Man kann mit ihnen Informationen speichern.
- Weiterhin lassen sich mit ihnen Operationen (Rechenoperationen) durchführen:
  - In den folgenden Abschn.5.4-5.9 stellen wir grundlegende Operationen mit Matrizen (*Matrizenoperationen*) vor.
  - Da in ökonomischen Modellen auftretende Matrizen meistens umfangreich sind, d.h. eine größere Anzahl von Zeilen und Spalten besitzen, sind durchzuführende Matrizenoperationen nur mittels Computer effektiv realisierbar. EXCEL ist hierfür gut geeignet, wie im Abschn.5.4-5.9 illustriert ist.
  - Zur Durchführung von Matrizenoperationen ist es in EXCEL vorteilhaft, in Tabellen eingegebenen Matrizen und Vektoren jeweils Namen zuzuweisen, wie im Abschn.2.5 und 5.1.3 beschrieben ist.

- Für *Produktionsvektor* $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und *Rohstoffvektor* $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

  ergibt sich unter Verwendung der Verflechtungsmatrix ein Zusammenhang in Form des linearen Gleichungssystems $\mathbf{b} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}$ (siehe auch Beisp.6.2a), d.h. ein *Verflechtungsmodell*, das sich folgendermaßen erklären lässt:

  * Die Komponenten x_j des Produktionsvektors beinhalten die Mengen der hergestellten Produkte P_j ($j = 1, 2, ... , n$).
  * Die Komponenten b_i des Rohstoffvektors beinhalten den Bedarf an Rohstoffen R_i ($i = 1, 2, ... , m$).
  * Die i-te Komponente $b_i = v_{i1} \cdot x_1 + ... + v_{in} \cdot x_n$ des Rohstoffvektors (i-te Zeile des Gleichungssystems $\mathbf{b} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}$) liefert die Gesamtmenge des Rohstoffs R_i, die zur Produktion von x_1 ME des Produkts P_1, x_2 ME des Produkts P_2, ... , x_n ME des Produkts P_n benötigt wird.

- Bei gestaffelten Produktionsabläufen erfolgt die Produktion der Endprodukte über die Produktion von Zwischenprodukten. In diesem Fall ergibt sich die *Gesamtverflechtungsmatrix* in der Form $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \ldots \cdot \mathbf{V}_s$, d.h. als Produkt der Verflechtungsmatrizen $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, ..., \mathbf{V}_s$ der Zwischenproduktionen.

c) Stellen wir ein *Produktionsmodell* vor:

- Bei der *Bedarfsmatrix*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3m} \\ b_{41} & b_{42} & \cdots & b_{4m} \end{pmatrix}$$

  bezeichnen die Elemente b_{ij} ($i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, ..., m$) den Bedarf eines Betriebes am Rohstoff R_j (in ME) im i-ten Quartal.

- Bei der *Preismatrix*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

  bezeichnen die Elemente p_{jk} ($j = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n$) den Preis (in GE) des Rohstoffs R_j pro ME beim k-ten Lieferanten.

Beispiele

5.4 Transponieren von Matrizen

5.4.1 Definition

Das *Transponieren* einer Matrix **A**:

- ist als Vertauschen von Zeilen und Spalten definiert.
- liefert als Ergebnis eine Matrix $\mathbf{A}^T$, die zu **A** *transponierte Matrix* bzw. *Transponierte* heißt:
  - Ist die Matrix **A** vom Typ (m,n), so besitzt die Transponierte $\mathbf{A}^T$ offensichtlich den Typ (n,m).
  - Die Matrix **A** und ihre Transponierte $\mathbf{A}^T$ sind i.Allg. verschieden und haben unterschiedlichen Typ:
    - ∗ Für quadratische Matrizen besitzen beide den gleichen Typ.
    - ∗ Falls bei quadratischen Matrizen die Gleichheit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ gilt, so ist die Matrix **A** *symmetrisch* (siehe Abschn.5.1.1).

5.4.2 Einsatz von EXCEL

Für das Transponieren von Matrizen stellt EXCEL die Matrizenfunktion **MTRANS** zur Verfügung.

Mit ihrer Hilfe geschieht das Transponieren einer in der aktuellen Tabelle befindlichen Matrix, für die der Name **A** definiert ist, in folgenden Schritten (siehe Beisp.5.3):

I. In der Tabelle ist ein freier Bereich (*Ergebnisbereich*) für die transponierte Matrix mittels gedrückter Maustaste zu markieren.

II. Danach ist =**MTRANS** (**A**) als Formel in die linke obere Zelle des markierten Ergebnisbereichs einzugeben.

III. Die abschließende Betätigung der Tastenkombination Strg ⇧ ↵ löst die Berechnung der Transponierten aus, wobei die Formel von EXCEL in geschweifte Klammern gesetzt wird, d.h. { =**MTRANS** (**A**) }.

5.5 Addition und Subtraktion von Matrizen

5.5.1 Definition

Addition und Subtraktion von Matrizen gestalten sich folgendermaßen:

- Es ist zu beachten, dass *Addition/Subtraktion* $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ zweier Matrizen **A** und **B** nur definiert ist, wenn beide den gleichen Typ besitzen.
- Zwei Matrizen **A** und **B** vom gleichen Typ (m,n) werden addiert oder subtrahiert, indem entsprechende Elemente beider Matrizen addiert bzw. subtrahiert werden, d.h. für die Elemente c_{ij} der *Ergebnismatrix* $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ gilt

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots , m ; j = 1, 2, \ldots , n)$$

- Das Produkt **B** · **P** von Bedarfs- und Preismatrix ist eine Matrix vom Typ (4,n) und liefert die quartalsweise berechneten Kosten des nach Lieferanten geordneten Gesamtbedarfs.

d) Stellen wir ein *Transportmodell* vor: Bei der *Transportmatrix*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \dots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

bezeichnen die Elemente t_{ij} $(i = 1 , 2 , \dots , m ; j = 1, 2, \dots , n)$

die Kosten (in GE) beim Transport einer ME der zu transportierenden Ware vom Ort i zum Ort j.

Beispiel 5.3:

Im folgenden Tabellenausschnitt ist ein Beispiel für die Berechnung der *Transponierten* einer Matrix **A** zu sehen, die für den Bereich Z1S1**:**Z2S3 definiert ist:

- Für die zu berechnende transponierte Matrix ist der Bereich Z4S1**:**Z6S2 markiert und in Zelle Z4S1 die EXCEL-Matrizenfunktion =**MTRANS**(**A**) eingegeben.
- Die vollständige Anwendung der Schritte I-III aus Abschn. 5.4.2 liefert die angezeigte transponierte Matrix:

Z4S1 | fx {=MTRANS(A)}

	1	2	3	4
1	1	2	3	
2	4	5	6	
3				
4	1	4		
5	2	5		
6	3	6		

Beispiel 5.4:

Im folgenden Tabellenausschnitt ist ein Beispiel für die *Addition* und *Subtraktion* zweier Matrizen zu sehen, wobei die Matrix **A** für den Bereich Z1S1**:**Z2S2 und die Matrix **B** für den Bereich Z4S1**:**Z5S2 definiert sind:

- Die durch Addition bzw. Subtraktion berechnete Ergebnismatrix findet man im Bereich Z1S3**:**Z2S4 bzw. Z4S3**:**Z5S4.
- Die angezeigten Ergebnisse wurden durch Anwendung der Schritte I-III aus Abschn. 5.5.2 erhalten:

5.5.2 Einsatz von EXCEL

Die Addition/Subtraktion zweier in der aktuellen Tabelle befindlicher Matrizen, für die Namen **A** bzw. **B** definiert sind, geschieht in folgenden Schritten (siehe Beisp.5.4):

I. In der Tabelle ist ein freier Bereich (*Ergebnisbereich*) für die zu berechnende Ergebnismatrix **C** = **A** ± **B** mittels gedrückter Maustaste zu markieren.

II. Danach werden = **A**+**B** bzw. = **A**–**B** als Formel in die linke obere Zelle des markierten Ergebnisbereichs eingegeben.

III. Die abschließende Betätigung der Tastenkombination Strg ⇧ ↵ löst die Berechnung der Addition/Subtraktion aus, wobei EXCEL die Formel in geschweifte Klammern setzt, d.h. {=**A**+**B**} bzw. {=**A**–**B**}.

5.6 Multiplikation von Matrizen

5.6.1 Definition

Die *Multiplikation* von Matrizen gestaltet sich folgendermaßen:

- Für die Multiplikation **A**·**B** müssen beide Matrizen **A** und **B** *verkettet* sein, d.h. **A** muss genauso viele Spalten haben, wie **B** Zeilen besitzt. Dies bedeutet, wenn **A** vom Typ (m,n) ist, muss **B** vom Typ (n,r) sein.

- Die *Ergebnismatrix* **C** = **A** · **B** ist vom Typ (m,r) und ihre Elemente c_{ij} berechnen sich als Skalarprodukte von i-ten Zeilenvektoren der Matrix **A** und j-ten Spaltenvektoren der Matrix **B** in der Form

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots , m ; j = 1, 2, \ldots , r)$$

- Die Multiplikation von Matrizen ist eine kompliziertere Operation als Addition/Subtraktion und besitzt andere Eigenschaften als die Multiplikation von Zahlen:
  - Das kommutative Gesetz gilt nicht, da allgemein **A**·**B** verschieden von **B**·**A** ist, wobei das Produkt **B**·**A** nur im Falle quadratischer Matrizen **A** und **B** existiert.
  - Es ist keine Division von Matrizen definiert. Man kennt nur unter zusätzlichen Voraussetzungen eine Inversion, die im Abschn.5.7.1 besprochen wird.

- Die Multiplikation einer Matrix **A** mit einer reellen Zahl s bewirkt, dass jedes Element von **A** mit s multipliziert wird, d.h.

$$s \cdot \mathbf{A} = \left(s \cdot a_{ij} \right)$$

Z1S3		f_x {=A+B}		
	1	2	3	4
1	1	2	6	8
2	3	4	10	12
3				
4	5	6	-4	-4
5	7	8	-4	-4

Beispiel 5.5:
Im folgenden Tabellenausschnitt ist ein Beispiel für die *Multiplikation* zweier Matrizen **A** und **B** mittels der EXCEL-Matrizenfunktion **MMULT** zu sehen, wobei **A** für den Bereich Z1S1**:**Z2S2 und **B** für den Bereich Z4S1**:**Z5S3 definiert sind:

Z1S4		f_x {=MMULT(A;B)}				
	1	2	3	4	5	6
1	1	2		21	24	27
2	3	4		47	54	61
3						
4	5	6	7	5	12	#NV
5	8	9	10	24	36	#NV
6						
7				#WERT!	#WERT!	#WERT!
8				#WERT!	#WERT!	#WERT!

- Die mittels =**MMULT** (**A** ; **B**) durch Anwendung der Schritte I-III aus Abschn.5.6.2 berechnete Ergebnismatrix befindet sich im Bereich Z1S4**:**Z2S6.
- Zusätzlich wird
  - im Bereich Z4S4**:**Z5S6 die Formel =**A**·**B** angewandt, die die Multiplikation der entsprechenden Elemente der Matrizen **A** und **B** bewirkt. In den Zellen Z4S6 und Z5S6 wird als Ergebnis die *Fehlermeldung* #NV angezeigt, da die Matrix **A** nur zwei Spalten besitzt.
  - im Bereich Z7S4**:**Z8S6 die Multiplikation =**MMULT** (**B** ; **A**) angewandt, die jedoch nicht möglich ist, da **B** nicht mit **A** verkettet ist. EXCEL erkennt dies und gibt die *Fehlermeldung* #WERT! aus.

Beispiel 5.6:
Illustrieren wir die Berechnung *inverser Matrizen* mittels der EXCEL-Matrizenfunktion **MINV**:

a) Im folgenden Tabellenausschnitt wird die zur Matrix **A** gehörige Inverse berechnet, wobei **A** als Name für den Bereich Z1S1**:**Z3S3 definiert ist:

5.6.2 Einsatz von EXCEL

Für die Multiplikation von Matrizen stellt EXCEL die Matrizenfunktion **MMULT** zur Verfügung:

- Mit ihr geschieht die Multiplikation zweier in der aktuellen Tabelle befindlicher Matrizen, für die Namen **A** bzw. **B** definiert sind, in folgenden Schritten (siehe Beisp.5.5):
  I. In der Tabelle ist ein freier Bereich (*Ergebnisbereich*) für die zu berechnende Ergebnismatrix mittels gedrückter Maustaste zu markieren.
  II. Danach ist =**MMULT** (**A** ; **B**) als Formel in die linke obere Zelle des markierten Ergebnisbereichs einzugeben.
  III. Die abschließende Betätigung der Tastenkombination Strg ⇧ ↵ löst die Berechnung der Multiplikation aus, wobei die Formel von EXCEL in geschweifte Klammern gesetzt wird, d.h. { =**MMULT** (**A** ; **B**) }.
- Bei der Multiplikation von Matrizen mittels EXCEL ist Folgendes zu beachten:
  - Falls man versehentlich die Multiplikation zweier Matrizen **A** und **B** durch Eingabe der Formel = **A** · **B** durchführt, so berechnet EXCEL eine Ergebnismatrix **C**, deren Elemente c_{ij} sich als Produkt der entsprechenden Elemente der Matrizen **A** und **B** berechnen (siehe Beisp.5.5), d.h.

    $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$

    Dies ist jedoch nicht das Ergebnis der in der Mathematik definierten Matrizenmultiplikation.
  - Falls man zwei Matrizen miteinander multipliziert, die nicht verkettet sind, so gibt EXCEL bei Anwendung der Matrizenfunktion **MMULT** die *Fehlermeldung* #WERT! aus (siehe Beisp.5.5).

5.7 Inversion von Matrizen

5.7.1 Definition

Inverse Matrizen werden u.a. zur Lösung linearer Gleichungssysteme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ und von Matrizengleichungen der Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ benötigt:

- Man kann diese Gleichungen nicht unmittelbar nach dem Vektor **x** bzw. der Matrix **X** auflösen, da eine Division für Matrizen nicht definiert ist.
- Eine Auflösung gelingt jedoch für reguläre quadratische Matrizen **A** durch Einführung der *Inversen* (*inversen Matrix*):
  - Für quadratische Matrizen **A** definiert sich die *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$ durch die Matrizengleichung

    $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$

Z7S1		fx	{=MINV(A)}
	1	2	3
1	1	2	3
2	1	3	3
3	1	2	4
4			
5	1		
6			
7	6	-2	-3
8	-1	1	0
9	-1	0	1

Aus dem Tabellenausschnitt ist Folgendes zu sehen:

- Die Berechnung der Determinante (= 1) der eingegebenen Matrix **A** mittels =**MDET**(**A**) in Zelle Z5S1 zeigt, dass **A** regulär ist und somit eine Inverse besitzt.
- Im Bereich Z7S1**:**Z9S3 ist die Inverse von **A** mittels =**MINV**(**A**) durch Anwendung der Schritte I-III aus Abschn.5.7.2 berechnet.

b) Im folgenden Tabellenausschnitt ist die Matrix **A** für den Bereich Z1S1**:**Z3S3 definiert:

- Diese Matrix ist singulär, wie die Berechnung der Determinante von **A** in Zelle Z5S1 (= 0) zeigt. Damit existiert für **A** *keine Inverse*.
- EXCEL erkennt dies bei der Berechnung mittels =**MINV**(**A**) und gibt im Bereich Z7S1**:**Z9S3 der Ergebnismatrix die *Fehlermeldung* #ZAHL! aus:

Z7S1		fx	{=MINV(A)}
	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	7	2	9
4			
5	0		
6			
7	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!
8	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!
9	#ZAHL!	#ZAHL!	#ZAHL!

Beispiel 5.7:

Berechnen wir das *Skalarprodukt* zweier Vektoren **a** und **b** unter Verwendung der EXCEL-Funktionen **MMULT** und **MTRANS** bzw. **SUMMENPRODUKT**:

d.h. das Produkt aus Matrix und ihrer Inversen muss die Einheitsmatrix **E** ergeben.

- Bei der Bildung der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ ist zu beachten, dass diese nur für reguläre Matrizen **A** möglich ist (siehe Abschn.5.1.1).
  In diesem Fall besitzen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ den Lösungsvektor $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$ bzw. die Lösungsmatrix $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$, wobei die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ eindeutig bestimmt ist.
- Für die Inverse gelten folgende *Rechenregeln* (**A** , **B** - reguläre quadratische Matrizen , c-reelle Zahl):
  $$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A} \ , \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, \ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \ (\mathrm{c} \cdot \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\mathrm{c}} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

- Die Berechnung inverser Matrizen ist sehr aufwendig, so dass diese per Hand nur für Matrizen bis zur Ordnung 4 vertretbar ist. Deshalb verzichten wir auf die Vorstellung von Berechnungsformeln und empfehlen den Einsatz von EXCEL.

5.7.2 Einsatz von EXCEL

Zur Berechnung der Inversen einer Matrix stellt EXCEL die Matrizenfunktion **MINV** zur Verfügung:

- Mittels **MINV** geschieht die Inversion einer in der Tabelle befindlichen Matrix, für die der Name **A** definiert ist, in folgenden Schritten (siehe Beisp.5.6):
  I. In der Tabelle ist ein freier Bereich (*Ergebnisbereich*) für die zu berechnende Inverse mittels gedrückter Maustaste zu markieren.
  II. Danach ist =**MINV** (**A**) als Formel in die linke obere Zelle des markierten Ergebnisbereichs einzugeben.
  III. Die abschließende Betätigung der Tastenkombination Strg ⇧ ↵ löst die Berechnung der Inversen aus, wobei die Formel von EXCEL in geschweifte Klammern gesetzt wird, d.h. { = **MINV** (**A**) }.
- Hat man mit EXCEL eine Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet, so sollte man als *Probe* zusätzlich das Produkt $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ oder $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ berechnen, das die Einheitsmatrix **E** ergeben muss.
- Falls man versehentlich die Inverse einer singulären Matrix berechnen will, gibt EXCEL im Einklang mit der mathematischen Theorie eine *Fehlermeldung* #ZAHL aus, wie im Beisp.5.6b illustriert ist.

5.8 Skalarprodukt von Vektoren

5.8.1 Definition

Das *Skalarprodukt* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ist eine Multiplikationsoperation für beliebige n-dimensionale Vektoren **a** und **b** und folgendermaßen charakterisiert:

- Es berechnet sich als Summe der Produkte entsprechender Komponenten beider Vektoren **a** und **b**, d.h.

a) Für die beiden *Zeilenvektoren* Z1S1**:**Z1S4 und Z3S1**:**Z3S4, für die als Name **a** bzw. **b** definiert ist, gestaltet sich die Berechnung folgendermaßen:

- Da die Matrizenmultiplikation die Verkettung beider Vektoren erfordert, muss bei Anwendung der Matrizenfunktion **MMULT** der Zeilenvektor **b** mittels **MTRANS** in einen Spaltenvektor transponiert werden.
- Im folgenden Tabellenausschnitt ist das berechnete Skalarprodukt zu sehen:
  - Mittels **=MMULT (a ; MTRANS (b))** in Zelle Z5S1
  - Mittels =**SUMMENPRODUKT(a ; b)** in Zelle Z5S2

Z5S1 fx {=MMULT(a;MTRANS(b))}

	1	2	3	4	
1	1	2	3	4	
2					
3	5	6	7	8	
4					
5	70	70			

b) Im folgenden Tabellenausschnitt berechnen wir das *Skalarprodukt* **a** · **b**, wobei *Spaltenvektoren* Z1S1**:**Z4S1 und Z1S3**:**Z4S3 vorliegen, für die Namen **a** bzw. **b** definiert sind:

- Da **MMULT** die Verkettung der beiden Vektoren erfordert, ist sie bei Spaltenvektoren im Unterschied zu Beisp.5.7a in der Form =**MMULT** (**MTRANS** (**a**) **; b**) anzuwenden. Das hiermit berechnete Skalarprodukt befindet sich in Zelle Z6S1.
- Das mittels =**SUMMENPRODUKT** (**a ; b**) berechnete Skalarprodukt ist in Zelle Z6S2 zu sehen.

Z6S2 fx =SUMMENPRODUKT(a;b)

	1	2	3	4	5
1	1		5		
2	2		6		
3	3		7		
4	4		8		
5					
6	70	70			

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

- Offensichtlich ist das Skalarprodukt ein auf Vektoren angewandter Sonderfall der Matrizenmultiplikation:
  Wenn **a** und **b** Zeilen- bzw. Spaltenvektoren sind, so ergibt sich das Skalarprodukt mittels Matrizenmultiplikation aus $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$ bzw. $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$.
- Das Skalarprodukt wird in einer Reihe von Anwendungen benötigt, so z.B. zur Berechnung der Länge $|\mathbf{a}|$ eines Vektors **a**:

  $$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T} = \sqrt{\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}}$$

  wobei die erste Formel für Zeilenvektoren und die zweite für Spaltenvektoren gilt. Wir illustrieren die Längenberechnung für Vektoren im Beisp.5.9.

5.8.2 Einsatz von EXCEL

In EXCEL bestehen zur Berechnung von Skalarprodukten folgende Möglichkeiten:

- Da das Skalarprodukt ein Sonderfall der Matrizenmultiplikation ist, können die Matrizenfunktionen **MMULT** und **MTRANS** zur Berechnung verwendet werden (siehe Beisp.5.7).
- Effektiv gestaltet sich die Berechnung von Skalarprodukten mittels der Matrizenfunktion **SUMMENPRODUKT**, die entsprechenden Elemente zweier Matrizen multipliziert und addiert (siehe Beisp.5.7).
- Es kann ein VBA-Programm zur Berechnung von Skalarprodukten geschrieben werden, wie im Beisp.5.8 illustriert ist.

5.9 Determinanten

Determinanten besitzen keine unmittelbare ökonomische Anwendung, werden jedoch in einer Reihe von Aufgaben der Wirtschaftsmathematik benötigt, so z.B. zur Lösung linearer Gleichungssysteme (siehe Abschn.6.4.3) und zur Berechnung von Eigenwerten für Matrizen (siehe Abschn.6.6).
Im Folgenden geben wir eine kurze Einführung in die Problematik von Determinanten.

5.9.1 Definition

Quadratischen n-reihigen Matrizen **A**, deren Elemente reelle Zahlen sind, kann mittels einer n-reihigen *Determinante*

$$\text{Det}\,\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

eine reelle Zahl zugeordnet werden.

Beispiel 5.8:
Schreiben wir für die Berechnung von Skalarprodukten ein VBA-Funktionsprogramm SKALARPRODUKT, das für zwei in einer EXCEL-Tabelle definierte n-dimensionale Vektoren das Skalarprodukt berechnet:

```
Function SKALARPRODUKT ( a , b , n )
'Berechnung des Skalarprodukts von zwei n-dimensionalen Vektoren a und b
Dim i As Integer
SKALARPRODUKT = 0
For i = 1 To n
SKALARPRODUKT = SKALARPRODUKT + a(i) * b(i)
Next i
End Function
```

Im folgenden Tabellenausschnitt wenden wir in Zelle Z5S1 die programmierte VBA-Funktion =SKALARPRODUKT(a;b;4) zur Berechnung des Skalarprodukts für die beiden Vektoren mit 4 Komponenten im Bereich Z1S1**:**Z1S4 bzw. Z3S1**:**Z3S4 an, für die Namen **a** bzw. **b** definiert sind:

Z5S1 | =SKALARPRODUKT(a;b;4)

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	
2					
3	5	6	7	8	
4					
5	70				

Beispiel 5.9:
Geben wir im folgenden Tabellenausschnitt eine Illustration für die Berechnung der im Abschn.5.8.1 gegebenen Formel der Länge von Vektoren mittels der EXCEL-Funktionen **SUMMENPRODUKT** und **WURZEL**:

Z2S3 | =WURZEL(SUMMENPRODUKT(a;a))

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2			7,41619849		
3	1				
4	2				
5	3	7,41619849			
6	4				
7	5				

- Wir berechnen die Länge für den Zeilenvektor im Bereich Z1S1**:**Z1S5 bzw. Spaltenvektor im Bereich Z3S1**:**Z3S7, für die als Namen **a** bzw. **b** definiert sind.

Wir gehen im Rahmen des Buches nicht näher auf Definition und mathematische Theorie von Determinanten ein, sondern weisen nur auf folgende wichtige *Eigenschaften* und *Rechenregeln* hin:

- Wenn Det **A** einer n-reihigen Matrix **A** ungleich Null ist, so ist die Matrix **A** *regulär*, d.h. sie besitzt *Rang* n und somit eine *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$.
- Der Wert der Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen. Dies ist eine wesentliche Eigenschaft zur effektiven Berechnung von Determinanten, da man diese auf Dreiecksgestalt bringen kann, wie im Folgenden zu sehen ist (siehe auch Beisp.5.10c).
- Die Idee des *Gaußschen Algorithmus* zur Lösung linearer Gleichungssysteme lässt sich auch zur Berechnung von Determinanten heranziehen, indem man diese durch Umformungen von Zeilen bzw. Spalten auf eine Dreiecksgestalt bringt, wobei man folgende Eigenschaften ausnutzt:
  - Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert.
  - Eine Determinante ist gleich Null, wenn zwei Zeilen linear abhängig sind, d.h. gleich oder zueinander proportional.
  - Das Vertauschen zweier Zeilen bewirkt eine Vorzeichenänderung der Determinante.
  - Man multipliziert eine Determinante mit einer Zahl, indem man eine beliebige Zeile der Determinante mit dieser Zahl multipliziert.
  - Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man in ihr die Zeilen mit den Spalten vertauscht und umgekehrt:
    - Es gilt Det $\mathbf{A}$ = Det $\mathbf{A}^{T}$.
    - Damit gelten alle für Zeilen angegebenen Eigenschaften und Rechenregeln auch für Spalten.
- Für zwei und dreireihige Determinanten existieren einfache Berechnungsformeln, die wir im Beisp.5.10a und b vorstellen.
- Die Berechnung von Determinanten gestaltet sich sehr aufwendig, so dass diese per Hand nur für Matrizen bis zur Ordnung 4 vertretbar sind (siehe Beisp.5.10).
  Zur Berechnung praktisch anfallender Determinanten höherer Ordnung ist der Einsatz von Computern erforderlich, so z.B. mittels EXCEL.

- Beide Vektoren mit gleichen Komponenten haben natürlich die gleiche Länge 7,41619849, die EXCEL in Zelle Z2S3 bzw. Z5S2 mittels der geschachtelten Funktionen
  = **WURZEL (SUMMENPRODUKT (a ; a))** bzw.
  = **WURZEL (SUMMENPRODUKT (b ; b))**
  berechnet, wie aus obigem Tabellenausschnitt zu sehen ist.

Beispiel 5.10:

Illustrieren wir Methoden zur Berechnung von Determinanten:

a) Die Berechnung von Determinanten zweireihiger Matrizen vollzieht sich nach der einfachen Formel

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

b) Die Berechnung von Determinanten dreireihiger Matrizen vollzieht sich nach der *Sarrusschen Regel* folgendermaßen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{matrix}$$

Diese Formel wendet man folgendermaßen effizient an:

- Man schreibt die ersten beiden Spalten der Determinante rechts neben die Determinante.
- Danach berechnet man die Produkte der Diagonalen und addiert bzw. subtrahiert sie.
- Illustrieren wir die Vorgehensweise an der Berechnung der konkreten Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

zu deren Berechnung man die *Sarrussche Regel* folgendermaßen einsetzt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 \\ -3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 4 \end{matrix} = 1\,, \quad \text{d.h.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

c) Eine effektive Berechnungsmethode für Determinanten besteht darin, sie auf *Dreiecksgestalt* zu bringen, so dass sich ihr Wert als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen berechnet:

- Dazu können die im Abschn.5.9.1 angegebenen Umformungen benutzt werden, die den Wert der Determinante nicht ändern.
- Hierzu gehört das Addieren(Subtrahieren) des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen, wie im Folgenden bei der Berechnung der Determinante aus Beisp.5.10b illustriert ist:

5.9.2 Einsatz von EXCEL

Wenn für eine in der Tabelle befindliche Matrix der Name **A** definiert ist, vollzieht sich die Berechnung ihrer Determinante mittels der Matrizenfunktion **MDET** folgendermaßen:

- Die Eingabe als Formel

  = MDET (**A**)

  in eine freie Zelle der aktuellen Tabelle mit abschließender Betätigung der Eingabetaste ↵ löst die Berechnung der Determinante aus (siehe Beisp.5.11a).

- Falls man versehentlich die Determinante einer nichtquadratischen Matrix berechnen möchte, so gibt EXCEL in Einklang mit der mathematischen Theorie die *Fehlermeldung* #WERT! aus, wie im Beisp.5.11b illustriert ist.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- ∗ Man sieht, dass die erste Zeile von der zweiten und danach von der dritten subtrahiert wird.
- ∗ Damit hat die erhaltene Determinante auf der rechten Seite eine Dreiecksgestalt.
- ∗ Der Wert der Determinante ergibt sich folglich als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen der rechten Determinante zu $1\cdot 1\cdot 1 = 1$.

Beispiel 5.11:

Illustrieren wir die Berechnung von *Determinanten* mittels EXCEL:

a) Im folgenden Tabellenausschnitt wird die Determinante aus Beisp.5.10c berechnet, wobei **A** als Name für den Bereich Z1S1**:**Z3S3 definiert ist.
Das von EXCEL mittels =**MDET**(**A**) berechnete Ergebnis befindet sich in Zelle Z1S4:

Z1S4 | fx =MDET(A)

	1	2	3	4
1	1	2	3	1
2	1	3	3	
3	1	2	4	

b) Der folgende Tabellenausschnitt zeigt die Reaktion von EXCEL, wenn man versehentlich die Determinante einer nichtquadratischen Matrix **A** berechnen will, wobei **A** als Name für den Bereich Z1S1**:**Z2S3 definiert ist.
Die von EXCEL bei der Berechnung mittels =**MDET**(**A**) angegebene *Fehlermeldung* #WERT! findet man in Zelle Z4S1 anstatt eines Ergebnisses:

Z4S1 | fx =MDET(A)

	1	2	3	
1	1	2	3	
2	4	5	6	
3				
4	#WERT!			

6 Gleichungen und Ungleichungen

6.1 Einführung

In zahlreichen mathematischen Modellen der Wirtschaft treten Zusammenhänge zwischen veränderlichen Größen (Variablen) in Form von *Gleichungen* und *Ungleichungen* auf, so dass man von Gleichungs- bzw. Ungleichungs-Modellen spricht:

- Die vorkommenden Gleichungen und Ungleichungen werden in zwei Klassen eingeteilt:
  - Man unterscheidet zwischen linearen und nichtlinearen Gleichungen/Ungleichungen.
  - Für lineare Gleichungen/Ungleichungen gibt es eine aussagekräftige Theorie und effektive Lösungsmethoden. Für nichtlineare Gleichungen/Ungleichungen ist die Problematik dagegen wesentlich schwieriger.
- Je nachdem ob auftretende Variablen zeitunabhängig sind oder nicht, unterscheidet man zwischen Arten von Gleichungsmodellen (Ungleichungsmodellen):
  - *Statische Modelle* (zeitunabhängige Modelle):
    Diese werden durch lineare bzw. nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen beschrieben, in denen die Variablen durch Zahlenvariablen realisiert werden. Man spricht kurz von *Gleichungen* und *Ungleichungen*, die den Gegenstand dieses Kapitels bilden:
    * In den Wirtschaftswissenschaften benötigt man hauptsächlich lineare algebraische Gleichungen- und Ungleichungen, die neben Matrizen zu grundlegenden Werkzeugen für das Aufstellen statischer mathematischer Modelle gehören.
    * Im Folgenden befassen wir uns ausführlicher mit linearen Gleichungs- und Ungleichungssystemen (Abschn.6.4 und 6.8.2), und gehen nur kurz auf nichtlineare ein (Abschn.6.7), wobei wir Polynomgleichungen gesondert im Abschn.6.5 vorstellen, da diese Bedeutung für eine Reihe von Aufgaben besitzen.
  - *Dynamische Modelle* (zeitabhängige Modelle):
    Diese werden durch *Differenzen-* bzw. *Differentialgleichungen* beschrieben, die im Kap.10 bzw. 11 vorgestellt werden und die ebenfalls Anwendungen in mathematischen Modellen der Wirtschaft finden.

6.1.1 Gleichungen

In der Mathematik drücken Relationen der Form A = B die Gleichheit zwischen den Werten zweier mathematischer Ausdrücke A und B aus und werden als Gleichungen bezeichnet, wobei die Ausdrücke A und B eine oder mehrere Variable (Unbekannte) enthalten können:

- Werden die Variablen (Unbekannten) mit x bezeichnet, lassen sich Gleichungen in der Form $f(x) = 0$ schreiben, wobei $f(x)$ für einen funktionalen Zusammenhang steht.
- Je nach Art des funktionalen Zusammenhangs $f(x)$ unterscheidet man verschiedene Arten von Gleichungen, so u.a.
  - Algebraische und transzendente Gleichungen

Beispiel 6.1:

Betrachten wir einfache Beispiele, die bereits die Problematik algebraischer und transzendenter Gleichungen erkennen lassen:

a) $5x + 3 = 18$
ist eine lineare *algebraische Gleichung* mit einer Variablen (Unbekannten) x, deren Lösung $x = 3$ sich offensichtlich durch Auflösung nach x ergibt.

b) $x^7 + x + 1 = 0$
ist eine nichtlineare *algebraische Gleichung* (*Polynomgleichung*) mit einer Variablen (Unbekannten) x, die sich im Gegensatz zu Beisp.6.1a nur näherungsweise lösen lässt (siehe Abschn.6.5.1 und Beisp.6.3a).

c) $x + 1 + \sin(x) = 0$
ist eine *transzendente Gleichung* mit einer Variablen (Unbekannten) x, die sich im Gegensatz zu Beisp.6.1a nur näherungsweise lösen lässt.

d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$ ist ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Variablen (Unbekannten) x_1 und x_2, das genau eine Lösung $x_1 = 2, x_2 = 1$ besitzt:

- Eine erste Lösungsmethode (Eliminationsmethode) besteht darin, eine Gleichung nach einer Variablen aufzulösen und das Ergebnis in die andere einzusetzen:
  - Auflösung der ersten Gleichung nach x_1 liefert $x_1 = 3 - x_2$.
  - Einsetzen von $x_1 = 3 - x_2$ in die zweite Gleichung, d.h. $3 - x_2 - x_2 = 1$ und Auflösung nach x_2 liefert die Lösung $x_2 = 1$ für die zweite Variable.
  - Das Einsetzen von $x_2 = 1$ in die erste Gleichung liefert die Lösung $x_1 = 2$ für die erste Variable.
- Diese unter dem Namen *Einsetzungs-* oder *Substitutionsmethode* bekannte Lösungsmethode ist nur bei wenigen Gleichungen und Variablen effektiv anwendbar. Deshalb empfiehlt sich i.Allg. der *Gaußsche Algorithmus*, der im Beisp.6.4a für das gegebene Gleichungssystem zum Einsatz kommt.

Beispiel 6.2:

Im Folgenden stellen wir lineare Gleichungsmodelle vor, die bereits ihre Wichtigkeit in der Wirtschaftsmathematik erkennen lassen:

a) Im Beisp.5.2b wird für ein *Produktionsmodell* die Gleichung $\mathbf{b} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}$ erhalten, in der **b** Rohstoffvektor, **V** Verflechtungsmatrix und **x** Produktionsvektor darstellen:
- Hieraus folgt ein Modell in Form eines linearen Gleichungssystems, wenn Verflechtungsmatrix **V** und Rohstoffvektor **b** gegeben sind.
- Bei diesem Sachverhalt ergibt sich der Produktionsvektor **x**, der die Menge der hergestellten Produkte repräsentiert, als Lösung des *linearen Gleichungssystems* $\mathbf{V} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- Da die Verflechtungsmatrix **V** i.Allg. nicht quadratisch ist, besitzt dieses Gleichungssystem im Falle der Lösbarkeit mehrere Lösungen, wie aus praktischen Gegebenheiten erklärbar ist.

- Differenzengleichungen
- Differentialgleichungen

die grundlegende Bedeutung in mathematischen Modellen der Wirtschaft besitzen.

- Im Folgenden betrachten wir *algebraische* und *transzendente Gleichungen* als einfachste Form von Gleichungen, in denen die Variablen (Unbekannten) x Zahlenvariablen sind und die Funktionen $f(x)$ Zahlenwerte liefern:
  - Wir geben keine exakte mathematische Definition algebraischer und transzendenter Gleichungen, sondern nur folgende anschauliche Interpretationen (siehe auch Beisp. 6.1):
    * Der einfachste Fall liegt vor, wenn eine Gleichung der Form $f(x)=0$ zu lösen ist, wobei $f(x)$ eine mathematische Funktion einer Variablen (Unbekannten) x ist.
    * Je nach Struktur der Funktion $f(x)$ unterscheidet man zwischen zwei Typen von Gleichungen:
      – *Algebraische Gleichungen*
        Hier treten im Funktionsausdruck $f(x)$ nur algebraische Ausdrücke in der Variablen x auf, die dadurch gekennzeichnet sind, dass mit den Variablen x nur Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzierung vorgenommen wurden.
        In mathematischen Modellen der Wirtschaft treten hauptsächlich algebraische Gleichungen auf, so dass wir uns im Folgenden auf diese konzentrieren.
      – *Transzendente Gleichungen*
        Hier treten im Funktionsausdruck $f(x)$ zusätzlich transzendente (trigonometrische, logarithmische und exponentielle) Funktionen auf.
  - Als *Lösungen* von Gleichungen $f(x)=0$ werden diejenigen reellen oder komplexen Zahlen

    x^L

    bezeichnet, die die Gleichungen identisch erfüllen, d.h. wenn man die Variablen x durch die Zahlen x^L ersetzt, muss

    $f(x^L) \equiv 0$

    gelten:
    * Das Lösen einer Gleichung der Form $f(x)=0$ ist offensichtlich äquivalent zur Bestimmung von *Nullstellen* der Funktion $f(x)$.
    * Bei Funktionen $f(x)$ einer Variablen x kann man sich durch grafische Darstellung einen ersten Überblick über reelle Lösungen der Gleichung $f(x)=0$ verschaffen, indem man aus der Grafik der Funktion $f(x)$ Näherungswerte für die Nullstellen abliest.

b) Eine wesentliche Anwendung linearer Gleichungen liefern *Input-Output-Modelle*. Derartige Modelle beschreiben den Austausch und die wechselseitige Verflechtung wirtschaftlicher Größen. In der Regel sind Input-Output-Modelle linear, wofür im Folgenden ein Beispiel zu sehen ist:

- Vom Walrasschen Gleichgewichtsbegriff ausgehend, stellte *Leontief* ein *Verflechtungsmodell* (statisches Input-Output-Modell) auf:
  - Das Modell geht davon aus, dass ein wirtschaftlicher Bereich (Volkswirtschaft, Firma) in n Sektoren aufgeteilt ist.
  - Der Anteil der Produktion des Sektors i, der nicht wieder in einen anderen Sektor k fließt, wird durch die Modellgleichungen

    $$y_i = x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$ beschrieben, mit

    * $x_i \geq 0$ - Bruttoproduktion im Sektor i (Output).
    * $y_i \geq 0$ - Anteil der Produktion im Sektor i, der nicht wieder in einen anderen Sektor k fließt (Endnachfrage).
    * $a_{ik} \geq 0$ - für x_k aus dem Sektor i benötigte Produktionsmenge.
  - Praktisch bedeutet dies, dass nicht die gesamte Produktion x_i zum Verkauf bereitsteht, sondern nur die Menge y_i, d.h. der Eigenverbrauch muss von x_i abgezogen werden.
- Im Weiteren verwendet man *Produktionskoeffizienten*

  $$\alpha_{ik} = \frac{a_{ik}}{x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

  die angeben, wieviel von der Produktion aus dem Sektor i (in ME) in den Sektor k geliefert werden muss, um hier eine Einheit des Produkts zu produzieren. Mit diesen Produktionskoeffizienten gehen die Gleichungen des *Input-Output-Modells* (*Leontief-Modells*) in folgende Form über:

  $$y_i = x_i - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \cdot x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
- Die quadratische Matrix **P** der Produktionskoeffizienten der Ordnung n

  $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

  charakterisiert den Eigenverbrauch der einzelnen Sektoren:
  - Unter Anwendung von **P** lassen sich die n Gleichungen des Input-Output-Modells (*Modellgleichungen*) in folgender Matrizenschreibweise darstellen:

    $$\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{x} \qquad (\mathbf{E} \text{ - Einheitsmatrix})$$

Beispiele

6.1.2 Gleichungssysteme

Da bei praktischen Aufgaben meistens mehrere Variable (Unbekannte) auftreten, ist nicht nur eine Gleichung zu lösen, sondern ein System von m Gleichungen (kurz: *Gleichungssystem*) mit n Variablen $x_1,...,x_n$ der folgenden Form, die wir als *Normalform* bezeichnen, weil auf der rechten Seite 0 steht:

$$f_1(x_1,...,x_n) = 0$$

$$\vdots \qquad \text{vektoriell } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \text{ und } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

$$f_m(x_1,...,x_n) = 0$$

Für *Gleichungssysteme* gelten folgende Sachverhalte:

- Ein Gleichungssystem in *vektorieller Schreibweise* mit Variablenvektor **x** und Funktionenvektor **f** (**x**) hat die gleiche Form wie eine Gleichung. Es ist nur ein *Lösungsvektor* $\mathbf{x}^L$ zu bestimmen, dessen Komponenten von Zahlen gebildet werden.
- Der Typ eines Gleichungssystems bestimmt sich analog wie bei einer Gleichung aus der Struktur der Funktionen **f** (**x**):
  Enthalten alle Funktionen nur algebraische Ausdrücke, so spricht man von algebraischen ansonsten von transzendenten Gleichungssystemen.
- Bei den meisten praktischen Anwendungen ist die Anzahl m der Gleichungen kleiner oder gleich der Anzahl n der auftretenden Variablen, d.h. es gilt m≤n. Ein häufig auftretender Fall ist, dass genau so viele Gleichungen wie Variable (Unbekannte) auftreten (d.h. m = n), so dass unter gewissen Voraussetzungen eine endliche Anzahl von Lösungen existiert.

6.1.3 Ungleichungen

Aus Gleichungen werden *Ungleichungen*, wenn Werte vorgegeben sind, die nicht überschritten werden dürfen:

- Man spricht von *Ungleichungssystemen*, wenn in Gleichungssystemen aus Abschn. 6.1.2 in mindestens einer Gleichung statt des Gleichheitszeichens ein Ungleichheitszeichen auftritt.
- Wir betrachten Ungleichungen ausführlicher im Abschn.6.8.

6.2 Anwendungen in der Wirtschaft

Gleichungen und Ungleichungen treten in zahlreichen statischen mathematischen Modellen der Wirtschaft auf, wobei lineare Gleichungs- und Ungleichungssysteme überwiegen (siehe Abschn.6.4.5 und 6.8.3):

- In der Matrizenschreibweise besitzen die Vektoren **y** (Endnachfragevektor) und **x** (Output-Vektor/Bruttoproduktionsvektor) folgende Form:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Aus den Modellgleichungen $\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{x}$
  lassen sich bei bekannter Matrix **P** der Produktionskoeffizienten
  - *Endnachfrage* **y** berechnen, wenn der Output **x** gegeben ist:
    y ergibt sich durch Multiplikation der Matrix **E–P** mit dem Vektor **x**.
  - *Output* **x** berechnen, wenn die Endnachfrage **y** gegeben ist:
    - * Diese Aufgabenstellung ist für praktische Anwendungen interessant und führt auf die Lösung eines *linearen Gleichungssystems* mit Unbekannten **x**, der Koeffizientenmatrix **E–P** und der rechten Seite **y**.
    - * Falls die Matrix **E–P** regulär ist, ergibt sich die Lösung aus
      $$\mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{y}$$
      d.h. durch Berechnung der Inversen von **E–P** und anschließender Multiplikation mit dem Endnachfragevektor **y**.
    - * Allgemein kann dieses Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus gelöst werden, so z.B. mit dem SOLVER von EXCEL.
- Das *Input-Output-Modell* (*Leontief-Modell*) heißt
  - *offen*, wenn ein y_i größer Null ist,
  - *geschlossen*, wenn für alle $y_i = 0$ gilt. Hier ergibt sich $(\mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot \mathbf{x} = 0$, d.h. der Output **x** berechnet sich als *Eigenvektor* für den *Eigenwert* 1 der Matrix **P**.

Beispiel 6.3:

Illustrieren wir die Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$ mit einer Unbekannten (Variablen) x mittels der in EXCEL integrierten **Zielwertsuche**, die jeweils eine reelle Lösung bestimmen kann.

a) Die *Polynomgleichung* $f(x) = x^7 + x + 1 = 0$
   besitzt nur eine reelle Lösung $x = -0{,}7965576...$
   wie man sich leicht durch grafische Darstellung der Funktion $f(x)$ veranschaulichen kann.

- Die **Zielwertsuche** zur numerischen (näherungsweisen) Berechnung dieser reellen Lösung vollzieht sich in folgenden Schritten:
  I. Zuerst wird mittels der Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen**
     dem Variablennamen x ein Startwert (Anfangswert) für die von der **Zielwertsuche** angewandte numerische Methode zugewiesen (Zellen Z1S1 und Z2S1), wie im Abschn.2.5 beschrieben ist.

- Zu wichtigen Modellen, die Gleichungen verwenden, zählen u.a.:
  - Volkswirtschaftliche Verflechtungsmodelle (statische Input-Output-Modelle), wie z.B. das Leontief-Modell,
  - Gleichgewichtsmodelle,
  - Aufwandsmodelle,
  - Modelle für Bilanzbeziehungen,
  - Modelle zur Ressourcenausnutzung,
  - Modelle zur Kosten- und Leistungsverrechnung.
- In den Beisp.6.2, 6.13 und 6.14 findet man praktische Anwendungen, die bereits die fundamentale Bedeutung von Gleichungen und Ungleichungen in statischen mathematischen Modellen der Wirtschaft erkennen lassen.

6.3 Einsatz von EXCEL

EXCEL ist bei der Lösung von Gleichungen und Ungleichungen ein wirksames Hilfsmittel:

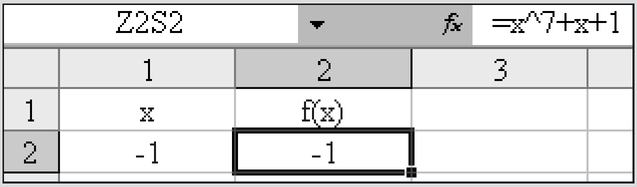
- In EXCEL selbst ist nur die **Zielwertsuche** integriert, mit deren Hilfe man reelle Lösungen einer Gleichung mit einer Variablen näherungsweise berechnen kann (siehe Abschn.6.3.1).
- Zur Lösung von Gleichungs- und Ungleichungssystemen ist der SOLVER anzuwenden (siehe Abschn.6.3.2):
  - Dies ist ein sogenanntes Add-In, das von der Softwarefirma FRONTLINE SYSTEMS angeboten wird und sich in einer Minimalversion auf der Installationsdiskette von EXCEL befindet.
  - Der SOLVER muss in EXCEL extra aktiviert werden, wie im Beisp.3.2 beschrieben ist.

6.3.1 Zielwertsuche

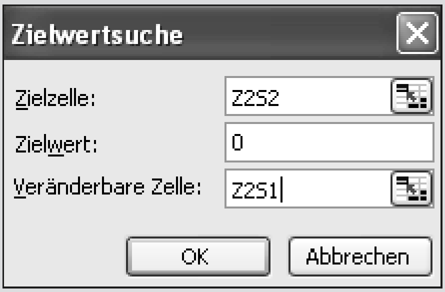
Die **Zielwertsuche** von EXCEL lässt sich zur Lösung von Gleichungen heranziehen:

- Sie wird jedoch relativ selten angewandt, da sie nur eine Gleichung lösen kann und folglich das zu EXCEL mitgelieferte Add-In SOLVER vorzuziehen ist.
- Im Folgenden stellen wir die **Zielwertsuche** kurz vor und illustrieren ihre Anwendung im Beisp.6.3:
  - Wenn sich in einer Zelle einer EXCEL-Tabelle eine Formel befindet, die verschiedene Zahlenwerte liefern kann, so lässt sich die **Zielwertsuche** verwenden, um einen bestimmte Wert zu erhalten. Sie wird durch die Menüfolge **Extras** $\Rightarrow$ **Zielwertsuche** gestartet.
  - Mittels des erscheinenden Dialogfeldes **Zielwertsuche**

II. Danach gibt man in eine Zelle Z2S2 der Tabelle die Funktion $f(x)$ als Formel ein. Der in Zelle Z1S2 stehende Text $f(x)$ dient nur zur Information, dass in der darunterliegenden Zelle der Funktionsausdruck als Formel steht.
Da für x der Startwert –1 gewählt ist, steht in Zelle Z2S2 der Funktionswert $f(-1)=-1$, wie im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen ist:



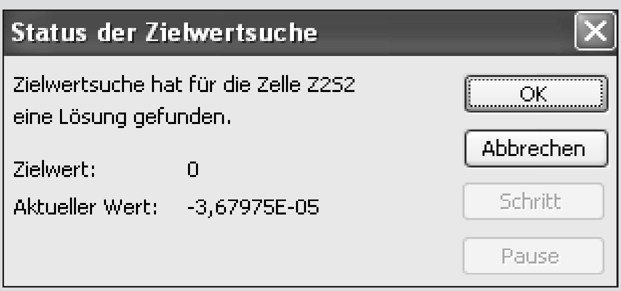
III. Anschließend wird das Dialogfeld **Zielwertsuche** mittels der Menüfolge **Extras ⇒ Zielwertsuche** aufgerufen



und Folgendes eingetragen:

- In *Zielzelle* die Zelle Z2S2, mit der Formel des Funktionsausdrucks $f(x)$.
- In *Zielwert* der Wert 0.
- In *Veränderbare Zelle* die Zelle Z2S1 mit den veränderbaren x-Werten.

IV. Nach abschließendem Anklicken von OK im Dialogfeld **Zielwertsuche** erscheint das Dialogfeld **Status der Zielwertsuche**, in dem angezeigt wird, dass eine Lösung gefunden wurde:



- Die von der **Zielwertsuche** gefundene Lösung x = –0,7965576 wird für x anstelle des Startwertes angezeigt, wie im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen ist:

lässt sich eine Gleichung mit einer Variablen (Unbekannten) lösen, wie im Beisp. 6.3a illustriert ist.

- Die **Zielwertsuche** kann nur reelle und keine komplexen Lösungen einer Gleichung näherungsweise bestimmen.
- Die Zielwertsuche gibt eine Fehlermeldung für den Fall aus, dass nur komplexe Lösungen existieren (siehe Beisp.6.3b).

6.3.2 SOLVER

Der SOLVER liefert in EXCEL ein effektives Hilfsmittel zur numerischen Lösung beliebiger *Gleichungs-* und *Ungleichungssysteme:*

- Beim Einsatz des SOLVERS sind *folgende Schritte* erforderlich, wobei zur Vereinheitlichung alle zu lösenden Gleichungen und Ungleichungen auf *Normalform* zu bringen sind, bei der auf der rechten Seite 0 steht:

  I. Zuerst trägt man in zusammenhängende Zellen einer Zeile der Tabelle die Namen der auftretenden Variablen ein und darunter ihre *Startwerte* für die vom SOLVER verwendete numerische Lösungsmethode:

  - Kennt man keine Näherungswerte für die Lösung, so wählt man beliebige Startwerte.
  - Anschließend markiert man die Zellen der Variablennamen mit darunterstehenden Startwerten, aktiviert die Menüfolge

    Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen

    und klickt im erscheinenden Dialogfeld **Namen erstellen** das Kontrollfeld *Oberster Zeile* an:

    ∗ Damit werden für die Variablen die eingetragenen Namen erstellt, denen die eingetragenen Startwerte zugewiesen werden.

    ∗ Da EXCEL keine indizierten Variablen kennt, kann man ihre Namen z.B. in der Form x1 , x2 , ... , xn schreiben.

  II. Danach trägt man in zusammenhängende Zellen einer Zeile oder Spalte der Tabelle die zu lösenden *Gleichungen* bzw. *Ungleichungen* als Text ein, d.h. im Textmodus. Dies dient zur besseren Darstellung und Veranschaulichung und kann weggelassen werden.

Z2S2 =x^7+x+1

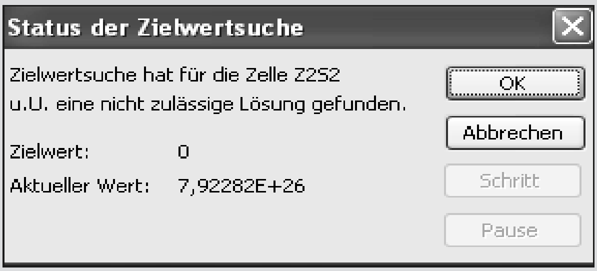
	1	2	3
1	x	f(x)	
2	-0,7965576	-3,68E-05	

b) Die *quadratische Gleichung* $x^2 + 2 \cdot x + 2 = 0$
besitzt keine reelle Lösung, sondern nur die beiden komplexen Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

die sich mit der Lösungsformel aus Abschn.6.5.1 berechnen lassen:

- Testen wir die Anwendung der **Zielwertsuche** von EXCEL mit dem Startwert x = 0.
- Im Dialogfeld **Status der Zielwertsuche**



sehen wir die Reaktion der **Zielwertsuche**, die nur reelle Lösungen berechnen kann:
- Es wird eine *Fehlermeldung* gegeben.
- Trotz Fehlermeldung wird für x in Zelle Z2S1 ein falscher reeller Wert angezeigt, wie aus folgendem Tabellenausschnitt zu sehen ist:

Z2S2 =x^2+2*x+2

	1	2	3
1	x	f(x)	
2	-2,815E+13	7,9228E+26	

Beispiel 6.4:
Betrachten wir im Folgenden einfache lineare Gleichungssysteme, bei denen die im Abschn.6.4.2 gegebenen möglichen Lösungsfälle auftreten:

a) Das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 - x_2 = 1$$

besitzt *genau eine Lösung* $x_1 = 2$, $x_2 = 1$:

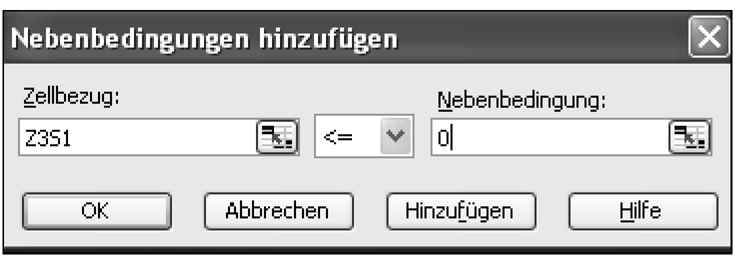
- Man erhält diese Lösung durch Anwendung des *Gaußschen Algorithmus* auf die erweiterte Koeffizientenmatrix, indem man
  - zuerst die erste Zeile von der zweiten subtrahiert,

III. Anschließend trägt man in leere Zellen die linken Seiten der zu lösenden Gleichungen bzw. Ungleichungen als Formeln ein. Falls man die Gleichungen/Ungleichungen schon im Textmodus eingetragen hat (Schritt II), wird man die entsprechende Formel in eine Zelle daneben bzw. darunter eintragen (siehe Beisp.6.10).

IV. Danach wird der SOLVER mittels der Menüfolge **Extras** ⇒ **Solver** aktiviert und das erscheinende Dialogfeld **Solver-Parameter**

wie folgt ausgefüllt:

- In *Zielzelle* ist nichts einzutragen.
- Bei *Zielwert* ist *Wert* anzuklicken.
- In *Veränderbare Zellen* ist der Bereich der Startwerte für die Variablen einzutragen. Dies geht am einfachsten durch Überstreichen dieses Bereichs mit gedrückter Maustaste.
- In *Nebenbedingungen* sind die einzelnen zu lösenden Gleichungen/Ungleichungen durch Anklicken von *Hinzufügen* einzutragen, indem man das erscheinende Dialogfeld **Nebenbedingungen hinzufügen**



wie folgt ausfüllt:

- abschließend die erhaltene zweite Gleichung durch –2 dividiert und danach von der ersten subtrahiert.

- Aus der letzten umgeformten erweiterten Koeffizientenmatrix kann man die Lösung des Gleichungssystems unmittelbar ablesen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{d.h. } x_1 = 2\,,\ x_2 = 1$$

b) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 &= 5 \end{aligned}$$ besitzt *keine Lösung:*

- Man erhält diese Aussage durch Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- Durch Subtraktion der mit 2 multiplizierten ersten Zeile von der zweiten, lassen sich Rang 1 für die Koeffizientenmatrix und Rang 2 für die erweiterte Koeffizientenmatrix ablesen, so dass laut Theorie keine Lösung existiert.

c) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 &= 6 \end{aligned}$$ besitzt beliebig (unendlich) viele Lösungen der Form $x_1 = 3 - c, x_2 = c$

(c – beliebige reelle Zahl)

- Man erhält diese Lösungen durch Anwendung des Gaußschen Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Die Subtraktion der mit 2 multiplizierten ersten Zeile von der zweiten liefert für die zweite Zeile einen Nullvektor, so dass nur eine Gleichung

  $x_1 + x_2 = 3$

  für zwei Variable übrigbleibt, in der man eine Variable vorgeben kann, wie z.B. $x_2 = c$, so dass man die angegebenen Lösungen erhält.

Beispiel 6.5:

Illustrieren wir am einfachen linearen Gleichungssystem aus Beisp.6.4a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$ mit Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

die Lösung mittels *inverser Matrix* bzw. *Cramerscher Regel:*

a) Die *Lösung* $x = A^{-1} \cdot b$ des Gleichungssystems mittels *inverser Matrix* lässt sich mit EXCEL folgendermaßen berechnen:

  - ∗ Die Zelladresse (z.B. Z3S1) für die Formel der Gleichung/Ungleichung wird bei *Zellbezug* mittels Mausklick auf die entsprechende Zelle eingefügt.
  - ∗ Danach werden Gleichheitszeichen (=) bzw. Ungleichheitszeichen (z.B. <=) und bei *Nebenbedingung* eine 0 eingetragen, wenn in der gewählten Zelle der Ausdruck der linken Seite der Gleichung bzw. Ungleichung in Normalform steht.
  - ∗ Das abschließende Anklicken von OK bewirkt das Einfügen so eingetragener Gleichungen/Ungleichungen im Dialogfeld **Solver-Parameter** bei *Nebenbedingungen.*

V. Nach Eintragung aller zu lösenden Gleichungen/Ungleichungen bei *Nebenbedingungen* löst das abschließende Anklicken von *Lösen* im Dialogfeld **Solver-Parameter** die Berechnung aus:
  - Es wird die Meldung ausgegeben, dass entweder ein Ergebnis gefunden oder die Aufgabe nicht gelöst wurde.
  - Falls eine Lösung berechnet wird, zeigt sie der SOLVER in der Tabelle anstatt der Startwerte an und gibt im *Antwortbericht* weitere Informationen.

- Bei Anwendung des SOLVERS ist Folgendes zu beachten:
  - Der SOLVER kann gelegentlich falsche Näherungslösungen liefern:
    - ∗ Dies resultiert aus dem Sachverhalt, dass die verwendete Näherungsmethode nicht immer erfolgreich sein, d.h. konvergieren muss.
    - ∗ Deshalb wird im Zweifelsfall empfohlen, eine Probe durch Einsetzen der gelieferten Ergebnisse in das Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem durchzuführen.
  - Wenn Gleichungs- bzw. Ungleichungssysteme mehrere bzw. unendlich viele Lösungen besitzen, so können diese nicht in ihrer Gesamtheit vom SOLVER berechnet werden. Man erhält hier nur eine mögliche Lösung, wie im Beisp.6.11 illustriert ist.
  - Falls ein Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem keine Lösung besitzt, so gibt der SOLVER i.Allg. eine Fehlermeldung aus, wie im Beisp.6.12 illustriert ist.
  - Ausführliche Illustrationen zur numerischen Lösung von Gleichungs- und Ungleichungssystemen mittels SOLVER geben wir in den Beisp.6.10, 6.11, 6.12 und 6.16. Wir empfehlen, diese Beispiele nach der beschriebenen Vorgehensweise zu lösen, um Sicherheit bei der Anwendung des SOLVERS zu erlangen.

6.4 Lineare Gleichungssysteme

6.4.1 Einführung

Lineare Gleichungen besitzen unter allen mathematischen Gleichungen die einfachste Struktur und bereiten deshalb die geringsten Schwierigkeiten bei der Lösungsberechnung:

- In den meisten Anwendungen treten nicht nur eine Gleichung sondern mehrere auf, so dass man von linearen Gleichungssystemen spricht.

Z2S4		fx {=MMULT(MINV(A);b)}		
	1	2	3	4
1	1	1		
2	1	-1		2
3				1
4	3	-2		
5	1			

- Im obigen Tabellenausschnitt sind die Koeffizientenmatrix **A** für den Bereich Z1S1**:**Z2S2 und der Vektor **b** der rechten Seiten für den Bereich Z4S1**:**Z5S1 definiert.
- Da die Koeffizientenmatrix **A** regulär sein muss (d.h. Det **A**≠0), berechnen wir in Zelle Z4S2 zusätzlich mittels =**MDET**(**A**) die Determinante von **A**.
- Abschließend berechnen wir im Bereich Z2S4**:**Z3S4 mittels
  =**MMULT** (**MINV** (**A**) **;** **b**) den Lösungsvektor (2 , 1).

b) Die *Lösung* des Gleichungssystems mittels *Cramerscher Regel* lässt sich folgendermaßen realisieren:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1$$

- Man sieht hier unmittelbar die Vorgehensweise der Cramerschen Regel, die in der Zählerdeteminante die entsprechende Spalte (erste bzw. zweite) der im Nenner stehenden Koeffizientendeterminante **A** durch den Vektor **b** der rechten Seiten ersetzt.
- Der Einsatz von EXCEL besteht in der Berechnung der auftretenden Determinanten, die mittels Matrizenfunktion **MDET** erfolgen kann.

Beispiel 6.6:

Geben wir eine Illustration des *Gaußschen Algorithmus* bei der Lösung linearer Gleichungssysteme mit eindeutiger bzw. keiner Lösung bzw. mit beliebig vielen Lösungen.
Da keine Verwechslungen möglich sind, wird bei folgenden Rechnungen in der *erweiterten Koeffizientenmatrix* die als letzte Spalte eingetragene rechte Seite des Gleichungssystems nicht durch einen Strich abgetrennt.

a) Für das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 = 2$$
$$x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 = 1$$
$$x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 = 4$$

liefert der *Gaußsche Algorithmus* durch Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix z.B. folgendes Lösungsschema:

- Ein allgemeines *lineares Gleichungssystem* mit
  - m linearen Gleichungen
  - n Variablen (Unbekannten) $x_1,...,x_n$

  hat folgende Form:

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + ... \; + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + ... \; + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \qquad (\, m\geq 1 \,,\, n\geq 1 \,) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + ... + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

  wobei man ab m≥2 , n≥2 von einem Gleichungssystem spricht, d.h. ab 2 Gleichungen mit 2 Variablen.

- Lineare Gleichungssysteme lauten in *Matrizenschreibweise* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$

  wobei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ gelten und
  - **A** die *Koeffizientenmatrix* vom Typ (m,n) bezeichnet,
  - **x** den *Vektor* der *Variablen* bezeichnet,
  - **b** den *Vektor* der *rechten Seiten* bezeichnet.

- In Abhängigkeit vom Vektor **b** der rechten Seiten gelten für lineare Gleichungssysteme folgende Bezeichnungen:
  - Ist **b** der Nullvektor, d.h. $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$, so spricht man von einem *homogenen* linearen Gleichungssystem.
  - Gilt $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, so heißt das lineare Gleichungssystem *inhomogen*.
  - Wenn ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ vorliegt, so heißt $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$ das *zugehörige* homogene Gleichungssystem.

6.4.2 Lösungstheorie

Für lineare Gleichungssysteme $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gibt es eine umfassende *Lösungstheorie:*

- Sie sagt in Abhängigkeit von Koeffizientenmatrix **A** und Vektor **b** der rechten Seiten aus, wann
  - *genau ein Lösungsvektor* $\mathbf{x}^L$ existiert,
  - *kein Lösungsvektor* $\mathbf{x}^L$ existiert,
  - *beliebig viele Lösungsvektoren* $\mathbf{x}^L$ existieren.
- Sie gilt für beliebige Werte von m und n, d.h. für eine beliebige Anzahl von Gleichungen und Variablen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

I. Indem man in der erweiterten Koeffizientenmatrix die erste Zeile von der zweiten und danach von der dritten subtrahiert, ergibt sich die zweite Matrix des Lösungsschemas.

II. Durch abschließendes Vertauschen der zweiten mit der dritten Zeile ergibt sich die dritte Matrix des Lösungsschemas:

- Sie hat Dreiecksgestalt, die eine eindeutige Lösung erkennen lässt, da Rang 3 vorliegt.
- Das umgeformte Gleichungssystem hat jetzt die Gestalt

$$\begin{aligned} x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 &= 2 \\ 1\cdot x_2 + 2\cdot x_3 &= 2 \\ 1\cdot x_3 &= -1 \end{aligned}$$

  - Man kann aus der dritten Gleichung unmittelbar die Lösung $x_3 = -1$ ablesen.
  - Indem man diese Lösung in die zweite Gleichung einsetzt, ergibt sich die Lösung $x_2 = 4$.
  - Wenn man die beiden so erhaltenen Lösungen in die verbleibende erste Gleichung einsetzt, ergibt sich die letzte noch fehlende Lösung $x_1 = -7$.

III. Man kann die mit dem Gaußschen Algorithmus erhaltene dritte Matrix des obigen Lösungsschemas weiter umformen, so dass sich alle Lösungen aus der letzten Matrix des folgenden Lösungsschemas ablesen lassen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Dies wird folgendermaßen erreicht:
  - Man multipliziert in der ersten Matrix die letzte Zeile mit 2 bzw. 3 und subtrahiert sie von der zweiten bzw. ersten.
  - In der so erhaltenen zweiten Matrix multiplizieren wir die zweite Zeile mit 3 und subtrahieren sie von der ersten.
  - Damit ergibt sich die dritte Matrix, aus der man unmittelbar die Ergebnisse ablesen kann, ohne weitere Rechnungen durchführen zu müssen.
- In so angewandter Form nennt man den Algorithmus auch *Gauß-Jordan-Algorithmus*.

Beispiele

- Sie benötigt die um den Vektor **b** der rechten Seiten *erweiterte Koeffizientenmatrix* (**A | b**), die vom Typ (m,n+1) ist und in folgender Form geschrieben wird:

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) \quad = \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Stellen wir wesentliche Fakten der *Lösungstheorie* zusammen:
  - In Abhängigkeit von Koeffizientenmatrix **A** vom Typ (m,n) und erweiterter Koeffizientenmatrix (**A | b**) vom Typ (m,n+1) ergeben sich folgende *Lösungsbedingungen* für lineare Gleichungssysteme (siehe Beisp.6.4):
    * Es existiert *genau ein Lösungsvektor* $\mathbf{x}^L$,
      wenn Rang (**A**) = Rang ((**A | b**)) = n gilt, d. h. unter den m (≥n) Gleichungen müssen genau n unabhängige Gleichungen vorkommen, die sich nicht widersprechen.
    * Es existiert *kein Lösungsvektor* $\mathbf{x}^L$,
      wenn Rang (**A**) < Rang ((**A | b**)) gilt, d.h. hier widersprechen sich Gleichungen.
    * Es existieren *mehrere Lösungsvektoren* $\mathbf{x}^L$,
      wenn Rang (**A**) = Rang ((**A | b**)) = r < n gilt, d.h. hier liegen weniger als n unabhängige sich nicht widersprechende Gleichungen vor.
  - Die angegebenen Lösungsbedingungen lassen sich für beliebige Anzahlen von Gleichungen und Variablen (Unbekannten) über die Rangbestimmung für die erweiterte Koeffizientenmatrix (**A | b**) einfach nachprüfen. Effektiv gelingt dies im Rahmen der Lösung mittels Gaußschem Algorithmus, wie im Abschn.6.4.4 beschrieben ist.
  - Als *allgemeine Lösung* eines linearen Gleichungssystems bezeichnet man eine Lösungsdarstellung, aus der sich alle möglichen Lösungen ergeben.
  - Die allgemeine Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ergibt sich als Summe der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen und einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems (siehe Beisp.6.6c).
  - Homogene lineare Gleichungssysteme
    * besitzen im Unterschied zu inhomogenen immer eine Lösung, und zwar die sogenannte *triviale Lösung* (*Nulllösung*) $\mathbf{x}^L = \mathbf{0}$.
    * haben nur Lösungen $\mathbf{x}^L \neq \mathbf{0}$ (nichttriviale Lösungen), wenn die Koeffizientenmatrix **A** vom Typ (m,n) einen Rang besitzt, der kleiner als n ist. Wir illustrieren diese Eigenschaft im Beisp.6.8 bei der Bestimmung der Abhängigkeit/Unabhängigkeit von Vektoren.

b) Für das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 2$$
$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 1$$
$$2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 5$$

liefert der Gaußsche Algorithmus z.B. folgendes Lösungsschema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Das erhaltene Lösungsschema ergibt sich durch folgende Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix:
  I. Indem man in der erweiterten Koeffizientenmatrix die erste Zeile von der zweiten und danach mit 2 multipliziert von der dritten subtrahiert, ergibt sich die zweite Matrix des Lösungsschemas.
  II. Indem man abschließend die zweite Zeile mit 3 multipliziert und von der ersten subtrahiert, ergibt sich die dritte Matrix des Lösungsschemas.
- Das betrachtete lineare Gleichungssystem ist *unlösbar:*
  - Dies ist bereits aus der zweiten Matrix des Lösungsschemas ablesbar, da der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix gleich 3 ist, während die Koeffizientenmatrix nur den Rang 2 besitzt.
  - Hervorgerufen wird die Unlösbarkeit durch den Fakt, dass sich erste und dritte Gleichung des Gleichungssystems widersprechen.

c) Für das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 1$$
$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$$
$$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 4$$

liefert der Gaußsche Algorithmus z.B. das Lösungsschema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Das erhaltene Lösungsschema ergibt sich durch folgende Umformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix:
  - Indem man in der erweiterten Koeffizientenmatrix die erste Zeile mit 2 bzw. 4 multipliziert und danach von der zweiten bzw. der dritten subtrahiert, ergibt sich die zweite Matrix, so dass nur folgende Gleichung übrigbleibt:

    $$x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = 1$$

    d.h. zweite und dritte Gleichung sind Vielfaches der ersten.

6.4.3 Spezielle Lösungsmethoden

Betrachten wir *spezielle Lösungsmethoden* für lineare Gleichungssysteme

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

für den Fall, dass die Koeffizientenmatrix **A** quadratisch und regulär ist:

- Man kann dies durch Berechnung von Det **A** (Determinante von **A**) überprüfen, die ungleich Null sein muss.
- In diesem Fall existiert genau eine Lösung des Gleichungssystems, die mittels einer der folgenden Methoden berechnet werden kann:
  - Berechnung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$:
    Der *Lösungsvektor* $\mathbf{x}^L$ des Gleichungssystems ergibt sich als Produkt von $\mathbf{A}^{-1}$ und **b**, d.h. $\mathbf{x}^L = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$
  - Anwendung der *Cramerschen Regel:*
    Man kann beweisen, dass sich die i-te Komponente des *Lösungsvektors* $\mathbf{x}^L$ eines linearen Gleichungssystems mit regulärer Koeffizientenmatrix folgendermaßen berechnet:

$$x_i^L = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

    wobei die Determinante im Zähler aus der Koeffizientendeterminante Det **A** des Nenners dadurch entsteht, dass die i-te Spalte durch den Vektor **b** der rechten Seiten des Gleichungssystems zu ersetzen ist.

- Wir illustrieren die Anwendung beider Methoden im Beisp.6.5. Ihr Einsatz zur Lösung praktisch anfallender Aufgaben ist jedoch nicht zu empfehlen, da sie
  - nur für den Sonderfall regulärer quadratischer Koeffizientenmatrizen **A** anwendbar sind,
  - aufgrund der Berechnung von inversen Matrizen bzw. Determinanten aufwendiger als der Gaußsche Algorithmus und deshalb für große Gleichungssysteme nicht geeignet sind.

- Damit sind zwei Variable frei wählbar, wie z.B. $x_2 = c$, $x_3 = d$, so dass sich die *allgemeine Lösung*, die alle möglichen (unendlich vielen) Lösungen enthält, in der Form $x_1 = 1 - 2 \cdot c - d$, $x_2 = c$, $x_3 = d$ schreiben und in folgende *vektorielle Form* bringen lässt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei c und d beliebige reelle Werte annehmen können.

- Die vektorielle Darstellung lässt die Lösungsstruktur erkennen:
  - Der erste Vektor ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.
  - Die mit c und d gebildete Linearkombination von Vektoren stellt die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems dar.

Beispiel 6.7:

Betrachten wir ein einfaches Beispiel

$1{,}0001 \cdot x_1 + x_2 = 2{,}0001$

$x_1 + 0{,}9999 \cdot x_2 = 1{,}9999$ für schlecht konditionierte lineare Gleichungssysteme:

- Dieses Gleichungssystem besitzt die eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.
- Wenn man die Werte der rechten Seite nur geringfügig um –0,0001 bzw. +0,0001 ändert, so ergibt sich folgendes lineare Gleichungssystem

  $1{,}0001 \cdot x_1 + x_2 = 2$

  $x_1 + 0{,}9999 \cdot x_2 = 2$, das die eindeutige Lösung $x_1 = 20000$, $x_2 = -20000$ besitzt.
- Die Lösungen beider Gleichungssysteme sind völlig verschieden, obwohl sich ihre rechten Seiten nur geringfügig unterscheiden:
  - Aufgrund des großen Einflusses der rechten Seiten sind bei schlecht konditionierten Gleichungssystemen völlig falsche Lösungen möglich.
  - Bei praktischen Aufgaben gibt es folgende Ursachen für fehlerhafte rechte Seiten und damit falsche Lösungen:
    - * Es treten Rundungsfehler bei Lösung mittels Computer auf.
    - * Fehlerbehaftete rechte Seiten sind durch Auftreten von Fehlern bei der Datenerfassung möglich.

Beispiel 6.8:

Illustrieren wir im Folgenden die im Abschn.6.4.2 angegebenen Lösungseigenschaften homogener linearer Gleichungssysteme, indem wir lineare *Abhängigkeit* bzw. *Unabhängigkeit* von *Vektoren* aus Beisp.5.1a nachweisen:

a) Die Überprüfung der beiden Zeilenvektoren $\mathbf{a} = (1, 2, 4)$ und $\mathbf{b} = (0, 5, 1)$ führt auf die Überprüfung der Beziehung

$\lambda \cdot \mathbf{a} + \mu \cdot \mathbf{b} = \lambda \cdot (1, 2, 4) + \mu \cdot (0, 5, 1) = \mathbf{0}$

6.4.4 Gaußscher Algorithmus

Für den praktischen Einsatz benötigt man Methoden, die große Gleichungssysteme effektiv lösen können. Hierzu gehören Gaußscher Algorithmus und Iterationsmethoden.

Wir beschreiben im Weiteren den universell einsetzbaren *Gaußschen Algorithmus* (*Gaußsche Eliminationsmethode*), der im SOLVER von EXCEL zum Einsatz kommt:

- Er liefert im Falle der Lösbarkeit eine Lösung linearer Gleichungssysteme in endlich vielen Schritten.
- Die Idee des Gaußschen Algorithmus wurde bereits im Rahmen der Rangbestimmung von Matrizen vorgestellt (siehe Beisp.5.1c).
- Da man zur Lösung praktisch anfallender linearer Gleichungssysteme den *Gaußschen Algorithmus* nicht mehr per Hand sondern nur mittels Computer anwendet, reicht es vollkommen aus, wenn man *Grundprinzip* und *Vorgehensweise* kennt:
  - Das *Grundprinzip* des Gaußschen Algorithmus bei der Lösung linearer Gleichungssysteme besteht darin, die erweiterte Koeffizientenmatrix ($\mathbf{A} \mid \mathbf{b}$) durch systematische Umformungen der Zeilen auf *Dreiecksgestalt* zu bringen (siehe Beisp.6.4 und 6.6), aus der
    * Lösungen im Falle der Lösbarkeit einfach bestimmbar sind.
    * die Unlösbarkeit des Gleichungssystems ablesbar ist.
  - Die *Vorgehensweise* des Gaußschen Algorithmus besteht im Folgenden:
    * Man benutzt ein bereits bei Rangbestimmungen von Matrizen angewandtes Umformungsprinzip (siehe Beisp.5.1c), indem man das Vielfache einer Gleichung zu einer anderen addiert. Dies und das Vertauschen einzelner Gleichungen des Systems verändern nicht die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
    * Indem man diese Umformungen schrittweise auf die erweiterte *Koeffizientenmatrix* ($\mathbf{A} \mid \mathbf{b}$) des Gleichungssystems anwendet, kann man diese auf eine *Dreiecksgestalt*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{mn} & d_m \end{array}\right)$$

    bringen, wie im folgenden *Lösungsschema* skizziert ist:

    I. Man erreicht die Umformung auf Dreiecksgestalt, indem man z.B. systematisch mit der ersten Zeile beginnend die in der ersten Spalte unterhalb liegenden Elemente durch Multiplikation der Zeile mit einem entsprechenden Faktor und Addition/Subtraktion zu Null umformt. Eventuell ist die erste Zeile vorher mit einer anderen Zeile zu vertauschen, falls das entsprechende Element Null ist.

die dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$1\cdot\lambda+0\cdot\mu = 0$$

$$2\cdot\lambda+5\cdot\mu = 0$$

$$4\cdot\lambda+1\cdot\mu = 0$$

mit 3 Gleichungen für die Unbekannten λ und μ äquivalent ist:

- Die Lösung dieses homogenen Gleichungssystems mittels Gaußschen Algorithmus liefert z.B. folgendes Lösungsschema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Aus dem erhaltenen Lösungsschema lässt sich der Rang 2 für die Koeffizientenmatrix ablesen, so dass nur triviale Lösungen $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ existieren und damit beide Vektoren **a** und **b** *linear unabhängig* sind.

b) Die Überprüfung der drei Spaltenvektoren auf lineare Abhängigkeit

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- führt auf die Überprüfung der Beziehung

$$\lambda\cdot\mathbf{a} + \mu\cdot\mathbf{b} + \nu\cdot\mathbf{c} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \nu\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

- Man erhält hieraus das homogene lineare Gleichungssystem mit 2 Gleichungen für die Unbekannten λ, μ und ν

$$1\cdot\lambda+2\cdot\mu+4\cdot\nu = 0$$

$$0\cdot\lambda+5\cdot\mu+1\cdot\nu = 0$$

- Die zugehörige Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

kann höchstens Rang 2 haben, da nur 2 Zeilen vorhanden sind.

- Deshalb besitzt das Gleichungssystem nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösungen, so dass die drei Vektoren **a** , **b** und **c** *linear abhängig* sind, während z.B. die beiden Vektoren

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Diesen Nachweis überlassen wir dem Leser.

Beispiel 6.9:

Illustrieren wir die im Abschn.6.6 besprochene Vorgehensweise für die Berechnung von Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren anhand folgender zweireihiger Matrix

II. Danach verwendet man die zweite Zeile analog, um die unterhalb liegenden Elemente der zweiten Spalte zu Null umzuformen. Eventuell ist die zweite Zeile vorher mit einer anderen Zeile zu vertauschen, falls das entsprechende Element Null ist.

III. Diese beschriebene systematische Umformung wird bis zur m–1 Zeile durchgeführt oder schon früher beendet, wenn keine von Null verschiedenen Zeilen mehr vorliegen.

  - Aus der erhaltenen Dreiecksgestalt kann man die Lösbarkeit des Gleichungssystems ablesen, da man hieraus erkennt, ob Rang von Koeffizientenmatrix und erweiterter Koeffizientenmatrix übereinstimmen oder nicht (siehe Beisp.6.6).
  - Im Falle der Lösbarkeit lassen sich aus der Dreiecksgestalt die Lösungen einfach berechnen, indem man mit der letzten Zeile beginnend sukzessive die Lösungswerte für die einzelnen Variablen bestimmen kann. Wir illustrieren dies im Beisp.6.4 und 6.6.

- Obwohl sich die Vorgehensweise des Gaußschen Algorithmus einfach gestaltet, ist seine allgemeine Beschreibung für den Leser meistens etwas verwirrend bzw. undurchsichtig. Deshalb empfehlen wir, seine Anwendung durch Nachrechnen der gegebenen Beispiele zu üben.

Bemerkung

Bezüglich der Anwendung des *Gaußschen Algorithmus* zur Lösung linearer Gleichungssysteme sind folgende Sachverhalte von Bedeutung:

- Bei seiner Anwendung zur Lösung homogener Gleichungssysteme benötigt man nur die Koeffizientenmatrix und nicht die erweiterte.
- Bei Rechnungen ohne Rundungsfehler (z.B. per Hand) liefert er die exakte Lösung in endlich vielen Schritten.
- Bei seiner numerischen Anwendung mittels Computer (z.B. im Rahmen von EXCEL), endet er auch in endlich vielen Schritten:
  - Da hier jedoch Rundungsfehler auftreten, kann das erhaltene Ergebnis falsch (unbrauchbar) sein.
  - Deshalb ist zu empfehlen, mittels Computer berechnete Lösungen durch Einsetzen in die Gleichungen zu überprüfen, d.h. eine Probe durchzuführen.
- Es gibt für seine numerische Anwendung einige Maßnahmen, um die Anfälligkeit bzgl. Rundungsfehlern einzuschränken. Bezüglich dieser Problematik verweisen wir auf die Literatur.
- Die Problematik der Rundungsfehler wirkt sich besonders bei *schlecht konditionierten Gleichungssystemen* aus:
  - Hier können Rundungsfehler oder fehlerbehaftete Werte in Koeffizienten und rechte Seiten völlig falsche Lösungen hervorrufen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Die *Eigenwerte* von A berechnen sich aus der *charakteristischen Polynomgleichung*

  $$\text{Det}\,(\,\mathbf{A} - \lambda\cdot\mathbf{E}\,) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(4-\lambda)+2 = \lambda^2 - 5\cdot\lambda + 6 = 0$$

  die reelle Lösungen 2 und 3 besitzt, die man durch Anwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält.
- Damit besitzt die Matrix **A** die beiden reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.
- Die zu den Eigenwerten gehörigen *Eigenvektoren* $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ ergeben sich durch Lösen der folgenden beiden homogenen linearen Gleichungssysteme:

  $$(\mathbf{A}-\lambda_1\cdot\mathbf{E})\cdot\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x}^1 = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{A}-\lambda_2\cdot\mathbf{E})\cdot\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x}^2 = \mathbf{0}$$

  deren nichttriviale (von Null verschiedene) Lösungen die Eigenvektoren

  $$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  liefern, deren Berechnung wir dem Leser überlassen.
- Bei der Berechnung der Eigenvektoren ist zu beachten, dass diese
  - immer vom Nullvektor verschieden sein müssen (ansonsten liegt ein Rechenfehler vor).
  - nur bis auf ihre Länge eindeutig bestimmt sind, so dass man sie oft zu Einheitsvektoren normiert.

Beispiel 6.10:

Illustrieren wir die Anwendung des SOLVERS von EXCEL, indem wir das auf Normalform gebrachte lineare Gleichungssystem aus Beisp.6.4a

$$x_1 + x_2 - 3 = 0 \;,\; x_1 - x_2 - 1 = 0$$

lösen, wozu wir die im Abschn.6.3.2 beschriebene Vorgehensweise anwenden:

- Da EXCEL keine indizierten Variablen zulässt, benutzen wir die Variablenbezeichnungen x1 und x2 und wählen als *Startwerte* willkürlich x1 = 0 , x2 = 0:
  I. Zuerst tragen wir in zusammenhängende Zellen Z1S1 und Z1S2 die Namen der Variablen x1 bzw. x2 ein und darunter in Z2S1 und Z2S2 die für den SOLVER gewählten Startwerte:
    - Diese Zellen werden markiert, die Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen** aktiviert und im erscheinenden Dialogfeld **Namen erstellen** das Kontrollfeld *Oberster Zeile* angeklickt.
    - Damit erhalten die Variablen die eingetragenen Namen x1 bzw. x2, denen die eingetragenen Startwerte 0 zugewiesen sind.

* Man kann die Kondition eines Gleichungssystems an der Konditionszahl der Koeffizientenmatrix erkennen.
* Wir können hierauf nicht näher eingehen und verweisen auf die Literatur. Im Beisp. 6.7 illustrieren wir die Problematik an einem einfachen schlecht konditionierten Gleichungssystem.

  ♦

6.4.5 Anwendungen in der Wirtschaft

Lineare Gleichungssysteme bilden neben linearen Ungeichungssystemen und Matrizen eine grundlegende Basis in statischen mathematischen Modellen der Wirtschaft:

- Wichtige Anwendungen findet man u.a. in Modellen für Bilanzbeziehungen, Produktionsmodellen und Input-Output-Modellen (Leontief-Modellen).
- Im Beisp.6.2 stellen wir lineare Gleichungsmodelle vor, die bereits ihre Wichtigkeit in der Wirtschaftsmathematik erkennen lassen.

6.4.6 Lösung mittels EXCEL

In EXCEL besteht eine numerische Lösungsmöglichkeit für Systeme beliebiger Gleichungen und Ungleichungen und damit auch für *lineare Gleichungen* mittels des integrierten Add-Ins SOLVER:

- Wir haben die hierfür erforderliche Vorgehensweise im Abschn.6.3.2 für beliebige Systeme von Gleichungen/Ungleichungen ausführlich beschrieben, so dass wir uns bei linearen Gleichungssystemen auf Illustrationen in den Beisp.6.10-6.12 beschränken können.
- Die vom SOLVER für die Lösung benötigten Startwerte für die Variablen können beliebig gewählt werden, wenn keine Näherungswerte bekannt sind.

6.5 Polynomgleichungen

6.5.1 Grundlagen

Polynomgleichungen werden häufig benötigt. Hierfür liefert die Theorie weitreichendere Aussagen als für allgemeine nichtlineare Gleichungen:

- Polynomgleichungen stellen einen wichtigen Sonderfall nichtlinearer algebraischer Gleichungen dar, die wir im Abschn.6.7 vorstellen.
- Unter dem Oberbegriff *Polynome* betrachtet man Folgendes:
  - *Polynomfunktionen* n-ten Grades mit reellen Koeffizienten a_k der Form:

    $$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \;=\; a_n \cdot x^n \;+\; a_{n-1} \cdot x^{n-1} \;+\ldots+\; a_1 \cdot x \;+\; a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

    die auch als *ganzrationale Funktionen* oder kurz *Polynome* bezeichnet werden.

II. Danach tragen wir in die Zellen Z1S3 bzw. Z1S4 die beiden zu lösenden Gleichungen als Text ein, d.h. im Textmodus. Dies dient nur zur Veranschaulichung und kann weggelassen werden.

III. Anschließend tragen wir in die Zellen Z2S3 bzw. Z2S4 die linken Seiten der beiden Gleichungen in Normalform als Formeln ein.

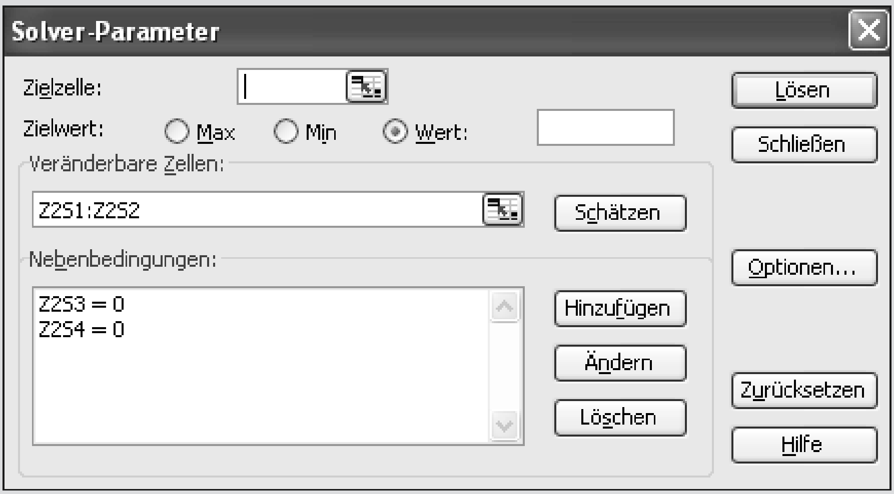
- Das Ergebnis der Schritte I-III ist im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen, wobei EXCEL in Z2S3 und Z2S4 die Werte –3 bzw. –1 schreibt, d.h. die Werte der linken Seiten der Gleichungen für die Startwerte 0 der Variablen:

Z2S4 fx =x1-x2-1

	1	2	3	4
1	x1	x2	x1+x2-3=0	x1-x2-1=0
2	0	0	-3	-1

- Die weiteren Schritte der Vorgehensweise sind folgende:

IV. Der SOLVER wird mittels der Menüfolge **Extras ⇒ Solver** aufgerufen



und das erscheinende Dialogfeld **Solver-Parameter** wie folgt ausgefüllt:

- In *Zielzelle* ist nichts einzutragen und bei *Zielwert* ist *Wert* anzuklicken.
- In *Veränderbare Zellen* ist der Bereich Z2S1**:**Z2S2 der Startwerte für die Variablen x1 und x2 einzutragen. Dies geht am einfachsten durch Überstreichen dieses Bereichs mit gedrückter Maustaste.
- In *Nebenbedingungen* sind beide zu lösende Gleichungen durch Anklicken von *Hinzufügen* im erscheinenden Dialogfeld **Nebenbedingungen hinzufügen** einzutragen, indem man die Zelle Z2S3 bzw. Z2S4 der Formel der entsprechenden Gleichung mittels Maus anklickt.

- *Polynomgleichungen* n-ten Grades der Form:

  $$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

- Man sieht, dass Polynomgleichungen aus der Nullstellenbestimmung für Polynomfunktionen entstehen, da $P_n(x_i) = 0$ für Nullstellen x_i gilt, d.h. Nullstellen x_i der Polynomfunktion $P_n(x)$ sind Lösungen der Polynomgleichung $P_n(x) = 0$.

- Ein berühmter Satz von Gauß (Fundamentalsatz der Algebra) sagt Folgendes
  - Polynomgleichungen n-ten Grades besitzen genau n Lösungen x_i (i=1,2,...,n), die reell, komplex und mehrfach sein können.
  - Für diese Lösungen gilt:

    $$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

  - Dieser Satz ermöglicht die Verringerung des Grades eines Polynoms um 1, wenn man eine Nullstelle x_i kennt (erraten hat) und das Polynom durch $x - x_i$ dividiert.

- Zur exakten Berechnung von Lösungen gibt es nur bis n=4 *Lösungsformeln*:
  - Die bekannte *Lösungsformel* für n=2 liefert für *quadratische Gleichungen*

    $$x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$$

    die beiden Lösungen

    $$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{D} \qquad \text{mit Diskriminante} \qquad D = \frac{a_1^2}{4} - a_0$$

    die auch zusammenfallen oder komplex sein können, je nachdem welche Werte die *Diskriminante* D annimmt.

- Für n=3 und 4 gestalten sich *Lösungsformeln* wesentlich schwieriger. Ab n=5 existieren keine Formeln mehr für die Nullstellenbestimmung, da allgemeine Polynome ab dem 5. Grad nicht durch Radikale lösbar sind (Satz von Abel).

Bemerkung

Die Lösung von Polynomgleichungen spielt eine große Rolle bei der Bestimmung von Eigenwerten für Matrizen und der Lösung linearer Differenzen- und Differentialgleichungen, wie in den Abschn.6.6, 10.4 bzw. 11.5 zu sehen ist.

♦

6.5.2 Lösung mittels EXCEL

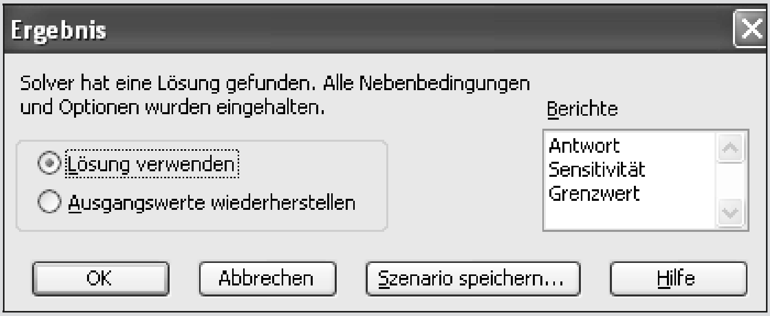
Die Lösung von Polynomgleichungen $P_n(x) = 0$ geschieht in EXCEL mittels des SOLVERS auf die gleiche Art wie die im Abschn.6.3.2 besprochene numerische Lösung allgemeiner Gleichungen:

- Die vom SOLVER für die Lösung benötigten Startwerte für die Variable x können beliebig gewählt werden, wenn keine Näherungswerte bekannt sind.
- Die Wahl der Startwerte kann allerdings den Erfolg der Lösungsmethode beeinflussen.

- Das Ergebnis der Eintragungen ist aus obiger Abbildung des Dialogfeldes **Solver-Parameter** zu sehen.

V. Das abschließende Anklicken von *Lösen* löst die Berechnung aus:

- Wenn der SOLVER eine Lösung gefunden hat, wird dies mitgeteilt, wobei ein *Antwortbericht* angesehen werden kann:



- In der Tabelle werden jetzt anstatt der Startwerte die Lösungswerte x1 = 2 und x2 = 1 angezeigt und in den Zellen Z2S3 und Z2S4 mit den linken Seiten des Gleichungssystems muss Null stehen, wenn die berechneten Lösungen richtig sind:

	1	2	3	4
1	x1	x2	x1+x2-3=0	x1-x2-1=0
2	2	1	0	0

Beispiel 6.11:

Lösen wir das lineare Gleichungssystem aus Beisp.6.6c mittels SOLVER, das beliebig viele Lösungen besitzt. Der SOLVER kann nur eine mögliche Lösung berechnen, wie folgender Tabellenausschnitt für die Startwerte x1 = x2 = x3 = 0 zeigt:

	1	2	3	4
1	x1	x2	x3	x1+2*x2+x3-1=0
2	0,16666667	0,33333333	0,16666667	0
3				2*x1+4*x2+2*x3-2=0
4				0
5				4*x1+8*x2+4*x3-4=0
6				0

Beispiel 6.12:

Versuchen wir die Lösung des im Beisp.6.6b betrachteten unlösbaren linearen Gleichungssystems mittels SOLVER:

- Der SOLVER erkennt die Unlösbarkeit des Gleichungssystems und gibt im Dialogfeld **Ergebnis** eine entsprechende Meldung aus.

6.6 Eigenwertaufgaben für Matrizen

Eigenwertaufgaben für quadratische Matrizen **A** bestehen in der Berechnung von *Eigenwerten* und zugehörigen *Eigenvektoren:*

- Da ihre Berechnung auf der Lösung von Gleichungen beruht, behandeln wir sie erst in diesem Kapitel.
- Eigenwerte und Eigenvektoren besitzen in Modellen der Wirtschaft eine Reihe von Anwendungen, wofür eine Illustration im Rahmen des Input-Output-Modells von Leontief im Beisp.6.2b zu sehen ist. Deshalb werden wir die Problematik im Folgenden kurz vorstellen, wobei wir jedoch nicht tiefer in die umfangreiche Theorie eindringen können:
  - *Eigenwerte* einer quadratischen Matrix **A** sind diejenigen reellen oder komplexen Zahlen λ_i, für die es Vektoren $\mathbf{x}^i \neq \mathbf{0}$ gibt, so dass

    $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^i = \lambda_i \cdot \mathbf{x}^i$ gilt, d.h. $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x}^i = \mathbf{0}$

    Dabei werden die Vektoren $\mathbf{x}^i$ als zugehörige *Eigenvektoren* bezeichnet.
  - Die Eigenwerte λ_i ergeben sich als Lösungen der *Polynomgleichung* $\mathrm{Det}(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{E})=0$, d.h. als Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* $\mathrm{Det}\,(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{E})$. Diese Bedingung ist erforderlich, um Lösungen $\mathbf{x}^i \neq \mathbf{0}$ von $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x}^i = \mathbf{0}$ zu gewährleisten.
  - Die zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{x}^i$ ergeben sich als nichttriviale Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystem (siehe Beisp.6.9).

    $(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x}^i = 0$
  - Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren erfordert die Lösung von Polynomgleichungen bzw. linearen Gleichungssystemen, die man für umfangreiche Matrizen nur mittels Computer bewältigen kann, wofür EXCEL herangezogen werden kann (siehe Abschn.6.5.2 bzw. 6.4.6).

6.7 Nichtlineare Gleichungen

Nichtlineare Gleichungen treten in mathematischen Modellen der Wirtschaft seltener auf. Deshalb werden wir sie nur kurz vorstellen:

- Für nichtlineare Gleichungen existiert keine umfassende Lösungstheorie wie für lineare.
- Man ist meistens auf numerische Methoden (Näherungsmethoden) angewiesen, auf die wir kurz im folgenden Abschnitt hinweisen.

6.7.1 Lösungsmethoden

Nichtlineare Gleichungen lassen sich nur für wenige Sonderfälle exakt lösen, wozu Polynomgleichungen bis zum Grad 4 gehören.

Deshalb ist man auf numerische Methoden (Näherungsmethoden) angewiesen, von denen viele die Form von *Iterationsmethoden* besitzen:

- Obwohl der SOLVER die Unlösbarkeit des Gleichungssystems erkannt hat, gibt er in der Tabelle bei den einzelnen Variablen ein Ergebnis aus, wie der Tabellenausschnitt zeigt.

	1	2	3	4
1	x1	x2	x3	x1+3*x2+3*x3-2=0
2	5	-1,1203704	0,12037037	0
3				x1+4*x2+4*x3-1=0
4				-1,33227E-15
5				2*x1+6*x2+6*x3-5=0
6				-1

- Man sieht allerdings in Spalte 4 des Tabellenausschnitts, in der sich die Formeln der zu lösenden Gleichungen befinden, dass die im Bereich Z2S1**:**Z2S3 berechneten Werte nur die ersten beiden Gleichungen aber nicht die letzte erfüllen.

Beispiel 6.13:

Illustrieren wir die Problematik des Auftretens nichtlinearer Gleichungen:

a) Im Beisp.7.1 geben wir Beispiele für *Angebotsfunktionen* $P_A(x)$ und *Nachfragefunktionen* $P_N(x)$ als Funktionen des Preises x:

- Möchte man das *Gleichgewicht* zwischen Angebot und Nachfrage bestimmen, so sind diejenigen x-Werte zu berechnen, für die beide Funktionen den gleichen Wert annehmen, d.h. es muss $P_A(x) = P_N(x)$ gelten.
- Damit ist eine *nichtlineare Gleichung* $P_A(x) - P_N(x) = 0$ zu lösen:

a1) Für die konkreten Funktionen

$$P_A(x) = 2 \cdot x^2 + x + 3 \quad , \quad P_N(x) = 10 - x$$

ist wegen $P_A(x) = P_N(x)$ die *quadratische Gleichung*

$$2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7 = 0$$

d.h. eine *Polynomgleichung* als Sonderfall nichtlinearer Gleichungen zu lösen.

a2) Für die konkreten Funktionen

$$P_A(x) = 5 \cdot \sqrt{3 \cdot x + 4} \quad , \quad P_N(x) = 1 - 2 \cdot x$$

ist wegen $P_A(x) = P_N(x)$ die *algebraische Gleichung*

$$5 \cdot \sqrt{3 \cdot x + 4} - 1 + 2 \cdot x = 0$$

als Sonderfall nichtlinearer Gleichungen zu lösen.

b) Im Beisp.8.10 wird die *nichtlineare Gleichung* $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$

erhalten, um Extremwerte für *Durchschnittskostenfunktionen* ökonomischer Funktionen $f(x)$ zu berechnen:

b1) Für die konkrete *neoklassische Kostenfunktion* $f(x) = 2 \cdot x^2 + 3$ (siehe Beisp.7.1e)

- Bekannte Iterationsmethoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen sind *Newton-Methoden*, wobei die klassische von Newton zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ aufgestellte Methode folgende Form besitzt (x^1 - vorgegebener Startwert):

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- Diese Newton-Methode muss jedoch nicht konvergieren. Es gibt hinreichende Bedingungen für die Konvergenz, so z.B.

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq q \qquad (q < 1)$$

  wobei x zu einer Umgebung der Nullstelle gehören muss, in der auch sämtliche mit der Newton-Methode berechnete Werte liegen.

- Im Falle der Konvergenz der Newton-Methode bieten sich folgende *Abbruchschranken* an:
  - Der absolute Fehler zweier aufeinanderfolgender berechneter Werte ist kleiner als ε, d.h.

$$\left| x^{k+1} - x^k \right| = \left| \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \right| < \varepsilon$$

  - Der Absolutbetrag der Funktion f(x) ist kleiner als ε, d.h.

$$\left| f(x^k) \right| < \varepsilon$$

- Newton-Methoden existieren nicht nur zur Lösung einer Gleichung, sondern auch zur Lösung von Gleichungssystemen und bilden einen Forschungsschwerpunkt der Numerischen Mathematik.
- Wir empfehlen, für die gegebene Newton-Methode ein VBA-Funktionsprogramm zu schreiben, um die Programmierfertigkeiten zu üben und Erfahrungen bei der numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungen zu sammeln.

6.7.2 Anwendungen in der Wirtschaft

Obwohl in mathematischen Modellen der Wirtschaft meistens lineare Gleichungen und Ungleichungen vorkommen, können auch Sachverhalte auftreten, die sich nur durch *nichtlineare Gleichungen/Ungleichungen* hinreichend genau beschreiben lassen:

- *Polynomgleichungen* als Sonderfall nichtlinearer Gleichungen treten u.a. in der Finanzmathematik auf.
- Im Abschn.7.2 lernen wir nichtlineare mathematische Funktionen kennen, die in Modellen der Wirtschaft auftreten und als ökonomische Funktionen bezeichnet werden. Hieraus ergeben sich *nichtlineare Gleichungen*, wenn

ergibt sich damit die Polynomgleichung (quadratische Gleichung)

$2 \cdot x^2 - 3 = 0$ zur Berechnung der Extremwerte.

b2) Für die konkrete *ertragsgesetzliche Kostenfunktion* (siehe Beisp.7.1e)

$f(x) = 5 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 7$

ergibt sich damit die Polynomgleichung dritten Grades

$10 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 7 = 0$

zur Berechnung der Extremwerte der Durchschnittskostenfunktion.

Beispiel 6.14:

Illustrieren wir die Problematik des Auftretens linearer Ungleichungen:

a) Ein *Betrieb* hat zum *Einkauf* von *Rohstoffen* R_1 und R_2 einen gewissen Geldbetrag g (z.B. 1000 Geldeinheiten GE) zur Verfügung, der nicht überschritten werden darf. Vom Rohstoff R_1 (Preis 3 GE pro ME) benötigt er mindestens 4 und vom Rohstoff R_2 (Preis 5 GE pro ME) mindestens 6 Mengeneinheiten ME für seine Jahresproduktion:

- Es können im Rahmen des vorhandenen Geldbetrages größere Mengen der Rohstoffe eingekauft werden, die dann als Vorrat für die folgenden Jahre dienen.
- Damit ergibt sich für den Einkauf folgendes *System* von *Ungleichungen*, wenn man die Anzahl der Mengeneinheiten ME vom Rohstoff R_1 mit x_1 und die von R_2 mit x_2 bezeichnet:

  $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 1000$, $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 6$

b) Ein *Betrieb* stellt *drei Produkte* mit den Mengen x_1, x_2, x_3 her:

- Diese *Produktion* wird unter Verwendung der drei Faktoren *Arbeiter*, *Maschinen* und *Rohstoff* durchgeführt, von denen maximal 50, 100 bzw. 75 Einheiten zur Verfügung stehen.
- Die zur Herstellung einer Einheit der entsprechenden Produkte erforderliche Anzahl/Menge von *Arbeitern* A, *Maschinen* M und *Rohstoff* R ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

	x_1	x_2	x_3
A	20	30	15
M	25	27	17
R	16	11	13

- Damit ergibt sich folgendes *System* von *Ungleichungen* für die Beschreibung der Produktion des Betriebes:

$$20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 \leq 50$$
$$25 \cdot x_1 + 27 \cdot x_2 + 17 \cdot x_3 \leq 100 \qquad \text{mit } x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0$$
$$16 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 13 \cdot x_3 \leq 75$$

- Nullstellen dieser Funktionen zu bestimmen sind.
- Extremwerte dieser Funktionen aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen zu berechnen sind.
- Ökonomische Gleichgewichte, z.B. zwischen Angebot und Nachfrage, zu ermitteln sind.

Wir illustrieren diese Problematik im Beisp.6.13.

6.7.3 Lösung mittels EXCEL

Die numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen vollzieht sich in EXCEL mittels des SOLVERS, wie ausführlich im Abschn.6.3.2 beschrieben ist:

- Die vom SOLVER für die Lösung benötigten Startwerte für die Variablen können beliebig gewählt werden, wenn keine Näherungswerte bekannt sind.
- Die Wahl der Startwerte kann allerdings die Konvergenz der Lösungsmethode beeinflussen.
- Bei nichtlinearen Gleichungen muss der SOLVER nicht immer eine Lösung finden, da für sie kein universeller konvergenter Lösungsalgorithmus existiert. Es empfiehlt sich deshalb, für die vom SOLVER berechneten Lösungen eine Probe durchzuführen.

6.8 Ungleichungen

6.8.1 Einführung

In statischen mathematischen Modellen der Wirtschaft treten nicht nur Gleichungen sondern auch Ungleichungen auf:

- Gleichungssysteme gehen in Ungleichungssysteme über, wenn gegebene Werte der rechten Seiten nicht überschritten werden dürfen.
- Man unterscheidet wie bei Gleichungen zwischen linearen und nichtlinearen Ungleichungen.
- Ebenso wie für nichtlineare Gleichungen existiert für nichtlineare Ungleichungen keine umfassende Lösungstheorie, so dass man auf numerische (näherungsweise) Lösungsmethoden angewiesen ist.
- Man kann jedes Ungleichungssystem unter Einführung von *Schlupfvariablen* in ein Gleichungssystem mit *Nichtnegativitätsbedingungen* für die Schlupfvariablen zurückführen, wie im Beisp.6.15b für ein lineares Ungleichungssystem illustriert ist.
- Da in mathematischen Modellen der Wirtschaft lineare Ungleichungen überwiegen, stellen wir diese im Abschn.6.8.2 vor.
  Falls gelegentlich nichtlineare Ungleichungen auftreten, so lassen sich diese in gewissen Fällen hinreichend genau durch lineare annähern.

Beispiel 6.15:

a) Lineare Ungleichungssysteme besitzen meistens nicht nur eine Lösung, sondern eine unendliche Lösungsmenge. So bildet z.B. das durch die Geraden

$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 1000$, $x_1 = 4$ und $x_2 = 6$

begrenzte Dreieck die Lösungsmenge für das Ungleichungssystem

$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 1000$, $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 6$

aus Beisp.6.14a, wie man leicht durch Zeichnung der begrenzenden Geraden veranschaulichen kann.

b) Ungleichungssysteme lassen sich durch Einführung von Schlupfvariablen in Gleichungssysteme mit *Nicht-Negativitätsbedingungen* für die Schlupfvariablen zurückführen, so z.B. das lineare Ungleichungssystem aus Beisp.6.14b mittels der Schlupfvariablen x_4 , x_5 , x_6 in das Gleichungssystem

$$20 \cdot x_1 + 30 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3 + x_4 = 50$$

$$25 \cdot x_1 + 27 \cdot x_2 + 17 \cdot x_3 + x_5 = 100$$

$$16 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 13 \cdot x_3 + x_6 = 75$$

mit gegebenen Nichtnegativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ und zusätzlichen $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$ für die Schlupfvariablen.

c) *Ungleichungen* mit *Beträgen* lassen sich meistens unter Verwendung linearer Ungleichungen lösen, wie wir am Beispiel $|x + 1| \leq 3$ unter Verwendung der Eigenschaften des Betrages illustrieren:

Es gelten folgende Ungleichungen: $x + 1 \leq 3$ für $x + 1 \geq 0$ und $-x - 1 \leq 3$ für $x + 1 \leq 0$

Aus diesen vier linearen Ungleichungen ergibt sich ohne Schwierigkeiten der *Lösungsbereich* $-4 \leq x \leq 2$.

Beispiel 6.16:

Lösen wir das *lineare Ungleichungssystem* $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \leq 1000$, $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 6$ aus Beisp.6.14a mittels des SOLVERS von EXCEL:

- Die erforderliche Vorgehensweise wird ausführlich im Abschn. 6.3.2 besprochen. Sie ist sowohl für Gleichungen als auch Ungleichungen anwendbar und ist für Gleichungen im Beisp.6.10 illustriert.
- Da EXCEL keine indizierten Variablen zulässt, verwenden wir als Variable x1 und x2 und schreiben das Ungleichungssystem in folgender Normalform

  $3 \cdot x1 + 5 \cdot x2 - 1000 \leq 0$, $4 - x1 \leq 0$, $6 - x2 \leq 0$
- Mit dem SOLVER gestaltet sich die Lösung folgendermaßen, wobei wir als *Startwerte* willkürlich x1 = 0 und x2 = 0 wählen, die das Ungleichungssystem nicht erfüllen:

  I. Zuerst tragen wir in die zwei zusammenhängenden Zellen Z1S1 und Z1S2 der Tabelle die Variablennamen x1 bzw. x2 ein und darunter in die Zellen Z2S1 bzw. Z2S2 ihre Startwerte 0 bzw. 0. Anschließend markieren wir diese Zellen, aktivieren die Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen**

6.8.2 Lineare Ungleichungssysteme

Neben linearen Gleichungssystemen spielen *lineare Ungleichungssysteme* in mathematischen Modellen der Wirtschaft eine große Rolle:

- Sie schreiben sich analog zu den im Abschn.6.4 vorgestellten linearen Gleichungssystemen in der Form

$$\begin{array}{lcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n & \leq & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n & \leq & b_m \end{array}$$

  d.h. man braucht in linearen Gleichungssystemen die Gleichheitszeichen nur durch Ungleichheitszeichen zu ersetzen, um die angegebene Gestalt zu erhalten.

- Zu linearen Ungleichungssystemen ist Folgendes zu bemerken:
  - In *Matrizenschreibweise* haben sie die Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, wobei Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, Vektor $\mathbf{x}$ der Variablen (Unbekannten) und Vektor $\mathbf{b}$ der rechten Seiten die gleiche Bedeutung haben wie bei linearen Gleichungssystemen (siehe Abschn.6.4.1).
  - Es können andere Formen linearer Ungleichungssysteme auftreten. Man kann sie jedoch immer auf die gegebene Form zurückführen:
    * Treten Ungleichungen mit $\geq$ auf, so werden diese mit -1 multipliziert.
    * Tritt eine Gleichung auf, so kann diese durch zwei Ungleichungen ersetzt werden, wie im Beisp.12.10. illustriert ist.
    * Falls Ungleichungen mit Beträgen auftreten, so lassen sich diese meistens auf lineare Ungleichungen zurückführen, wie im Beisp.6.15c. illustriert ist.

- Für lineare Ungleichungssysteme gibt es ebenso wie für lineare Gleichungssysteme eine aussagekräftige *mathematische Theorie*, auf die wir nicht näher eingehen können.

- Die *Lösungsmenge* (Lösungsbereich) linearer Ungleichungssysteme hat folgende *Eigenschaften:*
  - Ihre explizite Angabe ist i.Allg. schwierig.
    Für den Sonderfall zweier Variablen gibt es die einfache Möglichkeit, die Lösungsmenge grafisch darzustellen, da hier Geraden die Lösungsmenge begrenzen (siehe Beisp.6.15a, 12.13 und 12.14).
  - Sie besteht im Regelfall aus (überabzählbar) unendlich vielen Lösungen, die geometrisch ein *konvexes Polyeder* mit (überabzählbar) unendlich vielen Punkten beschreiben (siehe Beisp.6.15a).
  - Sie kann im Sonderfall jedoch auch leer sein oder nur aus einem Punkt bestehen.

und klicken im erscheinenden Dialogfeld **Namen erstellen** das Kontrollfeld *Oberster Zeile* an. Damit erhalten die Variablen die gegebenen Namen, denen die eingetragenen Startwerte 0 zugewiesen werden.

II. Danach tragen wir in zusammenhängende Zellen Z3S1 bis Z3S3 der Tabelle die drei linken Seiten der zu lösenden Ungleichungen in Normalform als *Text* ein, d.h. im Textmodus. Dies dient nur zur Veranschaulichung und kann weggelassen werden.

III. Anschließend tragen wir unter die Textdarstellung der Ungleichungen in die entsprechenden Zellen Z4S1 bis Z4S3 die linken Seiten der zu lösenden Ungleichungen in Normalform als *Formeln* ein.

- Das Ergebnis der Schritte I-III ist im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen, wobei EXCEL in Z4S1 bis Z4S3 die Werte -1000 , 4 bzw. 6 schreibt, d.h. die Werte der linken Seiten der Ungleichungen für die Startwerte 0 der Variablen:

	1	2	3
1	x1	x2	
2	0	0	
3	3*x1+5*x2-1000≤0	4-x1≤0	6-x2≤0
4	-1000	4	6

- Die weiteren Schritte der Vorgehensweise sind folgende:

IV. Der SOLVER wird mittels der Menüfolge **Extras ⇒ Solver** aufgerufen und das erscheinende Dialogfeld **Solver-Parameter** analog zu Gleichungen wie folgt ausgefüllt:

Es sind nur bei *Nebenbedingungen* anstatt von Gleichungen die zu lösenden Ungleichungen unter Anwendung von *Hinzufügen* einzutragen.

V. Das abschließende Anklicken von *Lösen* im Dialogfeld **Solver-Parameter** löst die Berechnung aus:

6.8.3 Anwendungen in der Wirtschaft

Lineare Ungleichungssysteme bilden neben linearen Gleichungssystemen und Matrizen eine grundlegende Basis in statischen mathematischen Modellen der Wirtschaft. Sie treten u.a. in der Produktions- und Materialplanung und bei linearen Optimierungsaufgaben (siehe Abschn.12.5) auf.
Im Beisp.6.14 findet man zwei praktische Anwendungen, die bereits die fundamentale Bedeutung linearer Ungleichungen in Modellen der Wirtschaft erkennen lassen.

6.8.4 Lösung mittels EXCEL

EXCEL kann Lösungen (Lösungsvektoren) von Ungleichungssystemen und speziell linearen Ungleichungssystemen mittels des SOLVERS numerisch bestimmen:

- Die Anwendung des SOLVERS gestaltet sich analog zur Lösung allgemeiner Gleichungssysteme (siehe Abschn.6.3.2):
  Es sind lediglich im Dialogfeld **Solver-Parameter** bei *Nebenbedingungen* anstatt Gleichungen die zu lösenden Ungleichungen einzutragen.
- Der SOLVER rechnet numerisch:
  - Da vorliegende Ungleichungssysteme meistens eine unendliche Lösungsmenge (Lösungsbereich) besitzen, kann der SOLVER nicht die gesamte Lösungsmenge berechnen.
  - Der SOLVER berechnet nur einzelne Lösungsvektoren, wie im Beisp.6.16 illustriert ist.

- Das berechnete Ergebnis wird in der Tabelle anstelle der Startwerte für die Variablen x1 und x2 angezeigt und ein Antwortbericht kann angesehen werden:

	1	2	3
1	x1	x2	
2	6,4	6,4	
3	3*x1+5*x2-1000≤0	4-x1≤0	6-x2≤0
4	-948,8	-2,4	-0,4

- Da EXCEL numerisch rechnet, wird nur eine Lösung (Lösungsvektor)
  x1 = 6,4 , x2 = 6,4
  der durch das Ungleichungssystem bestimmten Lösungsmenge (Lösungsbereich) bestimmt.

7 Funktionen

7.1 Einführung

Funktionale Zusammenhänge spielen in der *Wirtschaft* ebenso wie in Technik und Naturwissenschaften eine fundamentale Rolle:

- In der Wirtschaft dienen funktionale Zusammenhänge zur Darstellung und Beschreibung von Vorgängen und Sachverhalten, in denen wirtschaftliche (ökonomische) Größen voneinander abhängen.
- Die *analytische* (formelmäßige) *Beschreibung* funktionaler Zusammenhänge lässt sich mittels *mathematischer Funktionen* realisieren.

7.2 Mathematische Funktionen

7.2.1 Grundlagen

Wenn man die Mathematik zur Untersuchung funktionaler Zusammenhänge heranziehen möchte, benötigt man den *mathematischen Funktionsbegriff*, den wir anschaulich als eindeutige Zuordnung vorstellen:

- Eine mathematische Funktion f beschreibt eine *eindeutige Abbildung* (Zuordnung) zwischen Elementen zweier Mengen A und B, d.h. jedem Element $x \in A$ (*Definitionsbereich* von f) wird durch f eindeutig ein Element $y \in B$ (*Wertebereich* von f) zugeordnet und man schreibt

  $y = f(x)$

- Im Weiteren schließen wir uns der allgemeinen (nicht exakten) Sprechweise in Lehrbüchern an, indem wir den *Funktionswert* $f(x)$ als Funktion bezeichnen und nicht die Zuordnungsvorschrift f.

- Bei Anwendungen tritt meistens der Fall auf, dass Definitions- und Wertebereich mathematischer Funktionen aus reellen Zahlen bestehen, d.h. es liegen reelle Funktionen reeller Variablen vor:
  - *Reelle Funktionen einer reellen Variablen* $f(x)$

    realisieren eindeutige Abbildungen aus dem Raum der reellen Zahlen R in R:
    - x und $y = f(x)$ werden als *unabhängige* bzw. *abhängige Variable* bezeichnet.
    - Man schreibt Funktionen einer Variablen auch in der Form $y = y(x)$.
    - Wenn die unabhängige Variable die Zeit t darstellt, so schreibt man meistens $y = y(t)$.
  - *Reelle Funktionen* von *n reellen Variablen* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$

    realisieren eindeutige Abbildungen aus dem n-dimensionalen Raum R^n in den eindimensionalen Raum der reellen Zahlen R:

Beispiel 7.1:
Die im Folgenden betrachteten *ökonomischen Funktionen* enthalten frei wählbare *Konstanten* (*Parameter*), die wir mit a, b, c, d, ... bezeichnen und für die bei konkreten Anwendungen reelle Zahlen bestimmt werden müssen (siehe Abschn.7.2.2):

a) *Nachfragefunktionen:*

- Sie beschreiben Zusammenhänge zwischen Preis und Nachfrage (Absatz) bzw. Nachfrage (Absatz) und Preis einer Ware.
- Sie werden durch Funktionen $f(x)$ einer reellen Variablen x realisiert, wobei x für den Preis oder abgesetzte Ware stehen kann. Sie teilen sich auf in:
  - *Preis-Nachfrage-Funktionen* (Preis-Absatz-Funktionen):
    Hier bezeichnet x (>0) den *Preis* einer Ware in Geldeinheiten GE und $f(x)$ die abgesetzte Menge der Ware in einer Bezugsperiode in Mengeneinheiten ME, d.h. die abgesetzte Ware (Nachfrage) wird als Funktion des Preises betrachtet.
  - *Nachfrage-Preis-Funktionen* (Absatz-Preis-Funktionen):
    Hier bezeichnet x die abgesetzte Menge der Ware und $f(x)$ den Preis der Ware, d.h. der Preis wird als Funktion der abgesetzten Ware x betrachtet.
- Aus ökonomischen Gesichtspunkten werden *Nachfragefunktionen* als monoton fallend vorausgesetzt, da mit wachsendem Preis der Absatz bzw. mit wachsendem Absatz der Preis sinkt.
- Mögliche *Realisierungen* von *Preis-Nachfrage-Funktionen* (mit $P_N(x)$ bezeichnet):
  - $P_N(x) = a - b \cdot x$ (a>0 , b>0)
  - $P_N(x) = c \cdot x^d$ (c>0 , d<0)
  - $P_N(x) = a \cdot b^{c \cdot x}$ (a>0 , b>0 , c<0)
- Falls *Umkehrfunktionen* $P_N^{-1}(y)$ von Preis-Nachfrage-Funktionen existieren, so realisieren sie Nachfrage-Preis-Funktionen.
- Bei Nachfragefunktionen treten auch *Funktionen mehrerer Variablen* auf, wenn man einen Markt mit m Waren betrachtet, auf dem die Nachfrage nach einer Ware von den Preisen aller m Waren abhängt. So können z.B. bei zwei Waren lineare *Preis-Nachfrage-Funktionen* $P_N(x_1, x_2)$ folgende Gestalt haben

  $$P_N^1(x_1, x_2) = a_1 - b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot x_2 \quad , \quad P_N^2(x_1, x_2) = a_2 + b_2 \cdot x_1 - c_2 \cdot x_2$$

  wobei $P_N^1(x_1, x_2)$ und $P_N^2(x_1, x_2)$ die abgesetzten Mengen der ersten bzw. zweiten Ware und x_1 bzw. x_2 die Preise der Waren darstellen.

b) *Angebotsfunktionen:*

- Hier steht die unabhängige Variable x (>0) für den *Preis* in GE einer Ware und $f(x)$ für die angebotene Menge in ME der Ware, d.h. die angebotene Ware wird als Funktion des Preises betrachtet.
- Sie werden als monoton wachsend vorausgesetzt, da i.Allg. die Angebotsmenge erhöht wird, wenn der Preis steigt.

* Jedem n-Tupel reeller Zahlen $(x_1, x_2, ..., x_n)$ (*unabhängige Variablen*) aus dem Definitionsbereich wird mittels
  $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$
  eindeutig eine reelle Zahl z (*abhängige Variable*) zugeordnet.
* Indem man das n-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_n)$ als Vektor **x** auffasst, schreiben sich die Funktionen analog zu einer Variablen in der Form
  $f(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
* Bei zwei unabhängigen Variablen verwendet man meistens die Schreibweise $z = f(x, y)$, d.h. man bezeichnet die unabhängigen Variablen mit x und y.

● *Analytisch* gegebene *mathematische Funktionen* $f(\mathbf{x})$ sind dadurch charakterisiert, dass $f(\mathbf{x})$ als Formel oder Potenzreihe (*analytischer Ausdruck*) vorliegt. Man teilt sie in zwei *Klassen* auf:

- *Elementare mathematische Funktionen*
  Hierzu gehören aus Potenz- und Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen und deren inversen Funktionen gebildete Funktionsausdrücke, die man in Unterklassen *algebraische* oder *transzendente* Funktionen einteilt.
- *Höhere mathematische Funktionen*
  Hierzu gehören durch Potenzreihen definierte Funktionen, wie z.B. Besselsche, hypergeometrische und Legendresche Funktionen

Wir beschränken uns auf elementare mathematische Funktionen, die in mathematischen Modellen der Wirtschaft überwiegen.

● Neben dem Idealfall, dass eine mathematische Funktion als analytischer Ausdruck (Formel oder Potenzreihe) vorliegt, gibt es einen weiteren für praktische Anwendungen wichtigen Fall:
Man vermutet einen funktionalen Zusammenhang zwischen gewissen Größen, hat aber hierfür keinen analytischen Ausdruck vorliegen, sondern kennt nur eine Reihe von *Funktionswerten* (siehe Abschn.7.2.2 und Beisp.7.5).

● Eine umfassende *qualitative* und *quantitative Untersuchung* mathematischer *Funktionen* ist sehr komplex. Hierzu zählen u.a.

- Untersuchung auf *Stetigkeit* bzw. *Unstetigkeit*, d.h. ob gewisse Unstetigkeitsstellen (z.B. Sprungstellen) vorliegen:
  * Wir gehen nicht näher auf diese wichtige Stetigkeitsproblematik ein und verweisen auf die Literatur.
  * Obwohl in Modellen der Wirtschaft meistens stetige Funktionen auftreten, da kontinuierliche Zusammenhänge überwiegen, gibt es auch Anwendungen mit unstetigen Funktionen (siehe Beisp.7.2).
- Bestimmung von *Nullstellen*, d.h. Lösung von Gleichungen (siehe Kap.6).

- In Anwendungen betrachtet man meistens ihre Umkehrfunktionen, d.h. den Preis als Funktion der angebotenen Menge. Sie werden ebenfalls als Angebotsfunktionen bezeichnet.
- Mögliche *Realisierungen* für Angebotsfunktionen (mit $P_A(x)$ bezeichnet) sind:
  - $P_A(x) = a + b \cdot x$ (a>0 , b>0)
  - $P_A(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (a>0 , b>0 , c>0)
  - $P_A(x) = a \cdot \sqrt{b \cdot x + c}$ (a>0 , b>0 , c>0)

c) *Erlösfunktionen* (*Umsatzfunktionen*)

- Sie haben die Gestalt $E(x) = p \cdot x$, da sich der Erlös/Umsatz (in GE) berechnet, indem man Preis p in GE/ME mit abgesetzter Menge x (in ME) eines hergestellten Produkts multipliziert.
- Für Erlösfunktionen gibt es zwei Möglichkeiten:
  - Hat man die Menge $x(p)$ als Funktion des Preises p, so ist der *Erlös* $E(p) = p \cdot x(p)$ eine Funktion des Preises.
  - Hat man den *Preis* $p(x)$ als Funktion der Menge x, so ist der *Erlös* $E(x) = p(x) \cdot x$ eine Funktion der Menge.

d) *Mikroökonomische Produktionsfunktionen:*

- Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen bei der Produktion einer Ware W in einem Unternehmen benötigten Produktionsfaktoren (*Input*) $\mathbf{x}$ und der damit hergestellten Menge (*Output*) $z = f(\mathbf{x})$ der Ware.
- Wichtige Produktionsfaktoren sind u.a. Rohstoffe, Arbeit und Energie, so dass Produktionsfunktionen häufig Funktionen mehrerer Variablen sind.
- Betrachten wir zuerst Produktionsfunktionen einer Variablen $f(x)$. Mögliche *Realisierungen* hierfür sind (a>0 , b>0, c>0):
  - $f(x) = -x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x$ (*ertragsgesetzliche Produktionsfunktion*)
  - $f(x) = c \cdot x^a$ (*Cobb-Douglas-Produktionsfunktion*)
  - $f(x) = (a + x^{-b})^{-2}$ (*CES-Produktionsfunktion*)

    CES steht für *constant elasticity of substitution*, d.h. konstante Substitutionselastizität.
- Meistens stellt sich der *Output* z einer Produktion als Funktion $f(\mathbf{x})$ *mehrerer Inputs* (Einflussfaktoren/Produktionsfaktoren) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dar, so dass $z = f(\mathbf{x})$ eine Funktion *mehrerer Variablen* ist. Hier können ebenfalls *Cobb-Douglas-Produktionsfunktion* auftreten, die bei n unabhängigen Variablen folgende Form haben:

  $$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot ... \cdot x_n^{a_n} \qquad (a_i > 0)$$
- Neben mikroökonomischen Produktionsfunktionen spielen *makroökonomische Produktionsfunktionen* eine Rolle. Derartige Funktionen beschreiben den Zusammenhang zwischen der Gesamtproduktion Z einer Volkswirtschaft und den Produktionsfaktoren Kapital K, Arbeit L und technischem Fortschritt T, d.h. $Z = f(K, L, T)$.

Beispiele

- Bestimmung von *Minima* und *Maxima* und Untersuchung auf *Monotonie* unter Anwendung der Differentialrechnung (siehe Kap.8).
- *grafische Darstellung* (siehe Abschn.7.4).

Beim heutigen Stand der Informatik lassen sich diese oft schwierigen Untersuchungen von Funktionen mittels Computer einfach realisieren, wie im Buch am Beispiel von EXCEL illustriert ist.

7.2.2 Anwendungen in der Wirtschaft

In Modellen der Wirtschaft werden mathematische Funktionen als *ökonomische Funktionen* bezeichnet, bei denen unabhängige Variablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ meistens *Input* und abhängige Variable z *Output* heißen.

Sie liefern eine analytische (formelmäßige) *Beschreibung* wirtschaftlicher (ökonomischer) *Zusammenhänge:*

- Man erhält ökonomische Funktionen auf zwei Arten:
  - Aus bekannten wirtschaftlichen (ökonomischen) *Gesetzmäßigkeiten:*
    Dies ist der Idealfall, in dem sich ökonomische Funktion als analytische Ausdrücke darstellen (*analytische Darstellung*), d.h. sie sind als *Formeln* gegeben.
    * Zu *ökonomischen Funktionen* gehören u.a.
      – Nachfragefunktionen (Preis-Absatz-, Absatz-Preis-Funktionen)
      – Angebotsfunktionen
      – Erlösfunktionen (Umsatzfunktionen)
      – Produktionsfunktionen (Ertragsfunktionen)
      – Kostenfunktionen
      – Gewinnfunktionen
      – Konsumfunktionen
      – Lagerkostenfunktionen
      – Nutzenfunktionen
      – Logistische Funktionen
      – Funktionen der Finanzmathematik
    * Konkrete Vertreter ökonomischer Funktionen lernen wir im Beisp.7.1 kennen.
  - Aus durchgeführten *Beobachtungen* (*Zählungen*, *Messungen*), *Befragungen* oder *Experimenten:*
    * Hier erhält man den funktionalen Zusammenhang in Form einer *Wertetabelle*, d.h. es liegt eine *tabellarische Darstellung* vor.
    * Wertetabellen treten öfters auf, da analytische Ausdrücke $f(\mathbf{x})$ für vermutete funktionale Zusammenhänge nicht immer bekannt sind, sondern nur eine Reihe von Funktionswerten:
      – Bei Funktionen $f(x)$ *einer Variablen* x bedeutet dies, dass man Funktionswerte $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, ..., n)$

Viele makroökonomische Produktionsfunktionen werden ebenfalls durch *Cobb-Douglas-Funktionen* realisiert.

e) *Kostenfunktionen:*

- Sie stellen die Gesamtkosten K(x) (in GE) eines Unternehmens als *Funktion* der abgesetzten Menge x dar (z.B.Produktionsmenge/Bestellmenge in ME eines Produkts).
- Sie werden meistens in *variable* und *fixe Kosten* der Produktion aufgeteilt, d.h. es gilt $K(x) = K_v(x) + K_f(x)$
- Mögliche *Realisierungen* für *Kostenfunktionen* sind (d >0 - *fixe Kosten*):
  - $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ (*ertragsgesetzliche Kostenfunktionen*)
  - $K(x) = a \cdot x^2 + d$ (*neoklassische Kostenfunktionen*)
  - $K(x) = a \cdot x + d$ (*lineare Kostenfunktionen*)
- Dividiert man die Kosten $K(x)$ durch x (>0), d.h.

  $$k(x) = \frac{K(x)}{x}$$

  so stellt $k(x)$ die *Gesamtkosten* pro *Einheit* dar (durchschnittliche Gesamtkosten/ Durchschnittskosten des hergestellten Produkts).
- Bisher haben wir angenommen, dass das Unternehmen nur ein Produkt herstellt. Bei der Herstellung von n Produkten ergeben sich *Kostenfunktionen* als Funktionen von *n Variablen* , so z.B. *lineare Kostenfunktionen* in der Form

  $K(x_1, \ldots, x_n) = p_1 \cdot x_1 + \ldots + p_n \cdot x_n + d$ (siehe Beisp.12.2d und 12.3b)

f) *Gewinne* G(x) eines Unternehmens werden als *Differenz* aus *Erlös* E(x) = p·x (siehe Beisp.7.1c) und *Kosten* K(x) (siehe Beisp.7.1e) berechnet, die als Funktionen der abgesetzten Menge x eines hergestellten Produkts in Mengeneinheiten ME betrachtet werden:

- *Gewinnfunktionen* ergeben sich damit in der Form $G(x) = E(x) - K(x) = p \cdot x - K(x)$, wobei für den *Preis* p zwei Fälle auftreten können:
  - Der Preis p hängt nicht von der abgesetzten Menge x ab, d.h. er ist *konstant*.
  - Der Preis p hängt von der abgesetzten Menge x ab, d.h. p(x) ist eine Funktion von x.
- Wenn Kosten K(x) linear von x abhängen und Preise p konstant sind, so liegen lineare Gewinnfunktionen vor (siehe Beisp.12.3a).

g) *Konsumfunktionen* liefern einen Zusammenhang zwischen Sozialprodukt x (>0) und Gesamtausgaben $f(x)$ (>0) und werden meistens als lineare Funktion dargestellt, d.h.

$f(x) = a + b \cdot x$ (a>0, b>0)

h) *Lagerkostenfunktionen* haben die Form

$$f(x) = a \cdot x + \frac{b}{x} + c \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

wobei $f(x)$ (>0) die *Lagerkosten* einer Firma für ein Produkt bei einem Lagerbestand von x (>0) Stück darstellt.

Beispiele

in einer Reihe von x-Werten x_i zur Verfügung hat, d.h. hier ist der funktionale Zusammenhang als Wertetabelle mit n Wertepaaren, d.h. Punkten

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

in der xy-Ebene gegeben.

– Bei Funktionen $f(x, y)$ *zweier Variablen* x und y bedeutet dies, dass man Funktionswerte

$z_{ik} = f(x_i, y_k)$ (i = 1 ,..., m , k= 1 ,..., n)

in einer Reihe von x-Werten x_i (i = 1 ,..., m)

und y-Werten y_k (k= 1 ,..., n)

zur Verfügung hat, d.h. hier ist der funktionale Zusammenhang als Wertetabelle in Form von m·n Wertetripeln (Punkte im dreidimensionalen Raum)

$(x_1, y_1, z_{11}), (x_1, y_2, z_{12}), \ldots, (x_m, y_n, z_{mn})$

gegeben.

* Die Numerische Mathematik stellt verschiedene Methoden zur Verfügung, um durch Punkte gegebene Funktionen mittels *analytisch gegebener Funktionen* (z.B. Polynome) anzunähern. Hierzu zählen *Interpolation* (siehe Beisp.7.5) und *Methode der kleinsten Quadrate* (siehe Beisp.14.7c).

- In praktischen ökonomischen Modellen auftretende Funktionen enthalten in gewissen Fällen unbekannte (frei wählbare) *Konstanten*, die auf eine der folgenden Arten bestimmbar sind:
  - Durch *Beobachtungen* (*Zählungen*, *Messungen*), *Befragungen* oder *Experimente* bestimmt man konkrete *Zahlenwerte* für unabhängige und abhängige Variablen und man erhält eine Wertetabelle für den funktionalen Zusammenhang.
  - Durch *Anwendung* der *Differentialrechnung* lassen sich unbekannte Konstanten in analytisch gegebenen Funktionen derart bestimmt, dass gewisse ökonomische Eigenschaften (z.B. Monotonie) erfüllt sind. Wir illustrieren dies im Beisp.8.11.
- In Modellen der Wirtschaft besitzen *homogene Funktionen* große Bedeutung:
  - Homogene Funktionen $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ besitzen die *Eigenschaft*:

    $$f(\lambda \cdot \mathbf{x}) = f(\lambda \cdot x_1, \ldots, \lambda \cdot x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda^r \cdot f(\mathbf{x})$$

    wobei $\lambda \geq 0$ eine beliebige reelle Zahl und $r > 0$ den *Grad* der *Homogenität* (Homogenitätsgrad) bezeichnen.
  - Ein Beispiel für homogene Funktionen liefern *Cobb-Douglas-Funktionen* einer Variablen der Form (siehe Beisp.7.1d)

    $$z = f(\mathbf{x}) = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n} \qquad (a_i > 0,\ a_1 + \ldots + a_n = r)$$

    die *homogen* vom *Grade* r sind.
  - *Ökonomisch* bedeutet die Homogenität für Input **x** und Output $z = f(\mathbf{x})$, dass für

Bei *mehreren Produkten* erhält man eine Lagerkostenfunktion mit mehreren Variablen, so z.B. für zwei Produkte x_1, x_2 folgende Lagerkostenfunktion zweier Variablen

$$f(x_1,x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + \frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_2} + e \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0,\ e>0)$$

i) *Nutzenfunktionen* $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liefern einen Zusammenhang zwischen *Nutzen* und *Menge* von *Gütern* (Waren) $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

- Eine mögliche *Realisierung* für *Nutzenfunktionen* von zwei Variablen hat die Form
  $$N(x_1, x_2) = a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \qquad (\textit{Cobb-Douglas-Nutzenfunktion})$$
- Die Niveaulinien (Höhenlinien) $N(x_1, x_2) =$ konstant werden als *Indifferenzkurven* bezeichnet.

j) *Logistische Funktionen* ergeben sich als Lösung von Differentialgleichungen (*logistische Gleichungen*) in folgender Form (siehe Abschn.11.4.2 und Beisp.11.5c)

$$y(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{-a \cdot S \cdot t}} \qquad (\ S>0 - \text{Sättigungsgrad}\ ,\ a>0\ )$$

und dienen als *Prognosefunktionen* für langfristige Prognosen bei zeitabhängigen *Wachstumsprozessen* (z.B. Entwicklung des Autobestandes oder der Steuereinnahmen) $y(t)$ zum Zeitpunkt t, die eine Sättigung S besitzen.

Beispiel 7.2:

Betrachten wir ökonomische Funktionen, die sich aus verschiedenen Funktionen zusammensetzen:

a) *Kostenfunktionen* (siehe Beisp.7.1e) können für verschiedene x-Intervalle durch unterschiedliche Funktionstypen oder durch verschiedene Funktionen vom gleichen Typ gebildet werden, so dass *Unstetigkeiten* in Form von *Sprungstellen* möglich sind, wie im Folgenden zu sehen ist:

a1) Eine *Kombination* unterschiedlicher Typen von *Kostenfunktionen* tritt auf, wenn für unterschiedliche Bereiche des Inputs x verschiedene Kostenfunktionen zuständig sind, z.B. durch Kauf zusätzlicher Maschinen oder durch überhöhten Verschleiß der Maschinen. So kann z.B. folgende Kostenfunktion auftreten:

$$K(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot x + 2 & \text{für} \quad 0 \le x \le 3 \\ 0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 4 & \text{für} \quad 3 < x \le 9 \end{cases}$$

die bei x = 3 eine Sprungstelle besitzt.

a2) Wenn bei gleichem Funktionstyp in verschiedenen x-Intervallen unterschiedliche Fixkosten entstehen, kann beispielsweise folgende *unstetige Kostenfunktion* auftreten:

$$K(x) = \begin{cases} 0{,}5 \cdot x + 2 & \text{für} \quad 0 \le x \le 3 \\ 0{,}5 \cdot x + 4 & \text{für} \quad 3 < x \le 6 \\ 0{,}5 \cdot x + 7 & \text{für} \quad 6 < x \le 9 \end{cases}$$

, die bei x=3 und x=6 Sprungstellen besitzt.

- $r = 1$ (*linear-homogen*)
  der Output im gleichen Maße wie der Input wächst.
- $0 < r < 1$ (*unterlinear-homogen*)
  der Output im geringeren Maße als der Input wächst.
- $r > 1$ (*überlinear-homogen*)
  der Output im stärkeren Maße als der Input wächst.

7.3 Funktionen in EXCEL

Sämtliche in EXCEL *integrierten* (vordefinierten) *Funktionen* werden im Dialogfeld **Funktion einfügen** angezeigt, das nach Aufruf des *Funktions-Assistenten* durch Anklicken des Symbols

in der Bearbeitungsleiste oder Aktivierung der Menüfolge **Einfügen ⇒ Funktion** erscheint (siehe Abschn.2.2 und Beisp.2.2 und 3.1):

- Wir bezeichnen im Weiteren alle in EXCEL integrierten Funktionen als *EXCEL-Funktionen.*
- Im Dialogfeld **Funktion einfügen** sind alle EXCEL-Funktionen in erforderlicher Schreibweise und mit kurzer Erklärung aufgeführt und lassen sich durch Anklicken von OK in die aktive Zelle der Tabelle einfügen, wobei erforderliche Argumente der Funktion im erscheinenden Dialogfeld **Funktionsargumente** einzutragen sind.
- Man kann EXCEL-Funktionen auch ohne Funktions-Assistenten einsetzen, indem man sie als Formel mit Funktionsnamen und erforderlichen Argumenten in eine aktive Zelle eingibt.

7.3.1 Allgemeine Funktionen

Neben mathematischen Funktionen kennt EXCEL zahlreiche weitere Funktionen, die ebenfalls im Dialogfeld **Funktion einfügen** des Funktions-Assistenten aufgeführt sind. Hierzu gehören Funktionen zu

- Datenbanken
- Text
- Datum und Zeit
- Information

Man bezeichnet derartige Funktionen als *allgemeine Funktionen*, d.h. ebenfalls als Funktionen, da sie ähnliche Eigenschaften wie mathematische Funktionen besitzen:

Sie ordnen gewissen Eingabegrößen eindeutig Ausgabegrößen zu.

7.3.2 Mathematische Funktionen

Die in EXCEL integrierten (vordefinierten) mathematischen Funktionen sind in verschiedene Klassen/Kategorien aufgeteilt, die wir im Abschn.3.3.1 vorstellen:

a3) *Unstetige Kostenfunktionen* können auch auftreten, wenn die Kosten von der hergestellten Menge eines Produkts abhängen. Wenn z.B. bis 100 Stück 20 GE, bis 500 Stück 17 GE und ab 500 Stück 13 GE Kosten pro Stück entstehen, hat die *Kostenfunktion* bei Fixkosten von 5 GE folgende *Form :*

$$K(x) = \begin{cases} 20 \cdot x + 5 & \text{für} \quad 0 \le x < 100 \\ 17 \cdot x + 5 & \text{für} \quad 100 \le x < 500 \\ 13 \cdot x + 5 & \text{für} \quad 500 \le x \end{cases}$$

d.h. sie besitzt *Sprungstellen* bei x = 100 und x = 500.

b) Der *Lagerbestand* L(t) eines Teiles als Funktion der Zeit t (Tage) betrachtet, ergibt eine *Treppenfunktion* (*Stufenfunktion*), wenn man die Zeit für Entnahme und Auffüllung der Teile vernachlässigt.
Im folgenden Zahlenbeispiel werden am 5., 6. und 12. Tag 5, 6 bzw. 3 Teile entnommen und am 9. Tag 21 Teile aufgefüllt, so dass die Funktion in diesen Zeitpunkten *Unstetigkeiten* in Form von Sprüngen besitzt und dazwischen konstant ist:

$$L(t) = \begin{cases} 20 & \text{für} \quad 1 \le t < 5 \\ 15 & \text{für} \quad 5 \le t < 6 \\ 9 & \text{für} \quad 6 \le t < 9 \\ 30 & \text{für} \quad 9 \le t < 12 \\ 27 & \text{für} \quad 12 \le t < 18 \end{cases}$$

Beispiel 7.3:

Wenn der Zusammenhang zwischen Umsatz $z_{i\,k}$ eines Betriebes , Anzahl x_i der verkauften Mengeneinheiten ME und Preise y_k in Geldeinheiten GE betrachtet wird, kann eine *tabellarische Darstellung* (*Wertetabelle*) für einen *funktionalen Zusammenhang* $z = f(x, y)$ z.B. folgende Gestalt haben:

x =	y = 10	12	14	15	16
1	10	12	14	15	16
2	20	24	28	30	32
3	30	36	42	45	48
4	40	48	56	60	64
5	50	60	70	75	80
6	60	72	84	90	94

So liest man aus dieser Tabelle z.B. ab, dass bei 3 zum Preis von 14 GE verkauften ME der Umsatz 42 GE beträgt.

Beispiel 7.4:

Illustrieren wir die Anwendung des im Abschn.7.4.1 vorgestellten *Diagramm-Assistent:*

- Nach Markierung der in der EXCEL-Tabelle erzeugten Punkte zur grafischen Darstellung von Funktionen einer oder zweier Variablen (siehe Beisp.7.5-7.7) ist der *Diagramm-Assistent* aufzurufen und ein *Durchlauf* durchzuführen.

- In EXCEL versteht man unter mathematischen Funktionen nicht nur elementare und höhere mathematische Funktionen (siehe Abschn.7.2.1), sondern u.a. auch Funktionen für statistische und finanzmathematische Rechnungen und Matrizenrechnung.
- Wichtige mathematische Funktionen von EXCEL werden im Buch vorgestellt.

7.3.3 Definition von Funktionen

Die in EXCEL integrierten Funktionen reichen für die Anwendung nicht immer aus, so dass die *Definition* eigener *Funktionen* erforderlich ist:

- Die Programmierung zusätzlicher Funktionen geschieht unter Verwendung der in EXCEL integrierten Programmiersprache VBA.
- Wir betrachten die VBA-Programmierung ausführlicher im Kap.4, wobei die Programmierung (Definition) von Funktionen im Abschn.4.5.4 behandelt wird.
- In den Beisp.4.4, 4.11 und 4.12 findet man Illustrationen zur Definition von Funktionen mittels VBA-Programmierung, die als Vorbild zur Definition eigener Funktionen dienen können.
- Möchte man eine Funktion nur innerhalb einer Arbeitssitzung von EXCEL verwenden, so braucht man diese Funktion nicht zu programmieren (definieren), sondern kann ihren Ausdruck (Formel) wie üblich in Formelschreibweise (mit vorangestelltem Gleichheitszeichen) in eine Zelle der aktiven Tabelle eingeben.

7.4 Grafische Darstellungen mathematischer Funktionen in EXCEL

EXCEL besitzt umfangreiche Möglichkeiten zur grafischen Darstellung von Daten, die in Form von Zahlen in einer Tabelle vorliegen:

- Zur grafischen Darstellung mathematischer Funktionen genügt es in EXCEL, wenn sie durch eine gewisse Anzahl von Punkten gegeben sind (siehe Abschn.7.4.2 und Beisp. 7.5-7.7).
- EXCEL bezeichnet grafische Darstellungen als *Diagramme*, die mit Hilfe des *Diagramm-Assistenten* zu erstellen sind, dessen konkrete Anwendung wir im Folgenden vorstellen (siehe auch Beisp.7.4).

7.4.1 Diagramm-Assistent

Der *Diagramm-Assistent* stellt in EXCEL ein wirkungsvolles Hilfsmittel dar, um grafische Darstellungen realisieren zu können:

- Er kann nach Markierung grafisch darzustellender Zahlen auf zwei Arten aufgerufen werden:
  - Anklicken des Symbols aus der Standardsymbolleiste

  - Aktivierung der Menüfolge **Einfügen ⇒ Diagramm**.
- Nach Aufruf des *Diagramm-Assistenten* vollzieht sich die Erstellung von Grafiken in vier Schritten, so dass man von einem *Durchlauf* des Diagramm-Assistenten spricht:

- Im zuerst erscheinenden Dialogfeld *Schritt 1 von 4 - Diagrammtyp* werden Diagrammtyp und *Diagrammuntertyp* eingestellt, wobei für letzteren verschiedene Möglichkeiten angeboten werden, die man durch Probieren erkunden kann:
  - Grafische Darstellung von *Funktionen einer Variablen* (d.h. von Funktionskurven - siehe Beisp.7.5 und 7.6):
    - ∗ Hier ist der Diagrammtyp *Punkt(XY)* zu markieren (siehe Abb.7.1).
    - ∗ Beim zugehörigen *Diagrammuntertyp* lassen sich verschiedene Darstellungen wählen (siehe Abb.7.1):
      - – Die Wahl des ersten Diagrammuntertyps *Punkte. Vergleicht Werte paarweise* stellt nur die in der Tabelle markierten Punkte der Funktion dar.
      - – Die Wahl des letzten (markierten) Diagrammuntertyps *Punkte mit Linien ohne Datenpunkte* verbindet die markierten Punkte durch Geradenstücke.

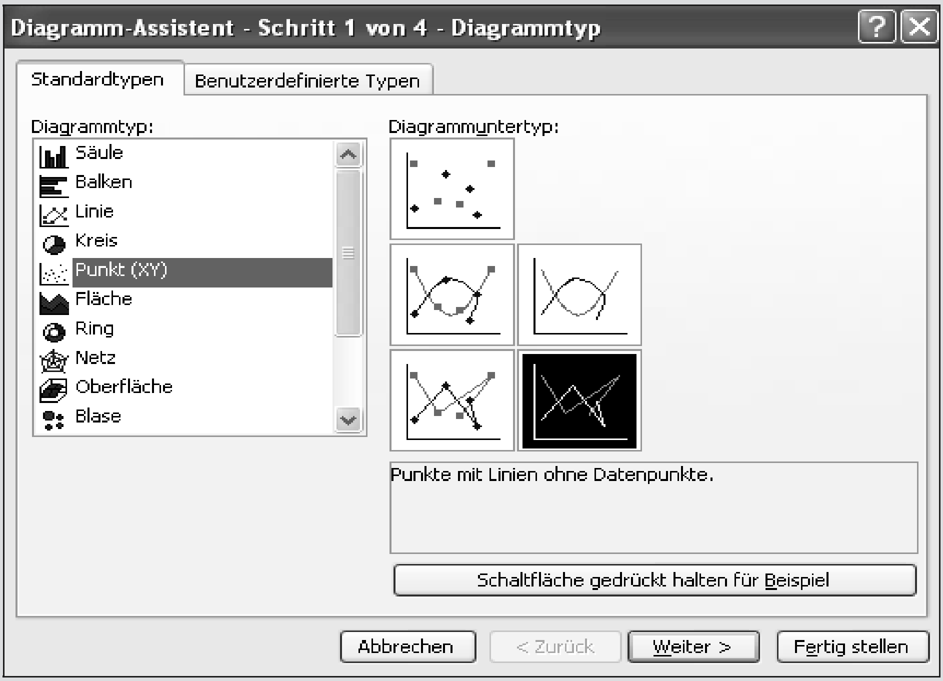


Abb.7.1: Diagramm-Assistent: Schritt 1 von 4 zur Darstellung von Funktionskurven

  - Grafische Darstellung von Funktionen zweier Variablen (d.h. von Flächen - siehe Beisp.7.7):
    - ∗ Hier ist der Diagrammtyp *Oberfläche* zu markieren (siehe Abb.7.2).
    - ∗ Ein passender *Diagrammuntertyp* ist die in Abb.7.2 markierte *3D-Oberfläche*.
- In den beiden Dialogfeldern *Schritt 2 von 4* und *Schritt 3 von 4*, die jeweils durch Mausklick auf die Schaltfläche WEITER erscheinen, werden für beide Funktionsklassen der Bereich der markierten Zahlen (Datenbereich bzw. Diagrammquelldaten) angezeigt bzw. können Diagrammoptionen eingestellt werden.

Beispiele

I. Als Erstes erscheint das Dialogfeld *Schritt 1 von 4:*
   - In diesem ersten Dialogfeld wird der *Diagrammtyp* festgelegt. Für grafische Darstellungen mathematischer Funktionen benötigt man folgende Typen:
     - ∗ *Punkt (XY):* für Funktionen einer Variablen
     - ∗ *Oberfläche:* für Funktionen zweier Variablen
   - Des Weiteren ist bei *Diagrammuntertyp* zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wählen (siehe Beisp.7.4-7.7).

II. Durch Mausklick auf die Schaltfläche WEITER des ersten Dialogfeldes erscheint das zweite Dialogfeld *Schritt 2 von 4*, in dem der Bereich der markierten Zahlen (Datenbereich bzw. Diagrammquelldaten) angezeigt wird, die grafisch darzustellen sind.

III. Durch Mausklick auf die Schaltfläche WEITER des zweiten Dialogfeldes erscheint das dritte Dialogfeld *Schritt 3 von 4*, in der *Diagrammoptionen* eingegeben werden wie z.B. Diagrammtitel, Bezeichnung der x- und y-Achse, Gitternetzlinien.

IV. Durch Mausklick auf die Schaltfläche WEITER des dritten Dialogfeldes erscheint das vierte Dialogfeld *Schritt 4 von 4*.
Hier kann die *Diagrammplatzierung* festgelegt werden, wobei zwischen einem neuen Tabellenblatt oder Fenster im aktuellen Tabellenblatt zu wählen ist.

- Wenn man eine Funktion grafisch dargestellt, d.h. ein Diagramm erstellt hat, so wird die Menüleiste von EXCEL durch die *Diagrammleiste* ersetzt, wenn man das erzeugte Diagramm durch Mausklick markiert.

Bemerkung

Wir können im Rahmen des Buches nicht auf die Vielzahl möglicher Diagramme im Rahmen von EXCEL eingehen und verweisen auf die im Literaturverzeichnis aufgeführte Literatur.
Wir befassen uns nur mit der für mathematische Untersuchungen wichtigen Problematik statistischer Grafiken (siehe Beisp.14.7) und grafischer Darstellungen reeller mathematischer Funktionen mit einer oder zwei Variablen (siehe Abschn.7.4.2).

♦

7.4.2 Kurven und Flächen

Wir betrachten im Folgenden die grafische Darstellung mathematischer Funktionen mit einer Variablen (*Kurven*) oder zwei Variablen (*Flächen*), für die in EXCEL folgende Vorgehensweise erforderlich ist:

- Die Funktionen können in folgenden zwei Formen vorliegen:
  - Form I:
    Als Wertepaare oder Wertetripel (d.h. Punkte in der Ebene bzw. im Raum).
    Dies ist der einfachste Fall, da EXCEL nur so gegebene Funktionen unmittelbar grafisch darstellen kann.

- Im abschließend erscheinenden Dialogfeld *Schritt 4 von 4 - Diagrammplatzierung* kann man festlegen, wo die Grafik (Diagramm) erscheinen soll.

Abb.7.2: Diagramm-Assistent: Schritt 1 von 4 zur Darstellung von Flächen

Beispiel 7.5:
Eine *Preis-Nachfrage-Funktion* (siehe Beisp.7.1a und 14.7b2) sei durch fünf Punkte $(2, 95), (3, 96), (4, 92), (5, 89), (8, 83)$ gegeben:

- In EXCEL gibt es mehrere Möglichkeiten zur grafischen Darstellung von Funktionen, die nur durch Punkte gegeben sind. Diese können im Schritt 1 beim Durchlauf des Diagramm-Assistenten bei *Diagrammuntertyp* ausgewählt werden:
  - Es können nur die gegebenen Punkte der Funktion grafisch dargestellt werden.
  - Die gegebenen Punkte können durch Geraden- oder Kurvenstücke miteinander verbunden werden:
    - ∗ Bei der Verbindung durch Geradenstücke wird linear zwischen den gegebenen Punkten interpoliert und man erhält als Interpolationskurve einen Polygonzug.
    - ∗ Wir stellen sowohl die gegebenen Punkte als auch den Polygonzug grafisch dar.

- Zur grafischen Darstellung ergeben sich aus der in Abschn.7.4.1 und 7.4.2 und Beisp.7.4 beschriebenen Vorgehensweise folgende konkrete Schritte:
  - I. Man schreibt in eine Spalte Z1S1:Z5S1 der aktiven Tabelle die gegebenen x-Werte $2, 3, 4, 5, 8$.
  - II. In die danebenliegende Spalte Z1S2:Z5S2 trägt man die zugehörigen Funktionswerte $f(x)$ ein, d.h. $95, 96, 92, 89, 83$.

- Form II:
  Als Funktionsausdrücke der Form $f(x)$ bzw. $f(x,y)$.
  Hier müssen vor der grafischen Darstellung in EXCEL mittels der Funktionsausdrücke Wertepaare bzw. Wertetripel (d.h. Punkte in der Ebene bzw. im Raum) erzeugt werden, so dass Form I vorliegt. Wir illustrieren dies in den Beisp.7.5-7.7

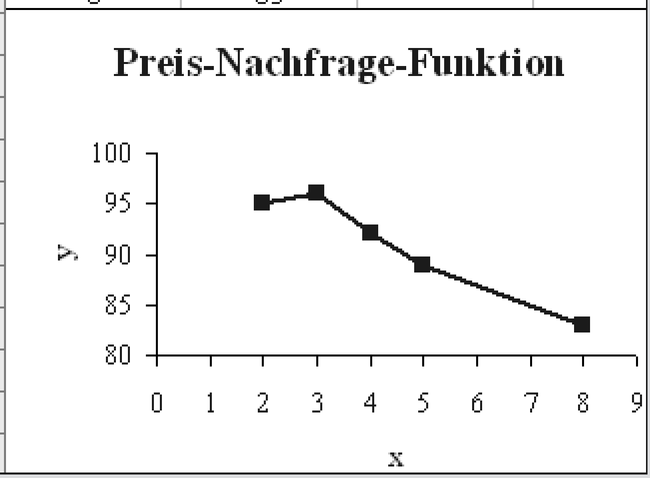
- Die *grafische Darstellung* von Funktionen $f(x)$ einer Variablen wird als *Graph* oder *Funktionskurve* bezeichnet und ist eine Kurve in der xy-Ebene, die EXCEL folgendermaßen liefert:
  - EXCEL verwendet die Eigenschaft, dass sich n gegebene Wertepaare (Punkte)
    $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ mit $y_i = f(x_i)$ $i = 1, 2, \ldots n$
    in der xy-Ebene durch Geradenstücke verbinden lassen, d.h. es wird ein *Polygonzug* erzeugt, der für hinreichend viele Wertepaare (d.h. großes n) eine ausreichende Näherung für die Funktionskurve von $f(x)$ liefert.
  - Zur grafischen Darstellung sind folgende konkrete Schritte erforderlich:
    I. Man schreibt in eine Spalte der aktiven Tabelle die vorliegenden x-Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
    II. In die danebenliegende Spalte trägt man die vorliegenden zugehörigen Funktionswerte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein.
    III. Anschließend markiert man die beiden ausgefüllten Spalten und startet den *Diagramm-Assistenten* wie im Abschn.7.4.1 beschrieben.
    IV. Im ersten erscheinenden Dialogfeld *Schritt 1 von 4* wählt man als Diagrammtyp *Punkte (XY)*. Bei Diagrammuntertyp hat man mehrere Darstellungsmöglichkeiten (siehe Beisp.7.4-7.6).
    V. Nach dem weiteren Durchlauf der Schritte 2 bis 4 des Diagramm-Assistenten (siehe Abschn.7.4.1 und Beisp.7.4-7.6) erhält man die Funktionskurve.
  - Für als Formel $f(x)$ gegebene Funktionen kann man die von EXCEL zur Kurvendarstellung in einem x-Intervall [a,b] benötigten Punktepaare $(x, f(x))$ einfach erhalten (siehe Beisp.7.6), wenn man gleichabständige x-Werte verwendet und folgendermaßen vorgeht:
    * Man schreibt in die erste Zelle einer freien Spalte den ersten x-Wert (Anfangswert a des Intervalls) und darunter den zweiten und legt damit die Schrittweite für x fest.
    * Danach markiert man beide x-Werte und zieht sie am *Ausfüllkästchen* (an der rechten unteren Ecke) nach unten, bis der Endwert b des Intervalls erreicht ist.
    * Danach definiert man mittels der Menüfolge
      Einfügen ⇒ Namen ⇒ Definieren
      für die so konstruierten gleichabständigen x-Werte den Namen x.

III. Anschließend markiert man die beiden ausgefüllten Spalten und startet den *Diagramm-Assistenten* (siehe Beisp.7.4).

IV. Im ersten erscheinenden Dialogfeld *Schritt 1 von 4* wählt man als Diagrammtyp *Punkt (XY)*. Bei *Diagrammuntertyp* hat man mehrere Darstellungsmöglichkeiten. Wir wählen *Punkte mit Linien ohne Datenpunkte.*

V. Nach dem weiteren Durchlauf von *Schritt 2 bis 4* des Diagramm-Assistenten erhält man die folgende abgebildete Funktionskurve, in der die gegebenen Punkte durch Quadrate dargestellt sind:

	1	2	3	4
1	2	95		
2	3	96		
3	4	92		
4	5	89		
5	8	83		



Beispiel 7.6:

Im Folgenden sieht man die grafische Darstellung (Funktionskurve) einer speziellen *Preis-Nachfrage-Funktion* (siehe Beisp.7.1a)

$$f(x) = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} \qquad \text{für } x \in [0{,}25\ ,\ 3]$$

Die von EXCEL gezeichnete Funktionskurve wird durch Anwendung der im Abschn.7.4 und Beisp.7.4 gegebenen Vorgehensweise unter Verwendung gleichabständiger x-Werte erhalten:

- Die x-Werte werden erzeugt, indem man in die beiden ersten Zellen Z1S1 und Z2S1 die Werte x-Werte 0,25 bzw. 0,5 einträgt und markiert und dann am Ausfüllkästchen bis zu 3 (Zelle Z12S1) nach unten zieht. Damit hat man für das Intervall [0,3] die Schrittweite 0,25 gewählt.

* Danach trägt man in die neben den x-Werten liegende Spalte in die erste Zelle den zu zeichnenden Funktionsausdruck $f(x)$ als Formel ein. Diese Zelle wird markiert und am Ausfüllkästchen des Zellzeigers nach unten gezogen, so dass für alle vorgegebenen x-Werte die zugehörigen Funktionswerte berechnet werden. Damit hat man die zur grafischen Darstellung benötigten Wertepaare für die Funktion $f(x)$ erzeugt und kann die obigen Schritte III-V durchführen.

- Die grafische Darstellung einer Funktionen $f(x,y)$ zweier Variablen ist eine *Fläche* im dreidimensionalen Raum, die EXCEL folgendermaßen liefert:
  - Die grafische Darstellung von *Flächen* in EXCEL geschieht, indem eine *Matrix* erzeugt wird, die als Elemente die Funktionswerte der über einem Rechteck zu zeichnenden Funktion enthält.
  - Zur grafischen Darstellung derartiger Flächen verwendet EXCEL die Eigenschaft, dass sich berechnete Flächenpunkte durch Geradenstücke verbinden lassen, d.h. für hinreichend viele Flächenpunkte wird eine ausreichende Näherung für die Fläche der Funktion $f(x,y)$ geliefert.
  - EXCEL kann Flächen über einem Rechteckbereich der xy-Ebene grafisch darstellen, wofür folgende konkrete Schritte erforderlich sind:

    I. Man trägt gleichabständige x- und y-Werte des Rechteckbereichs senkrecht bzw. waagerecht unter Verwendung des Ausfüllkästchen in die Tabelle ein (analog wie bei Funktionen einer Variablen), wie im Beisp.7.7 illustriert ist.

    II. Danach werden für x- und y-Bereich die Namen x bzw. y definiert, indem man nach Markierung des entsprechenden Bereichs x bzw. y als Namen in das Dialogfeld **Namen definieren** einträgt, das nach Anwendung der Menüfolge

    Einfügen ⇒ Namen ⇒ Definieren

    erscheint.

    III. Anschließend wird eine *Matrix* für die Funktionswerte erzeugt:

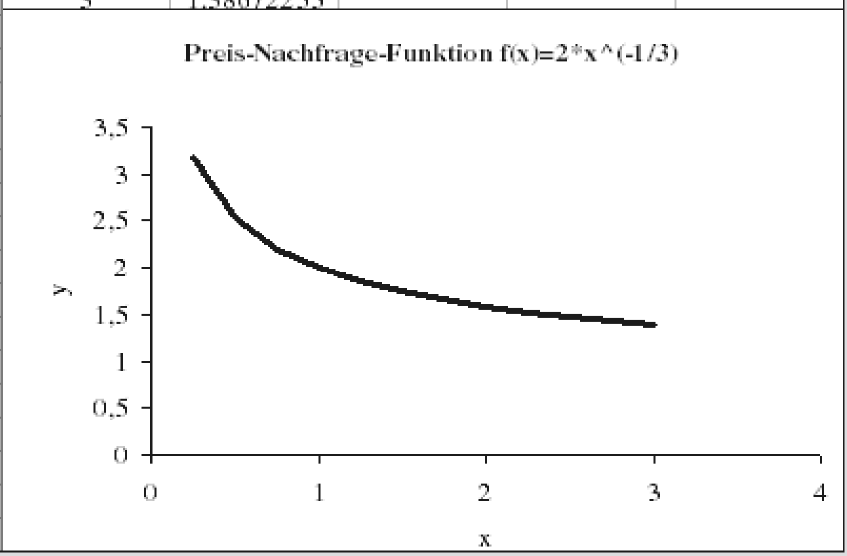
    * Die einzelnen Elemente dieser Matrix werden von den Funktionswerten der zu zeichnenden Funktion $f(x,y)$ in den vorgegebenen x- und y-Werten gebildet.
    * Dies wird erreicht, indem man in die erste freie Zelle dieser Matrix den zu zeichnenden Funktionsausdruck $f(x,y)$ als Formel einträgt und diesen durch Ziehen des Ausfüllkästchens des Zellzeigers auf die gesamte erste Spalte und dann auf alle weiteren Spalten überträgt, so dass für alle vorgegebenen x- und y-Werte die zugehörigen Funktionswerte berechnet werden.

    IV. Abschließend löst man nach Markierung der erzeugten Matrix einen *Durchlauf* des *Diagramm-Assistenten* aus, wie im Abschn.7.4.1 und Beisp.7.4 beschrieben ist. Dabei ist im *Schritt 1* der Diagrammtyp *Oberfläche* zu wählen.
  - Falls man eine grafisch darzustellende Funktion $f(x,y)$ nicht als analytischen Ausdruck (Formel) sondern in Form von Punkten vorliegen hat, ist bereits die erforderliche Matrix gegeben und Schritt IV kann unmittelbar ausgeführt werden.

- Danach markiert man die so erzeugten x-Werte und definiert hierfür den Namen x.
- Anschließend trägt man in Zelle Z1S2 den Funktionsausdruck als Formel
  =2∗x^(−1/3)
  ein und zieht am Ausfüllkästchen nach unten bis zur Zelle Z12S2, so dass man die zu den eingetragenen x-Werten gehörenden Funktionswerte erhält.
- Abschließend liefert ein Durchlauf des Diagramm-Assistenten für den Diagrammtyp *Punkt (XY)* und Diagrammuntertyp *Punkte mit Linien ohne Datenpunkte* (siehe Abschn. 7.4.1, 7.4.2 und Beisp.7.4) die abgebildete Funktionskurve, die im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen ist:

Z1S2 fx =2*x^(-1/3)

	1	2	3	4	5
1	0,25	3,1748021			
2	0,5	2,5198421			
3	0,75	2,20128483			
4	1	2			
5	1,25	1,85663553			
6	1,5	1,74716093			
7	1,75	1,65965307			
8	2	1,58740105			
9	2,25	1,52628566			
10	2,5	1,4736126			
11	2,75	1,42753171			
12	3	1,38672255			



Beispiele

Bemerkung

Es wird nochmals darauf hingewiesen, dass Grafiken mathematischer Funktion von EXCEL analog wie von Computeralgebra- und Grafikprogrammsystemen gezeichnet werden, indem eingegebene bzw. berechnete Kurven- oder Flächenpunkte durch Geradenstükke verbunden werden.
Deshalb wird die von EXCEL zu zeichnende Kurve bzw. Fläche genauer, wenn hinreichend viele Punkte zur Verfügung stehen bzw. erzeugt werden.
♦

Beispiel 7.7:
Stellen wir die spezielle *Cobb-Douglas-Funktion*

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{2}{3}}$$

über dem Quadrat [0,2]×[0,2] der xy-Ebene unter Anwendung des Diagramm-Assistenten von EXCEL grafisch dar, indem wir folgende Schritte durchführen:

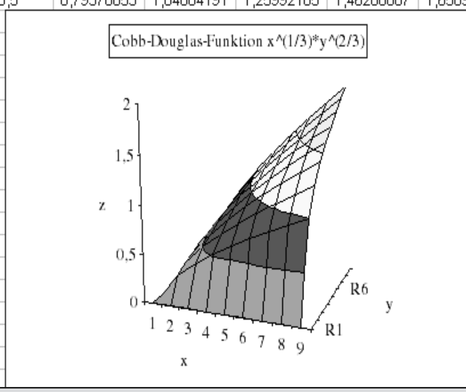
- Die Spalte mit den x-Werten (Z2S1**:**Z10S1) bzw. Zeile mit den y-Werten (Z1S2**:**Z1S10) wird analog wie im Beisp.7.6 erzeugt und für sie wird der Name x bzw. y definiert. Wir wählen für x und y als konkrete Schrittweite 0,25.
- Anschließend trägt man in die Zelle Z2S2 den Funktionsausdruck als Formel

  =x^(1/3)*y^(2/3)

  ein und zieht am Ausfüllkästchen nach unten und dann nach rechts bis zur Zelle Z10S10, so dass man die zu den eingetragenen x- und y-Werten gehörenden Funktionswerte erhält.
- Abschließend liefert ein Durchlauf des Diagramm-Assistenten für den Diagrammtyp *Oberfläche* (siehe Abschn.7.4 und Beisp.7.4) und Diagrammuntertyp *3D-Oberfläche* die Fläche, die im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen ist:

Z2S2 =x^(1/3)*y^(2/3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,25	0	0,25	0,39685026	0,52002096	0,62996052	0,73100443	0,82548181	0,91482643	1
4	0,5	0	0,31498026	0,5	0,65518535	0,79370053	0,92100787	1,04004191	1,15260907	1,25992105
5	0,75	0	0,36056239	0,57235712	0,75	0,9085603	1,05429083	1,19055079	1,31940802	1,44224957
6	1	0	0,39685026	0,62996052	0,82548181	1	1,16039721	1,3103707	1,45219643	1,58740105
7	1,25	0	0,42749399	0,6786044	0,88922333	1,07721735	1,25	1,41155404	1,56433119	1,70997595
8	1,5	0	0,45428015	0,72112479	0,94494079	1,14471424	1,32832321	1,5	1,66234994	1,81712059
9	1,75	0	0,4782328	0,75914724	0,9947643	1,20507113	1,39836118	1,5790899	1,75	1,91293118
10	2	0	0,5	0,79370053	1,04004191	1,25992105	1,46200887	1,65096362	1,82965286	2



8 Differentialrechnung

8.1 Einführung

Differentialrechnung bildet neben Integralrechnung eine der Grundsäulen der Mathematik und damit auch der Wirtschaftsmathematik.
In diesem Kapitel geben wir eine Einführung, um anfallende Aufgaben lösen zu können:

- Die Basis der Differentialrechnung bildet die Berechnung von Ableitungen (Differentialquotienten), die im Abschn.8.2 behandelt wird.
- Ein erster Einblick in die Vielzahl von Anwendungen der Differentialrechnung in Modellen der Wirtschaft wird im Abschn.8.3 und in den Beisp.8.1, 8.7-8.12 gegeben.
- Zur Lösung von Aufgaben der Differentialrechnung stehen bis auf die Anwendung des SOLVERS bei Extremwertaufgaben keine EXCEL-Funktionen zur Verfügung. Man kann aber VBA-Programme erstellen, wie im Abschn.8.4 diskutiert wird.

Bemerkung

Ableitungen (Differentialquotienten) bilden ein Maß für die momentane Änderungsrate einer Funktion, da sie als Grenzwert von Differenzenquotienten definiert sind, wie in einem ersten Beisp.8.1 zu sehen ist:

- Damit lassen sich mit Differentialrechnung lokale Eigenschaften von Funktionen untersuchen, da auf Differentialquotienten in einem Punkt nur Funktionswerte in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes einen Einfluss haben.
- Die in der Differentialrechnung untersuchten momentanen Änderungen sind nicht nur in Technik- und Natur- sondern auch in den Wirtschaftswissenschaften von zentralem Interesse, da sie u.a. bei Kosten, Preisen und Gewinnen benötigt werden, wie in den Beisp.8.1, 8.7-8.12 zu sehen ist.

♦

8.2 Ableitungen

8.2.1 Grundlagen

Es gibt zwei *anschauliche Zugänge*, die zur Berechnung von Ableitungen für Funktionen und damit zur *Differentialrechnung* führen:

- Konstruktion der *Tangente* an die durch eine Funktion $f(x)$ gegebene Kurve, wobei ihr Anstieg zu berechnen ist. Dies ist ein geometrischer Zugang.
- Bestimmung der Momentangeschwindigkeit einer durch eine Funktion $f(t)$ der Zeit t gegebenen Bewegung. Dies ist ein physikalischer Zugang.
- Beide Zugänge benötigen (erste) Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \qquad (\textit{Differenzenquotient})$$

die für

Beispiel 8.1:
Betrachten wir eine Kostenfunktion K(x), die Kosten K in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x darstellt (siehe Beisp.7.1). Wenn sich eine gegebene Produktionsmenge x um Δx verändert, so ist man neben

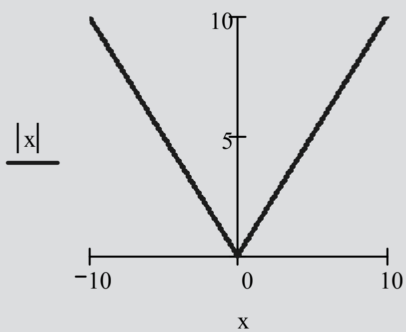
- *absoluter Kostenänderung* $\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$
- *relativer Kostenänderung*
  $$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x+\Delta x)-K(x)}{\Delta x} \qquad \text{(Differenzenquotient)}$$

an der momentanen Kostenänderung interessiert:

- Die *momentane relative Kostenänderung* erhält man für kleine Änderungen Δx, d.h. für $\Delta x \to 0$.
- Dies führt zur Berechnung des *Differentialquotienten* (der *Ableitung*) der Funktion K(x) als Grenzwert des Differenzenquotienten, d.h.
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{K(x+\Delta x)-K(x)}{\Delta x} = K'(x) \qquad \text{(Differentialquotient)}$$

Beispiel 8.2:
Es lassen sich einfache Beispiele stetiger Funktionen angeben, die nicht in jedem Punkt eine Ableitung besitzen:

- Die stetige Funktion $f(x) = |x|$
  ist im Nullpunkt (x = 0) nicht differenzierbar, wie man leicht aus der folgenden grafischen Darstellung ablesen kann, da in x=0 eine ″Spitze″ vorliegt, so dass keine eindeutige Tangente an die Kurve konstruierbar ist:



- Analytisch folgt die Nichtexistenz der Ableitung dieser Funktion in x=0 aus der Tatsache, dass der Grenzwert des Differenzenquotienten im Nullpunkt nicht existiert. Diese Überprüfung überlassen wir dem Leser.

Beispiel 8.3:
Für die Anwendung der im Abschn.8.2.2 vorgestellten Ableitungsregeln/Differentiationsregeln benötigt man *Ableitungen* bekannter *elementarer mathematischer Funktionen:*

  - Tangentenkonstruktionen den Anstieg der Sekante zwischen zwei Kurvenpunkten $f(x+\Delta x)$ und $f(x)$ darstellen.
  - Bestimmung von Momentangeschwindigkeiten die mittlere Geschwindigkeit in der Zeitspanne Δt darstellen.

- Da momentane Änderungen (Steigung der Tangente bzw. Momentangeschwindigkeit) gesucht sind, ist der *Grenzwert*

  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} \qquad (\textit{Differentialquotient})$$

  des Differenzenquotienten zu berechnen, der als Differentialquotient bezeichnet wird. Hierfür lässt sich folgende Definition geben.

Definition 8.1:

Falls der *Grenzwert* des Differenzenquotienten existiert, heißt er *Differentialquotient* oder (erste) *Ableitung* (Ableitung erster Ordnung) der Funktion $f(x)$ bzw. $f(t)$ und wird mit

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{df}{dt} = f'(t) = \dot{f}(t)$$

bezeichnet:

- Durch erneute Anwendung der Definition auf die erste Ableitung $f'(x)$, d.h. durch Ableitung der ersten Ableitung, erhält man die zweite Ableitung oder Ableitung zweiter Ordnung

  $$\frac{df'}{dx} = f''(x) = f^{(2)}(x)$$

- Die Fortsetzung dieser Vorgehensweise liefert allgemein die n-te Ableitung oder *Ableitung n-ter Ordnung* (Differentialquotient n-ter Ordnung), die man für höhere Ableitungen nicht mehr durch Striche sondern in folgender Form schreibt:

  $$\frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

  ♦

Bemerkung

Es ist zu beachten, dass nicht alle mathematische Funktionen eine Ableitung besitzen, d.h. differenzierbar sein müssen. Es gibt bereits einfache stetige Funktionen, die nicht überall differenzierbar sind (siehe Beisp.8.2).

♦

8.2.2 Ableitungsregeln/Differentiationsregeln

Ableitungsregeln/Differentiationsregeln spielen eine fundamentale Rolle in der Differentialrechnung:

- Die Definition der Ableitung ist nicht geeignet, um hiermit gegebene Funktionen zu differenzieren:

- Diese lassen sich mit der im Abschn.8.2.1 gegebenen Def.8.1 herleiten.
- In folgender Tabelle stellen wir diese Ableitungen zusammen (n - ganze Zahl):

Funktion	**erste Ableitung**	**Funktion**	**erste Ableitung**
C (Konstante)	0	x^{α} (α - reell)	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\cos x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi)$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq k\pi + \pi/2)$
$\operatorname{arc} \cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\operatorname{arc} \sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\lvert x\rvert < 1)$
$\operatorname{arc} \cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc} \tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$ $(x \neq 0)$
$\operatorname{ar} \sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{ar} \cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x > 1)$
$\operatorname{ar} \tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\operatorname{ar} \coth x$	$-\frac{1}{x^2-1}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

Beispiel 8.4:

Geben wir einige Illustrationen zur Anwendung der im Abschn.8.2.2 behandelten Differentiationsregeln, wobei Ableitungen elementarer mathematischer Funktionen aus der Tabelle von Beisp.8.3 zu entnehmen sind:

- Die Anwendung von Summen-, Produkt- und Quotientenregel ist meistens problemlos zu erkennen, wenn zu differenzierende Funktionen in Summen-, Produkt- bzw. Quotientenform vorliegen.
- Dagegen erfordert die Anwendung der logarithmischen Ableitung und Kettenregel größere Aufmerksamkeit, da zusammengesetzte Funktionen nicht immer als solche erkannt werden.

- Sie findet nur Anwendung bei der Berechnung von Ableitungen elementarer mathematischer Funktionen, die wir im Beisp.8.3 vorstellen.
- Mit Ableitungen elementarer mathematischer Funktionen und gegebenen *Ableitungsregeln* (*Differentiationsregeln*) lassen sich Ableitungen aller aus elementaren mathematischen Funktionen zusammengesetzten differenzierbaren Funktionen berechnen (siehe Beisp.8.4).

- Im Folgenden stellen wir wichtige *Ableitungsregeln/Differentiationsregeln* vor, für die $f(x)$ und $g(x)$ beliebige differenzierbare Funktionen sind:
  - *Summenregel*
    Die (erste) Ableitung einer Linearkombination zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berechnet sich als Linearkombination der ersten Ableitungen beider Funktionen, d.h.
    $(c_1 \cdot f(x)+c_2 \cdot g(x))' = c_1 \cdot f'(x)+ c_2 \cdot g'(x)$ $\qquad$ (c_1, c_2-Konstanten)
    In dieser allgemeinen Regel ist offensichtlich als Sonderfall die Ableitung einer Summe oder Differenz zweier Funktionen und die Ableitung einer mit einer Konstanten multiplizierten Funktion enthalten.
  - *Produktregel*
    Die (erste) Ableitung eines Produkts zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berechnet sich folgendermaßen:
    $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
    Die Produktregel ist auf Produkte von mehr als zwei Funktionen erweiterbar, wie im Beisp.8.4c illustriert ist.
  - *Quotientenregel*
    Die (erste) Ableitung eines Quotienten zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berechnet sich folgendermaßen ($g(x) \neq 0$):
    $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
  - *Kettenregel*
    Die (erste) Ableitung einer aus zwei Funktionen $f(u)$ und $u=g(x)$ *zusammengesetzten Funktion* $f(g(x))$ berechnet sich folgendermaßen:
    $(f(g(x)))' = f'(u) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
  - *Logarithmische Ableitung*
    Diese Differentiationsregel ist keine eigenständige Regel, sondern lässt sich unter Anwendung der Kettenregel erhalten. Da man sie jedoch häufig benötigt, werden wir sie im Folgenden vorstellen:
    * Unter *logarithmischer Ableitung* versteht man die Ableitung des Logarithmus einer beliebigen Funktion $f(x)$ mit $f(x)>0$, d.h.
      $$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

- Viele zu differenzierende Funktionen verlangen die Anwendung mehrerer Differentiationsregeln.

a) $(3 \cdot x^3 + \sin x + \ln x)' = 9 \cdot x^2 + \cos x + \frac{1}{x}$

Diese Ableitung wird durch Anwendung der *Summenregel* erhalten, da der zu differenzierende Ausdruck die Summe dreier Funktionen ist.

b) $((x^3 + x) \cdot \ln x)' = (3 \cdot x^2 + 1) \cdot \ln x + (x^3 + x) \cdot \frac{1}{x} = (3 \cdot x^2 + 1) \cdot \ln x + (x^2 + 1)$

Diese Ableitung wird durch Anwendung der *Produktregel* erhalten, da der zu differenzierende Ausdruck das Produkt zweier Funktionen ist. Zusätzlich benötigt man zur Ableitung des ersten Faktors die *Summenregel*.

c) $(\sin x \cdot e^x \cdot x)' = \cos x \cdot e^x \cdot x + \sin x \cdot e^x \cdot x + \sin x \cdot e^x$

Da der zu differenzierende Ausdruck das Produkt von drei Funktionen ist, wird das Ergebnis durch folgende Erweiterung der *Produktregel* erhalten:

$$(f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$$

d) $\left(\frac{\sin x}{e^x + \ln x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (e^x + \ln x) - \sin x \cdot (e^x + \frac{1}{x})}{(e^x + \ln x)^2}$

Diese Ableitung wird durch Anwendung der *Quotientenregel* erhalten, da der zu differenzierende Ausdruck der Quotient zweier Funktionen ist. Zusätzlich benötigt man zur Ableitung der Nennerfunktion die *Summenregel*.

e) $(\sqrt{x^2 + x + 1})' = \frac{2 \cdot x + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}}$

Diese Ableitung wird durch Anwendung der *Kettenregel* erhalten, da sich der zu differenzierende Ausdruck aus den beiden Funktionen

$f(u) = \sqrt{u}$ und $u = g(x) = x^2 + x + 1$

zusammensetzt. Zusätzlich ist zur Ableitung der Funktion $g(x)$ die Summenregel anzuwenden.

f) $$\left(\frac{e^x + 2}{x^2 + 1} \cdot \sqrt{\sin x + x}\right)' = \frac{e^x \cdot (x^2 + 1) - (e^x + 2) \cdot 2 \cdot x}{(x^2 + 1)^2} \cdot \sqrt{\sin x + x}$$
$$+ \frac{e^x + 2}{x^2 + 1} \cdot \frac{\cos x + 1}{2 \cdot \sqrt{\sin x + x}}$$

Diese Ableitung wird durch Anwendung der vier gegebenen Differentiationsregeln erhalten, da der zu differenzierende Ausdruck sowohl Summe, Produkt, Quotient von Funktionen und die *zusammengesetzte Funktion*

$\sqrt{\sin x + x}$ enthält.

* Eine wichtige Anwendung findet die logarithmische Ableitung bei der Differentiation von Funktionen der Form

  $f(x) = u(x)^{v(x)}$

  die nicht unmittelbar mit den bisher gegebenen Regeln differenzierbar sind:

  – Unter der Voraussetzung $u(x) > 0$ kann man derartige Funktionen logarithmieren, d.h. $\ln f(x) = v(x) \cdot \ln u(x)$ und danach die Differentiation durchführen, wie im Folgenden zu sehen ist.
  – Die Berechnung dieser Ableitung geschieht unter Verwendung der logarithmischen Ableitung folgendermaßen

    $$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = (v(x) \cdot \ln u(x))' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

    und liefert durch Auflösung nach $f'(x)$ die gewünschte Ableitung:

    $$f'(x) = u(x)^{v(x)} \cdot \left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

- Bei Anwendung von *Differentiationsregeln* ist Folgendes zu beachten:
  - Es kommt öfters vor, dass für eine zu differenzierende Funktion gleichzeitig mehrere Differentiationsregeln anzuwenden sind, wie im Beisp.8.4 illustriert ist.
  - Es sind einige Erfahrungen erforderlich, um die passende Differentiationsregel auszuwählen. Während die Anwendung von Summen-, Produkt- und Quotientenregel oft richtig erkannt wird, führt die Anwendung von Kettenregel und logarithmischer Ableitung häufig zu Problemen.

Bemerkung

Unter Verwendung der gegebenen Differentiationsregeln und bekannter Ableitungen lassen sich alle aus elementaren mathematischen Funktionen zusammengesetzten differenzierbaren Funktionen in endlich vielen Schritten differenzieren:

- Man erhält als Ergebnisse wieder aus elementaren mathematischen Funktionen zusammengesetzte Funktionen (siehe auch Beisp.8.4):
- Damit liefert die Theorie einen endlichen Algorithmus zur Berechnung von Ableitungen, der bei komplizierten Funktionen allerdings sehr aufwendig sein kann.

  ♦

8.2.3 Kurvendiskussion

Ein Anwendungsgebiet für Ableitungen ist bei Kurvendiskussionen gegeben. Dabei versteht man unter *Kurvendiskussion* die Aufgabe, für die durch eine Funktion $f(x)$ in der Ebene gegebene Kurve (Funktionskurve):

I. Aussagen über ihren Verlauf zu erhalten. Hierzu gehören Aussagen über
   - Nullstellen (siehe Abschn.6.1.1)
   - Monotonie (siehe Abschn.8.3.6)
   - Extremwerte (siehe Abschn.8.3.3 und 12.4)

Die praktische Durchführung der Differentiation beginnt mit der Anwendung der Produktregel, wobei zur Differentiation des

- ersten Faktors Quotientenregel und Summenregel
- zweiten Faktors Kettenregel und Summenregel
  mit $f(u) = \sqrt{u}$ und $u = g(x) = \sin x + x$

anzuwenden sind.

g) Zur Illustration logarithmischer Ableitungen berechnen wir die erste Ableitung der Funktion

$f(x) = x^x$

Diese Funktion ist nicht unmittelbar mit den gegebenen Regeln differenzierbar, sondern nur unter Anwendung der *logarithmischen Ableitung:*

$(\ln f(x))' = (\ln x^x)' = (x \cdot \ln x)'$ ergibt $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}$

d.h. man erhält nach Umformung das Ergebnis $f'(x) = x^x \cdot (\ln x + 1)$

Beispiel 8.5:

Betrachten wir einige Beispiele zur Berechnung *partieller Ableitungen*, wobei wir uns auf Funktionen zweier Variablen beschränken:

a) Berechnen wir alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 für die Funktion zweier Variablen $f(x, y) = e^x \cdot \sin y$:

$f_x(x, y) = e^x \cdot \sin y$, $f_y(x, y) = e^x \cdot \cos y$, $f_{xx}(x, y) = e^x \cdot \sin y$

$f_{yy}(x, y) = -e^x \cdot \sin y$, $f_{xy}(x, y) = e^x \cdot \cos y$, $f_{yx}(x, y) = e^x \cdot \cos y$

Man sieht, dass

- sich partielle Ableitungen durch Anwendung der Differentiationsregeln für Funktionen einer Variablen berechnen, indem die jeweils nicht betroffenen Variablen als konstant angesehen werden.
- beide gemischte Ableitungen zweiter Ordnung
  $f_{xy}(x, y)$ und $f_{yx}(x, y)$
  übereinstimmen. Dies ist kein Zufall, sondern gilt auf Grund des Satzes von Schwarz, der unter schwacher Voraussetzung die Gleichheit beweist.

b) Berechnen wir erste partielle Ableitungen der Funktion $f(x, y) = y^x$:

- Bei der Ableitung bzgl. x
  wird die Variable y als konstant angesehen, so dass nach der Regel für Exponentialfunktionen zu differenzieren ist, d.h.
  $f_x(x, y) = y^x \cdot \ln y$
- Bei der Ableitung bzgl. y

- Wendepunkte (siehe Abschn.8.3.6 und 12.4)
- Krümmung (Konvexität und Konkavität - siehe Abschn.8.3.6)

II. Eine grafische Darstellung zu erhalten:

- Wenn man die in I angegebenen Aussagen für eine Funktion ermittelt hat, ist es i.Allg. nicht mehr schwierig, die Kurve grafisch darzustellen.
- Dies wird man jedoch im heutigen Computerzeitalter nicht mehr per Hand sondern mittels Computer durchführen.
- Wie dies unter Verwendung von EXCEL möglich ist, lernen wir im Abschn.7.4 kennen. Die Aussagen aus I benötigt EXCEL für die grafische Darstellung nicht.
- Da EXCEL eine Kurve zeichnet, indem es gegebene (berechnete) Kurvenpunkte durch Geradenstücke verbindet (siehe Abschn.7.4), können natürlich Ungenauigkeiten im Kurvenverlauf auftreten. Deshalb sind Aussagen aus I wesentlich, um von EXCEL gelieferte grafische Darstellungen überprüfen zu können.

8.2.4 Partielle Ableitungen

Da in mathematischen Modellen der Wirtschaft ökonomische Funktionen mehrerer Variablen vorkommen (siehe Beisp.7.1), benötigt man in der Wirtschaftsmathematik auch Ableitungen dieser Funktionen, die als *partielle Ableitungen* bezeichnet werden:

- Sie werden nur bzgl. einer Variablen gebildet, während die anderen Variablen als konstant anzusehen sind.
- Sie sind bzgl. einzelner Variablen wie Ableitungen von Funktionen einer Variablen definiert, wobei die hierfür gegebenen Differentiationsregeln analog anzuwenden sind (siehe Beisp.8.5):
  - So sind die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y)$ bzgl. der Variablen x bzw. y folgendermaßen definiert:

    $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \quad \text{bzw.} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

  - Für Funktionen $f(x,y)$ zweier Variablen können partielle Ableitungen in folgenden Formen geschrieben werden:

    $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\ ,\ f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\ ,\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\ ,...$$

  - Für Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Variablen können partielle Ableitungen in folgenden Formen geschrieben werden:

    $$f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\ ,\ f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}\ ,...,\ f_{x_1 x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}\ ,\ f_{x_1 x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\ ,\ \ldots$$

8.2.5 Numerische Berechnung von Ableitungen

Die numerische (näherungsweise) Berechnung von Ableitungen (*näherungsweise Differentiation*) ist eine schwierige Problematik, so dass wir im Buch nur einen ersten Einblick geben können:

wird die Variable x als konstant angesehen, so dass nach der Regel für Potenzfunktionen zu differenzieren ist, d.h.

$$f_y(x,y) = x \cdot y^{x-1}$$

Beispiel 8.6:

Betrachten wir eine einfache Vorgehensweise zur numerischen Berechnung erster Ableitungen (siehe Abschn.8.2.5):

- Naheliegend bietet sich der erste Differenzenquotient an, da sich hieraus die erste Ableitung als Grenzwert ergibt.
- Somit erhält man folgende Näherungsformel in Form des *ersten Differenzenquotienten* zur Berechnung der Ableitungen an der Stelle x_0 :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (\Delta x \text{ - hinreichend klein})$$

- Die Anwendung des ersten Differenzenquotienten ist jedoch nicht zu empfehlen, da er schlechtere Eigenschaften als der *zentrale Differenzenquotient*

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \qquad (\Delta x \text{ - hinreichend klein})$$

besitzt, der Funktionswerte auf beiden Seiten von x_0 verwendet.

- Wenden wir beide Differenzenquotienten auf die Polynomfunktion

$f(x) = x^2+x+1$ mit erster Ableitung $f'(x) = 2 \cdot x+1$ an:

  - erster Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 + x_0 + \Delta x + 1 - x_0^2 - x_0 - 1}{\Delta x} = 2 \cdot x_0 + 1 + \Delta x$$

  - zentraler Differenzenquotient

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0-\Delta x)}{2 \cdot \Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 + x_0 + \Delta x + 1 - (x_0-\Delta x)^2 - (x_0-\Delta x) - 1}{2 \cdot \Delta x} = 2 \cdot x_0 + 1$$

  - Man sieht, dass für diese Polynomfunktion zweiten Grades der zentrale Differenzenquotient die erste Ableitung exakt beschreibt, während der erste Differenzenquotient den Fehler Δx begeht.

- Die numerische Berechnung von Ableitungen lässt sich durch genauere Formeln verbessern, wodurch sich jedoch die Instabilität für kleiner werdende *Schrittweiten* h nicht ausschließen lässt.

Beispiel 8.7:

Illustrieren wir die Anwendung des *Gradienten* (siehe Abschn.8.3.2):

- Als Funktion verwenden wir eine *Nutzenfunktion* für zwei Waren x und y in Form folgender Cobb–Douglas–Funktion (siehe Beisp.7.1i)

$$f(x,y) = x^2 \cdot y$$

- Der *Gradient* von $f(x,y)$ berechnet sich folgendermaßen:

- In der Numerischen Mathematik werden Funktionen z.B. durch Interpolationspolynome (Splines) angenähert und hieraus Näherungsformeln zur näherungsweisen Differentiation hergeleitet.
- Eine erste (aber ungenaue) Methode besteht darin, anstatt des Differentialquotienten den Differenzenquotienten zu verwenden. Wir illustrieren dies im Beisp.8.6 und erstellen im Beisp.8.13 hierfür ein VBA-Programm.
- Da numerische Methoden zur Differentiation instabil sein können, ist ihre Anwendung nur auf Funktionen zu empfehlen, die nicht in analytischer Form sondern in Form einer Wertetabelle vorliegen (siehe Abschn.7.2).

8.3 Anwendung in der Wirtschaft – Marginalanalyse

8.3.1 Einführung

Ebenso wie in Technik- und Naturwissenschaften spielen in mathematischen Modellen der Wirtschaft nicht nur funktionale Zusammenhänge zwischen betrachteten Größen eine Rolle, sondern man ist am Einfluss ihrer *Änderungen* interessiert, wie z.B. an *Preisänderungen*, *Lohnänderungen*, *Kostenänderungen.*
Des Weiteren spielen in der Wirtschaft minimale bzw. maximale (d.h. optimale) Ergebnisse eine dominierende Rolle, so z.B. bei Kosten bzw. Gewinnen.

Bemerkung

Mathematisch lassen sich Änderungen und optimale Werte (Extremwerte) von Funktionen mittels Differentialrechnung charakterisieren, so dass diese eine grundlegende Basis der Wirtschaftsmathematik bildet:

- Eine Reihe von Anwendungen der Differentialrechnung in Modellen der Wirtschaft wird als Marginalanalyse bezeichnet. Der Begriff *Marginalanalyse* wird jedoch nicht einheitlich gehandhabt, so versteht man hierunter u.a.
  - Behandlung ökonomischer Problemstellungen unter Verwendung von Grenzfunktionen.
  - Kurvendiskussion für ökonomische Funktionen einschließlich der ökonomischen Interpretation des Kurvenverlaufs.
  - allgemein die Anwendung der Differentialrechnung zur Untersuchung ökonomischer Funktionen.
- Im Weiteren stellen wir folgende Anwendungen der Differentialrechnung kurz vor:
  - *Gradient* (Abschn.8.3.2)
    Er besitzt auch in der Wirtschaftsmathematik eine gewisse Bedeutung.
  - *Extremwerte* (Abschn.8.3.3)
    Sie spielen in mathematischen Modellen der Wirtschaft eine große Rolle, so dass sie im Rahmen von Optimierungsaufgaben im Abschn.12.4 ausführlicher behandelt werden.
  - Die unter dem Sammelbegriff *Marginalanalyse* geführten Problemstellungen:
    * *Grenzfunktionen/Marginalfunktionen* (Abschn.8.3.4)

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot x\cdot y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

- Möchte man wissen, wie bei einer Produktion von zwei Waren x und y diese zu verändern sind, um *maximalen Zuwachs* des *Nutzens* zu erreichen, so muss man in Richtung des Gradienten $\mathbf{grad}\, f(x,y)$ der Nutzenfunktion verändern, da dieser in Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion zeigt, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda\cdot\mathbf{grad}\,(x^2\cdot y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot x\cdot y \\ x^2 \end{pmatrix} \qquad (\lambda > 0)$$

- So ergibt sich bei einer Produktion von $x = 30$, $y = 50$ die *Produktionsänderung*

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot 30\cdot 50 \\ 30^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+\lambda\cdot 3000 \\ 50+\lambda\cdot 900 \end{pmatrix}$$

d.h. x und y sind in der Form $x = 30 + \lambda \cdot 3000$, $y = 50 + \lambda \cdot 900$ zu verändern, wobei der Parameter $\lambda > 0$ passend zu wählen ist.

Beispiel 8.8:

Geben wir eine erste Illustration für Extremwertaufgaben, indem wir *Gewinnfunktionen* G(x) für die Produktion x einer Ware betrachten, die sich als Differenz aus Verkaufserlös $E(x) = p\cdot x$ (p - Preis) und Produktionskosten K(x) ergeben (siehe Beisp.7.1f):

- Da jeder Betrieb den Gewinn maximieren möchte, erhält man folgende *Extremwertaufgabe* für Gewinnfunktionen:

$$G(x) = E(x) - K(x) = p\cdot x - K(x) \;\rightarrow\; \underset{x}{\text{Maximum}}$$

- Die notwendige Optimalitätsbedingung aus Abschn.12.4.2 liefert für diese Aufgabe durch Nullsetzen der ersten Ableitung die Gleichung

$$p - K'(x) = 0$$

aus der x-Werte für ein Maximum berechnet werden können.

Beispiel 8.9:

Erklären wir ökonomische Interpretationen von *Grenzfunktionen* (siehe Abschn.8.3.4):

- Wenn sich die in Mengeneinheiten ME gemessene *Produktionsmenge* x um Δx ändert, so ändern sich die *Kosten* K(x) (in Geldeinheiten GE) absolut um

$$\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x)$$

- Aus der *relativen Kostenänderung*(siehe Beisp.8.1)

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x+\Delta x) - K(x)}{\Delta x}$$

folgt durch Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ die *Grenzkostenfunktion* $K'(x)$:

  - Die Grenzkostenfunktion $K'(x)$ gibt näherungsweise an, um wieviel sich die Kosten ändern, wenn sich die Produktionsmenge für ein festes x um eine ME ändert:

* *Durchschnittsfunktion* (Abschn.8.3.5)
* *Wachstum* (8.3.6)
* *Elastizität* (8.3.7)

♦

8.3.2 Gradient

Für Funktionen f(**x**) ab zwei Variablen ist ihr *Gradient* **grad** f (**x**) ein Vektor, der als Komponenten die ersten partiellen Ableitungen der Funktion f(**x**) enthält, d.h. er hat folgende Gestalt:

- $\mathbf{grad}\ f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$ für Funktionen $f(x,y)$ von zwei Variablen

- $\mathbf{grad}\ f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ für Funktionen $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Variablen

Bemerkung

Für Aufgaben der Wirtschaftsmathematik ist die Eigenschaft des *Gradienten* einer Funktion f(**x**) von Bedeutung, dass er in *Richtung* des *stärksten Anstiegs* (Wachstums) der Funktion zeigt (siehe Beisp.8.7).

♦

8.3.3 Extremwertaufgaben

Extremwertaufgaben gehören zur großen Klasse von *Optimierungsaufgaben,* die in mathematischen Modellen der Wirtschaft häufig auftreten:

- Die große Bedeutung von Optimierungsaufgaben liegt darin, dass ein *Hauptziel* wirtschaftlicher Untersuchungen darin besteht, *optimal* (minimal oder maximal) zu arbeiten, d.h. nach einer *optimalen Strategie:*
  - Kosten und Aufwendungen sind zu minimieren.
  - Gewinne sind zu maximieren.
- *Extremwertaufgaben* sind klassische seit langem bekannte Optimierungsaufgaben:
  - Sie lassen sich bereits erfolgreich zur Bestimmung optimaler Strategien heranziehen, wie in einem ersten Beisp.8.8 illustriert ist.
  - Sie beschäftigen sich mit relativen (lokalen) Minima und Maxima von Funktionen f(**x**), die als *Extremwerte* bezeichnet werden.
  - Sie verwenden Ableitungen der betrachteten Funktionen, um vorhandene Extremwerte zu charakterisieren.
- Ausführlicher besprechen wir Vorgehensweisen zur Lösung von Extremwertaufgaben im Rahmen von Optimierungsaufgaben (siehe Abschn.12.4).

$K(x + \Delta x) - K(x) \approx K'(x) \cdot \Delta x = K'(x) \qquad (\text{für } \Delta x = 1)$

- Für das Zahlenbeispiel
  $K(x) = 5 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 50 \cdot x + 100$
  ergeben sich bei einer Produktion von 100 ME die *Grenzkosten* $K'(100) = 149\,450$ GE/ME, d.h. bei Erhöhung der Produktionsmenge auf 101 ME erhöhen sich die Kosten näherungsweise um 149 450 GE.
- Die Näherung $K'(x)$ für die Kostenänderung ist umso besser, je größer x im Vergleich zu einer ME ist.

- Analog zu Grenzkosten gibt
  - *Grenzerlös* näherungsweise die Änderung des *Erlöses* E(x) an, wenn sich der Preis x um eine GE ändert.
  - *Grenzproduktivität* näherungsweise die Änderung des Ertrags einer Produktion an, wenn sich die Einflussfaktoren/Produktionsfaktoren (z.B. Arbeitskräfte, Kapital) x dieser Produktion um eine Einheit ändern.
  - *Grenzgewinn* näherungsweise die Änderung des *Gewinns* G(x) für ein Produkt an, wenn sich der *Preis* x um eine GE ändert.
  - *marginale Konsumquote* näherungsweise die Änderung der *Gesamtausgaben* an, wenn sich das *Sozialprodukt* x um eine GE ändert.

Beispiel 8.10:
Zwischen ökonomischen Funktionen $f(x)$, ihren *Grenzfunktionen* $f'(x)$ und ihren *Durchschnittsfunktionen* $\bar{f}(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ bestehen folgende Eigenschaften:

- $f(1) = \bar{f}(1)$ d.h. für x = 1 stimmen Funktion und ihre Durchschnittsfunktion überein.
- Für Extremwertstellen der Durchschnittsfunktion $\bar{f}(x)$ folgt aus der notwendigen Optimalitätsbedingung (siehe Abschn.12.4.2)

  $$\bar{f}'(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot 1}{x^2} = 0 \qquad \text{die Beziehung}$$

  $$f'(x) = \frac{f(x)}{x} = \bar{f}(x)$$

  d.h. für ökonomische Funktionen $f(x)$ stimmen die Werte ihrer Grenzfunktionen $f'(x)$ und Durchschnittsfunktionen $\bar{f}(x)$ in den stationären Stellen (speziell den Extremwertstellen) der Durchschnittsfunktionen überein.

Beispiel 8.11:
Bei einer Reihe *ökonomischer Funktionen* wird aus ökonomischen Gesichtspunkten die *Monotonie* gefordert (siehe Beisp.7.1a und b). Für die in diesen Funktionen enthaltenen frei wählbaren Parameter ergeben sich daraus Bedingungen, die sich mittels erster Ableitung bestimmen lassen:

8.3.4 Grenzfunktionen

Die erste Ableitung $f'(x)$ einer ökonomischen Funktion $f(x)$ bezeichnet man als zugehörige *Grenzfunktion* oder *Marginalfunktion:*

- Man bezeichnet Grenzfunktionen bei
  - Kostenfunktionen als *Grenzkosten*
  - Erlösfunktionen als *Grenzerlöse*
  - Produktionsfunktionen als *Grenzproduktivitäten*
  - Gewinnfunktionen als *Grenzgewinne*
  - Konsumfunktionen als *marginale Konsumquoten.*
- Bei Funktionen mehrerer Variablen definiert man analog partielle Grenzfunktionen bzgl. einzelner Variablen.
- Wir illustrieren die Problematik im Beisp.8.9 und 8.10.

8.3.5 Durchschnittsfunktionen

Neben der Grenzfunktion $f'(x)$ einer ökonomischen Funktion $f(x)$ ist die zu $f(x)$ gehörige *Durchschnittsfunktion*

$$\overline{f}(x) = \frac{f(x)}{x}$$

wichtig (siehe Beisp.8.10). Diese Definition von Durchschnittsfunktionen ist anschaulich klar, wenn die unabhängige Variable x in Mengen- oder Geldeinheiten gemessen wird.

8.3.6 Wachstum

Das *Wachstumsverhalten* von Funktionen spielt in der Wirtschaftsmathematik eine große Rolle:

- Eine erste *Charakterisierung* des *Wachstums* ist mittels *Monotonie* möglich:
  - Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Intervall [a,b] *monoton*
    - *wachsend*, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$

      für beliebige $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 \leq x_2$
    - *fallend*, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$
  - Für differenzierbare Funktionen $f(x)$ lässt sich die *Monotonie* von Funktionen in einem Intervall [a,b] folgendermaßen mittels erster Ableitung $f'(x)$ feststellen:
    - $f(x)$ ist *monoton wachsend*, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$
    - $f(x)$ ist *monoton fallend*, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a,b]$
- Die einfache Klassifikation des Wachstums mittels Monotonie reicht für ökonomische Interpretationen nicht immer aus:
  - Man möchte zusätzlich wissen, ob das Wachstum einer Funktion $f(x)$ beschleunigt oder verlangsamt verläuft.

a) Für als *monoton fallend* vorausgesetzte *Nachfragefunktionen* $P_N(x)$ aus Beisp.7.1a ergeben sich folgende Bedingungen für die Parameter (für x>0):

a1) $P_N(x) = a - b \cdot x$: Wegen $P_N'(x) = -b < 0$ muss $b > 0$ gelten.

a2) $P_N(x) = c \cdot x^d$: Wegen $P_N'(x) = c \cdot d \cdot x^{d-1} < 0$ muss $c \cdot d < 0$ gelten.

a3) $P_N(x) = a \cdot b^x$: Wegen $P_N'(x) = a \cdot b^x \cdot \ln b < 0$ müssen $a \cdot \ln b < 0$ und $b>0$ gelten.

b) Für als *monoton wachsend* vorausgesetzte *Angebotsfunktionen* $P_A(x)$ aus Beisp.7.1b ergeben sich folgende Bedingungen für die Parameter (für x>0):

b1) $P_A(x) = a + b \cdot x$: Wegen $P_A'(x) = b > 0$ muss $b > 0$ gelten.

b2) $P_A(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$: Wegen $P_A'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b > 0$
müssen $a > 0$ und $b > 0$ gelten.

b3) $P_A(x) = a \cdot \sqrt{b \cdot x + c}$: Wegen $P_A'(x) = \dfrac{a \cdot b}{2 \cdot \sqrt{b \cdot x + c}} > 0$
müssen $a>0$, $b>0$ und $c>0$ gelten.

Beispiel 8.12:

Betrachten wir die *Elastizität* für die konkrete lineare *Nachfragefunktionen*

$P_N(x) = -0{,}2 \cdot x + 400$

wobei $P_N(x)$ die Nachfrage als Funktion des Preises x (in Geldeinheiten GE) bedeutet (siehe Beisp.7.1a):

- Für die gegebene Nachfragefunktion ergibt sich folgende *Elastizität*

$$e_N(x) = \frac{P_N'(x)}{P_N(x)} \cdot x = \frac{-0{,}2}{-0{,}2 \cdot x + 400} \cdot x$$

die als *Preiselastizität* der Nachfrage $P_N(x)$ bezeichnet wird.

- Die Preiselastizität ist in folgender Tabelle für einige x-Werte zu sehen:

x	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500
$e_N(x)$	-0.67	-0.82	-1	-1.22	-1.5	-1.86	-2.33	-3

- Die berechneten Werte zeigen, dass die betrachtete *Nachfragefunktion*
  - für Preise von 800 und 900 GE *unelastisch* ist, d.h. in diesem Bereich haben Preisänderungen einen geringen Einfluss auf die Nachfrage.
  - für den Preis von 1000 GE *proportional–elastisch* ist, d.h. eine Preissteigerung von a % hat einen Nachfragerückgang von a % zur Folge.
  - für die Preise von 1100 bis 1500 GE *elastisch* ist, d.h. kleine Preisänderungen haben größere Nachfrageänderungen zur Folge (z.B. bei Konsumgütern).

- Dies lässt sich durch das *Krümmungsverhalten* (Konvexität/Konkavität) feststellen, das man für differenzierbare Funktionen mittels der zweiten Ableitung $f''(x)$ bestimmen kann:
  * $f''(x) > 0$ für alle x im Intervall [a,b]: $f(x)$ ist *konvex*,
  * $f''(x) < 0$ für alle x im Intervall [a,b]: $f(x)$ ist *konkav*,
  * $f''(x) = 0$: $f(x)$ hat in x einen *Wendepunkt*, wenn $f'''(x) \neq 0$ gilt.

- Für das *Wachstumsverhalten* ökonomischer Funktionen lassen sich detailliertere Aussagen treffen.

  Unter Verwendung der Konvexität/Konkavität spricht man bei *monoton wachsenden Funktionen* von

  - *progressivem* (überproportionalem) *Wachstum*, wenn $f(x)$ wachsend und konvex ist,
  - *degressivem* (unterproportionalem) *Wachstum*, wenn $f(x)$ wachsend und konkav ist,
  - *linearem Wachstum*, wenn $f(x)$ wachsend und $f''(x) \equiv 0$ ist.

  Analog kann man die Abnahme bei *monoton fallenden Funktionen* mittels der Konvexität/Konkavität charakterisieren.

- Eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung des Wachstums einer Funktion $f(t)$ der Zeit t wird durch das *Wachstumstempo* $w(f,t)$ gegeben:

$$w(f,t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

8.3.7 Elastizität

Man verwendet in der Wirtschaftsmathematik die *Elastizität,* um die Anpassungsfähigkeit einer differenzierbaren ökonomischen Funktion $y = f(x)$ an veränderte Bedingungen zu charakterisieren:

- Sie ist als Verhältnis von relativer (prozentualer) Änderung der abhängigen Größe y zur relativen (prozentualen) Änderung der unabhängigen Größe (Einflussgröße) x definiert.
- Man bezeichnet

$$E_f(x) = \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{f(x)} \qquad (f(x) \neq 0)$$

  als *durchschnittliche* (mittlere) *Elastizität* von y im Intervall [x,x+Δx].

- Um Unabhängigkeit vom Zuwachs Δx zu erhalten, geht man durch Grenzwertberechnung Δx→0 bei durchschnittlicher Elastizität $E_f(x)$ vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten über und definiert den entstehenden Ausdruck als *Elastizität* (*Punktelastizität*) $e_f(x)$ der Funktion $f(x)$ bzgl. x:

$$e_f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} E_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = \frac{f'(x)}{\overline{f}(x)} \qquad (\overline{f}(x) \text{ - Durchschnittsfunktion})$$

Beispiel 8.13:

Schreiben wir ein VBA-Funktionsprogramm NUMDIFF zur numerischen Berechnung erster Ableitungen differenzierbarer Funktionen (siehe Abschn.8.2.5), das folgende einfache Näherungsformel (zentraler Differenzenquotient) verwendet (siehe Beisp.8.6):

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x}$$

- In folgender Programmvariante NUMDIFF ($\Delta x = h$)

  Function NUMDIFF(x0 **As Double**, h **As Double**) **As Double**
  NUMDIFF = (f(x0 + h) – f(x0 - h)) / (2 * h)
  End Function

  wird vorausgesetzt, dass die zu differenzierende Funktion in analytischer Form vorliegt, für die ein VBA-Funktionsprogramm f zu erstellen ist:

  Function f (x **As Double**) **As Double**
  ' In der folgenden Zuweisung ist rechts anstatt der Punkte der Ausdruck der zu
  ' differenzierenden Funktion einzutragen
  f = ...
  End Function

- Das erstellte Programm NUMDIFF berechnet die Ableitung in einem vorzugebenden Punkt x_0 und benötigt als Argument eine Schrittweite h.
- Wenden wir das Programm NUMDIFF an, um erste Ableitungen zweier konkreter Funktionen $f(x)$ numerisch zu berechnen. In den gegebenen Tabellenausschnitten sind die Ergebnisse von NUMDIFF (mit h=0,001) für in Spalte 1 stehende x-Werte in Spalte 2 zu sehen, während in Spalte 3 die exakte berechneten Ergebnisse stehen. Für das x0-Argument in NUMDIFF ist ein relativer Bezug einzusetzen und das Ausfüllkästchen zu verwenden.

  a) $f(x) = e^x$, d.h. $f'(x) = e^x$

Z2S2 =NUMDIFF(ZS(-1);0,001)

	1	2	3
1	x	NUMDIFF(x;0,001)	exakte Ableitung
2	0	1,000000167	1
3	0,5	1,648721545	1,648721271
4	1	2,718282282	2,718281828
5	1,5	4,481689817	4,48168907
6	2	7,38905733	7,389056099
7	2,5	12,18249599	12,18249396
8	3	20,08554027	20,08553692
9	3,5	33,11545748	33,11545196
10	4	54,59815913	54,59815003
11	4,5	90,0171463	90,0171313
12	5	148,4131838	148,4131591

Definition 8.2:

Eine ökonomische Funktion $f(x)$ heißt

- *elastisch* in x, wenn $|e_f(x)| > 1$
- *proportional–elastisch* in x, wenn $|e_f(x)| = 1$
- *unelastisch* in x, wenn $|e_f(x)| < 1$

♦

Die *Elastizität* ist dimensionslos und lässt sich folgendermaßen *charakterisieren:*

- Wenn sich die unabhängige Variable x (Input) um a % (a klein) verändert, so verändert sich die abhängige Variable (Output) $y = f(x)$ um näherungsweise $e_f(x) \cdot a\,\%$.
- Elastizitäten können sowohl positive als auch negative Werte annehmen:
  - *Positive Elastizitäten* vergrößern die Funktion $f(x)$, während *negative Elastizitäten* die Funktion $f(x)$ verkleinern, wenn sich die unabhängige Variable x vergrößert.
  - Je größer $|e_f(x)|$ ist, desto größer ist die Änderung von $f(x)$.
- Bei Funktionen mehrerer Variablen definiert man *partielle Elastizitäten* bzgl. einzelner Variablen bzw. *Richtungselastizitäten*.
- Im Beisp.8.12 geben wir eine Illustration zu Elastizitäten.

8.4 Einsatz von EXCEL

Obwohl die Theorie einen endlichen Algorithmus zur Differentiation liefert, kann EXCEL im Unterschied zu Computeralgebrasystemen wie MATHEMATICA und MAPLE keine Ableitungen von Funktionen berechnen:

- Dies liegt darin begründet, dass EXCEL nicht exakt (symbolisch) im Rahmen der Computeralgebra sondern nur numerisch rechnen kann.
- Da EXCEL auch zur numerischen Differentiation keine Funktionen zur Verfügung stellt, ist man darauf angewiesen, Programme zur numerischen Differentiation mittels der integrierten Programmiersprache VBA zu erstellen. Wir geben eine kurze Illustration dieser Problematik im Beisp.8.13.

Bemerkung

Aufgrund der geschilderten Problematik geben wir die Empfehlung, anfallende Berechnungen von Ableitungen für ökonomische Funktionen mittels der gegebenen Differentiationsregeln per Hand durchzuführen oder ein Computeralgebrasystem heranzuziehen. Da ökonomische Funktionen in vielen Fällen keine komplizierte Struktur besitzen, ist die Berechnung von Ableitungen per Hand ohne große Schwierigkeiten möglich.

♦

Für diese Funktion ist das Funktionsprogramm f für die Funktion $f(x)$ in folgender Form zu schreiben:

Function f (x **As Double**) **As Double**

f = exp(x)

End Function

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x + \ln x}$, d.h. $f'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{e^x + \ln x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot (e^x + \ln x) - \sin x \cdot (e^x + \frac{1}{x})}{(e^x + \ln x)^2}$

Für diese Funktion ist das Funktionsprogramm f für die Funktion $f(x)$ in folgender Form zu schreiben:

Function f (x **As Double**) **As Double**

f = sin(x) / (exp(x) + ln(x))

End Function

Z2S2 =NUMDIFF(ZS(-1);0,001)

	1	2	3	
1	x	NUMDIFF(x;0,001)	exakte Ableitung	
2	1	-0,224674606	-0,224674479	
3	1,5	-0,200540095	-0,200540114	
4	2	-0,161306748	-0,161306760	
5	2,5	-0,105049969	-0,105049966	
6	3	-0,053153646	-0,053153635	
7	3,5	-0,017328341	-0,017328330	
8	4	0,001568255	0,001568263	
9	4,5	0,008228066	0,008228070	
10	5	0,00822261	0,008222611	
11	5,5	0,005721868	0,005721868	
12	6	0,003056275	0,003056274	

9 Integralrechnung

9.1 Einführung

Die *Integralrechnung* kann als Umkehrung der *Differentialrechnung* angesehen werden:

- Beide Gebiete werden als *Infinitesimalrechnung* bezeichnet, um ihre gegenseitige Durchdringung auszudrücken.
- Die Integralrechnung bildet neben der Differentialrechnung eine der Grundsäulen der Mathematik und damit auch der Wirtschaftsmathematik.
- In diesem Kapitel geben wir eine Einführung, so dass anfallende Aufgaben gelöst werden können:
  - Die Basis der Integralrechnung bildet die Berechnung von Stammfunktionen (unbestimmten Integralen), die im Abschn.9.2 behandelt wird.
  - Für Anwendungen wichtige bestimmte Integrale und ihr Zusammenhang mit unbestimmten Integralen werden im Abschn.9.3 besprochen.
  - Da in mathematischen Modellen der Wirtschaft mehrfache Integrale auftreten können, werden diese im Abschn.9.4 vorgestellt.
  - Ein erster Einblick in die Vielzahl von Anwendungen der Integralrechnung in mathematischen Modellen der Wirtschaft ist im Abschn.9.5 und Beisp.9.5 gegeben.
  - EXCEL stellt zur Integralrechnung keine Funktionen zur Verfügung. Man kann jedoch Funktionsprogramme mittels der integrierten Programmiersprache VBA erstellen, wie im Abschn.9.6 illustriert ist.

9.2 Unbestimmte Integrale

9.2.1 Grundlagen

Eine Funktion $F(x)$ so zu bestimmen, dass ihre Ableitung $F'(x)$ in einem x-Intervall mit einer gegebenen Funktion $f(x)$ übereinstimmt, d.h.

$F'(x) = f(x)$

gilt, liefert einen ersten Zugang zur *Integralrechnung:*

- Die gesuchte Funktion $F(x)$ wird als *Stammfunktion* bezeichnet.
- Alle für eine Funktion $f(x)$ existierenden *Stammfunktionen* $F(x)$ unterscheiden sich höchstens um eine Konstante, wie sich einfach beweisen lässt.
- Man erkennt sofort, dass die Bestimmung einer Stammfunktion als Umkehrung der Differentialrechnung angesehen werden kann.

Beispiel 9.1:
Für die Anwendung der im Abschn.9.2.2 und Beisp.9.2 vorgestellten Integrationsregeln benötigt man *Stammfunktionen* elementarer mathematischer Funktionen, die als *Grundintegrale* bezeichnet werden:

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
0	C (Konstante)	C (Konstante)	$C \cdot x$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (n-ganz≠-1)	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ α – reell $\alpha \neq -1, x > 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$ $(x \neq 0)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$ $(a>0, a \neq 1)$
e^x	e^x	$\ln \lvert x \rvert$	$x \cdot (\ln \lvert x \rvert - 1)$ $(x \neq 0)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$ (für $\cos x \neq 0$)	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$ (für $\sin x \neq 0$)
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ $(\lvert x \rvert < 1)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$ $(x \neq 0)$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar\,tanh} x$ für $\lvert x \rvert < 1$ $\operatorname{ar\,coth} x$ für $\lvert x \rvert > 1$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{ar\,sinh} x$

Beispiel 9.2:
Illustrieren wir die im Abschn.9.2.2 vorgestellten *Integrationsregeln:*

a) Das folgende Integral lässt sich einfach mittels *Summenregel* berechnen, da die entstehenden Integrale bekannte Grundintegrale sind:

$$\int (3 \cdot x^3 + 5 \cdot e^x - \cos x)\, dx = 3 \cdot \int x^3\, dx + 5 \cdot \int e^x\, dx - \int \cos x\, dx$$

$$= \frac{3}{4} \cdot x^4 + 5 \cdot e^x - \sin x$$

b) Das Grundintegral $\int \ln x\, dx$ lässt sich nicht unmittelbar berechnen:

- Man schreibt es in der Form $\int 1 \cdot \ln x\, dx$.
- In dieser Form lässt sich die Regel der *partiellen Integration* anwenden, wenn man $f'(x) = 1$ (d.h. $f(x)=x$) und $g(x) = \ln x$ (d.h. $g'(x) = \frac{1}{x}$) setzt:

Definition 9.1:
Die Gesamtheit von Stammfunktionen für eine Funktion $f(x)$ einer Variablen x nennt man *unbestimmtes Integral* von $f(x)$:

- Unbestimmte Integrale schreiben sich in der Form
  $$\int f(x)\, dx$$
  - Man bezeichnet $f(x)$ als *Integranden* und x als *Integrationsvariable*.
  - Wenn die Variable x die Zeit darstellt, bezeichnet man sie mit t und schreibt das unbestimmte Integral in der Form
    $$\int f(t)\, dt$$
- Da sich alle Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$ nur um eine Konstante unterscheiden, kann dem Ergebnis einer unbestimmten Integration eine additive Konstante beigefügt werden. Wir verzichten im Folgenden hierauf.

♦

Zur Problematik von *Stammfunktionen* stellen sich unmittelbar *zwei Fragen:*

I. Besitzt jede Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$.

II. Wie kann man für eine beliebige gegebene Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ bestimmen.

Zur Beantwortung dieser Fragen liefert die Theorie Folgendes:

- Die *erste Frage* lässt sich für eine große Klasse von Funktionen positiv beantworten, da auf einem Intervall [a,b] stetige Funktionen $f(x)$ dort eine Stammfunktion $F(x)$ besitzen, wie man beweisen kann:
  - Die positive Beantwortung der ersten Frage hat jedoch nur die Form einer *Existenzaussage*, d.h. es werden keine universell einsetzbaren *endlichen Algorithmen* zur Bestimmung von Stammfunktionen geliefert.
  - Es werden auch keine Aussagen zur Verfügung gestellt, ob bzw. wie eine aus elementaren Funktionen zusammengesetzte Stammfunktion $F(x)$ für $f(x)$ gebildet werden kann. Es existieren nur Aussagen für spezielle Klassen stetiger Funktionen $f(x)$.
- Damit lässt sich die *zweite Frage* in vielen Fällen nicht positiv beantworten:

  Bereits die einfachen stetigen Funktionen
  $$e^{x^2} \quad , \quad \frac{e^x}{x} \quad \text{und} \quad \frac{\sin x}{x}$$
  besitzen keine Stammfunktionen, die sich aus elementaren mathematischen Funktionen zusammensetzen.

$$\int 1 \cdot \ln x \; dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; dx = x \cdot \ln x - x = x \cdot (\ln x - 1)$$

c) Folgendes Integral, das bei kontinuierliche Zahlungen auftreten kann (siehe Beisp. 9.5d), lässt sich unmittelbar mittels *partieller Integration* berechnen, da der Integrand ein Produkt zweier Funktionen ist und die entstehenden Integrale bekannte Grundintegrale sind:

Indem man $f'(t) = e^{-t}$ und $g(t) = t$ setzt, liefert die partielle Integration:

$$\int t \cdot e^{-t} \; dt = -t \cdot e^{-t} + \int 1 \cdot e^{-t} \; dt = -t \cdot e^{-t} - e^{-t} = -e^{-t} \cdot (1 + t)$$

d) In einer Reihe von Fällen führt die *partielle Integration* nur zum Erfolg, wenn man sie mehrfach anwendet, wie folgende Illustration zeigt:

- Die Anwendung der partiellen Integration mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = \sin x$ liefert das Ergebnis

  $$\int e^x \cdot \sin x \; dx = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \; dx$$

  mit einem Integral auf der rechten Seite, das die gleiche Struktur wie das zu berechnende hat.

- Deshalb wird auf das Integral der rechten Seite erneut die partielle Integration mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = \cos x$ angewandt:

  $$\int e^x \cdot \cos x \; dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \; dx$$

- Das Einsetzen der letzten Berechnung liefert für das gegebene Integral

  $$\int e^x \cdot \sin x \; dx = e^x \cdot \sin x - (e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x \; dx)$$

- Aus der letzten Gleichung folgt durch Umformung unmittelbar das Ergebnis

  $$\int e^x \cdot \sin x \; dx = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin x - \cos x)$$

e) Das Grundintegral $\int \cot x \; dx$ lässt sich nicht unmittelbar berechnen.

- Man kann es in folgender Form schreiben $\int \frac{\cos x}{\sin x} \; dx = \ln \left| \sin x \right|$

- In dieser Form liefert die *logarithmische Integration* das angegebene Ergebnis, da die Ableitung cos x der Nennerfunktion sin x im Zähler des Quotienten steht.

f) In einer Reihe von Aufgaben kann die *logarithmische Integration* erst nach gewissen Umformungen angewandt werden, die bewirken, dass die Zählerfunktion die Ableitung der Nennerfunktion ist:

- So ist das Integral $\int \frac{x}{x^2 + 1} \; dx$

  nicht unmittelbar mittels logarithmischer Integration berechenbar, da im Zähler der Faktor 2 fehlt, um die Ableitung des Nenners darzustellen.

9.2.2 Integrationsregeln

Die Berechnung von *Stammfunktionen* (*unbestimmten Integralen*) beruht auf dem Einsatz von *Integrationsregeln* und ist folgendermaßen charakterisiert:

- Stammfunktionen bekannter elementarer mathematischer Funktionen sind berechnet (siehe Beisp.9.1), in jedem mathematischen Tafelwerk zu finden und werden als *Grundintegrale* bezeichnet.
- Die mathematische Theorie stellt Regeln (Integrationsregeln) zur Verfügung, um Stammfunktionen $F(x)$ für Funktionen $f(x)$ bestimmen zu können.
- Die Integrationsregeln gestatten für spezielle Funktionenklassen die Konstruktion von Stammfunktionen, indem sie die Berechnung auf bekannte Grundintegrale zurückführen (siehe Beisp.9.2).
- Im Folgenden stellen wir wichtige *Integrationsregeln* vor (siehe auch Beisp.9.2), in denen $f(x)$ und $g(x)$ beliebige integrierbare Funktionen sind:
  - *Summenregel*
    Das unbestimmte Integral einer Linearkombination zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berechnet sich folgendermaßen (c und d - beliebige reelle Konstanten):
    $$\int (c\cdot f(x) + d\cdot g(x))\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx + d\cdot\int g(x)\,dx$$
    * Das zu berechnende Integral lässt sich damit auf die Linearkombination der Integrale der einzelnen Funktionen zurückführen.
    * In dieser allgemeinen Regel ist offensichtlich die Integration von Summen und Differenzen von Funktionen enthalten.
  - *Regel der partiellen Integration*
    Aus der Produktregel der Differentiation folgt durch Integration folgende Regel der partiellen Integration:
    $$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$
    die man erfolgreich zur Integration von Produkten von Funktionen heranziehen kann, wenn
    * die Funktion $f'(x)$ einfach integrierbar, d.h. $f(x)$ einfach bestimmbar ist.
    * das auf der rechten Seite stehende Integral eine einfachere Struktur hat.
  - *Substitutionsregel*
    Wenn $f(u)$ stetig ist und $g(x)$ eine stetige erste Ableitung besitzt, so gilt
    $$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) \qquad \text{mit } u=g(x)$$
    wobei nach Berechnung des unbestimmten Integrals auf der rechten Seite in der erhaltenen Stammfunktion $F(u)$ die Substitution $u = g(x)$ einzusetzen ist:

- Dies kann jedoch einfach durch folgende Umformung behoben werden:

$$\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2\cdot x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)$$

g) Betrachten wir ein Beispiel für die Anwendung der *Substitutionsregel:*

- Das Integral $\int x\cdot e^{x^2}\,dx$

  lässt sich nicht durch partielle Integration berechnen, obwohl ein Produkt von Funktionen vorliegt.
- Dies liegt daran, dass das entstehende Integral mit der e-Funktion nicht berechenbar ist.
- Mittels *Substitution* $u = x^2$ mit $u' = 2\cdot x$ folgt unmittelbar das Ergebnis

$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int e^u\,du = \frac{1}{2}\cdot e^u = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2}$$

h) Illustrieren wir die Vorgehensweise der *Partialbruchzerlegung:*

- Das Integral $\int\frac{x}{x^2-1}\,dx$

  hat einen Integranden, der eine echt gebrochene rationale Funktion ist.
- Deshalb lässt sich der Integrand bei Kenntnis der beiden Nullstellen $x = 1$ und $x = -1$ des Nennerpolynoms in Partialbrüche zerlegen, d.h.

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

- Die noch unbekannten Konstanten A,B in den Partialbrüchen lassen sich durch Koeffizientenvergleich bestimmen, der die zwei Gleichungen $A+B=1, -A+B=0$ liefert:

$$x = \frac{A\cdot(x^2-1)}{x+1}+\frac{B\cdot(x^2-1)}{x-1} = A\cdot(x-1)+B\cdot(x+1) \quad \text{ergibt } A=B=\frac{1}{2}$$

- Damit ist das gegebene Integral berechenbar, da nur noch Grundintegrale vorliegen:

$$\int\frac{x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x+1}\,dx+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\ln|x+1|+\ln|x-1|\right) = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|x^2-1\right|$$

- Das gegebene Integral kann auch mittels logarithmischer Integration analog zu Beisp.9.2f berechnet werden. Dies überlassen wir dem Leser.

Beispiel 9.3:

Im Folgenden illustrieren wir die Berechnung bestimmter Integrale am Beispiel eines bei Zahlungsströmen auftretenden bestimmten Integrals (siehe Beisp.9.5d)

$$\int_0^1 t\cdot e^{-t}\,dt$$

* Durch günstig gewählte Substitutionen lässt sich die Berechnung gewisser Klassen unbestimmter Integrale wesentlich vereinfachen.
* Um günstige Substitutionen zu finden, sind Erfahrungen notwendig, da sie häufig nicht unmittelbar zu erkennen sind (siehe Beisp.9.2g).

- *Regel der Partialbruchzerlegung*

  Diese Regel ist auf gebrochenrationale Funktionen $f(x)$ anwendbar, d.h. auf Funktionen, die im Zähler und Nenner aus Polynomen m-ten bzw. n-ten Grades bestehen:

  $$f(x) = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_m \cdot x^m}{b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + ... + b_n \cdot x^n}$$

  Die Regel der *Partialbruchzerlegung*

  * beruht darauf, dass sich gebrochenrationale Funktionen in Partialbrüche zerlegen lassen, die einfacher integrierbar sind.
  * führt nur zum Erfolg, wenn sich die Nullstellen des Nennerpolynoms exakt berechnen lassen. Selbst in diesem Fall kann sich ihre Anwendung für Nennerpolynome hohen Grades ($n \geq 5$) sehr aufwendig gestalten, so dass sich eine Berechnung per Hand nicht empfiehlt.

  Wir gehen nicht näher auf die Partialbruchzerlegung ein und verweisen auf die Literatur. Im Beisp.9.2h findet man eine Illustration.

- *Regel der logarithmischen Integration*

  Diese Integrationsregel ist keine eigenständige Regel, sondern lässt sich unter Anwendung der Substitutionsregel erhalten:

  * Unter logarithmischer Integration versteht man die Berechnung eines Integrals der Form:

    $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\left| f(x) \right| \qquad (f(x) \neq 0)$$

    d.h. ein Integral ist unmittelbar berechenbar, wenn der Integrand aus einem Quotienten besteht, in dem im Zähler die Ableitung der Nennerfunktion steht.
  * In zahlreichen Fällen hat der Integrand nicht unmittelbar die geforderte Form, sondern muss erst durch gewisse Umformungen darauf gebracht werden, wie im Beisp.9.2e und f illustriert ist.

- Zu *Integrationsregeln* ist Folgendes zu bemerken:
  - Sie sind nur für gewisse Funktionenklassen erfolgreich, da die gelieferten neuen Integrale nicht notwendigerweise einfacher berechenbar sind.
  - Für erfolgreiche Anwendungen sind gewisse Erfahrungen erforderlich, da unangepasster Einsatz zu komplizierteren Integralen führen kann.

- Die Berechnungsgrundlage liefert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
- Die Berechnung vollzieht sich in folgenden Schritten:
  I. Das zugehörige unbestimmte Integral berechnet sich zu
  $\int t \cdot e^{-t} \, dt = -e^{-t} \cdot (1+t)$ wie im Beisp.9.2c zu sehen ist.
  II. Damit hat man eine Stammfunktion erhalten: $F(t) = -e^{-t} \cdot (1+t)$.
  III. Mit der erhaltenen Stammfunktion berechnet sich das gegebene bestimmte Integral folgendermaßen:
  $$\int_0^1 t \cdot e^{-t} \, dt = F(t)\Big|_{t=0}^{t=1} = F(1) - F(0) = \left(-e^{-t} \cdot (1+t)\right)\Big|_{t=0}^{t=1}$$
  $$= -e^{-1} \cdot (1+1) - (-e^{0} \cdot (1+0)) = -2 \cdot e^{-1} + 1$$

Beispiel 9.4:

Illustrieren wir die Berechnung mehrfacher Integrale am Beispiel *zweifacher Integrale*:

a) Zweifache Integrale lassen sich auf die Berechnung zweier einfacher Integrale zurückführen:
   - Wir illustrieren dies an folgendem Integral mit einer Form wie im Beisp.9.5g:
   $$\int_a^b \int_c^y f(x,y) \, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^y f(x,y) \, dx \right) dy$$
     - Zuerst berechnet man das innere in Klammern stehende einfache Integral über $f(x,y)$ bzgl. x mit den Integrationsgrenzen c und y, indem die Variable y als konstant angesehen wird.
     - Abschließend wird mit dem erhaltenen Ergebnis das übrigbleibende äußere einfache Integral bzgl. der Variablen y integriert.
   - Wenden wir die beschriebene Vorgehensweise auf eine konkrete Aufgabe an:
   $$\int_0^1 \int_2^y (2 \cdot x + y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_2^y (2 \cdot x + y) \, dx \right) dy = \int_0^1 (x^2 + y \cdot x)\Big|_{x=2}^{x=y} dy$$
   $$= \int_0^1 \left((y^2 + y \cdot y) - (2^2 + 2 \cdot y) \right) dy = \int_0^1 (2 \cdot y^2 - 2 \cdot y - 4) \, dy$$
   $$= \left(\frac{2}{3} \cdot y^3 - y^2 - 4 \cdot y \right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{3} - 1 - 4 = -\frac{13}{3}$$

b) Zweifache Integrale mit *festen Integrationsgrenzen,* bei denen zusätzlich der Integrand aus einem Produkt zweier Funktionen einer Variablen besteht, lassen sich auf die Berechnung des Produkts zweier einfacher Integrale zurückführen:

Bemerkung

Zur Berechnung unbestimmter Integrale geben wir folgende Empfehlung:

- Ehe man sich an die Berechnung eines Integrals mittels der gegebenen Integrationsregeln heranwagt, sollte man erst ein mathematisches Taschenbuch konsultieren, in dem zahlreiche häufig vorkommende Integrale berechnet sind.
- Des Weiteren kann man zur Verfügung stehende Computeralgebraprogramme (MATHEMATICA, MAPLE) heranziehen, die im Unterschied zu EXCEL auch Funktionen zur exakten Berechnung von Integralen bereitstellen. Auf die Anwendbarkeit von EXCEL gehen wir im Abschn.9.6 ein.

  ♦

9.3 Bestimmte Integrale

9.3.1 Grundlagen

Nachdem wir im Abschn.9.2.1 mit *unbestimmten Integralen* einen ersten Zugang zur Integralrechnung vorgestellt haben, betrachten wir im Folgenden einen zweiten Zugang durch Einführung *bestimmter Integrale:*

- Man geht von einem festen x-Intervall [a,b] aus und zerlegt dieses Intervall in n Teilintervalle

  $[x_{k-1}, x_k]$ $\qquad (k = 1, 2, \dots, n;\ x_0 = a,\ x_n = b)$

  mit den Intervalllängen

  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

- Man betrachtet für diese Zerlegung folgende Summe für eine gegebene Funktion $f(x)$:

  $$I_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \qquad (\xi_k \text{ - beliebiger Punkt aus dem Intervall } [x_{k-1}, x_k])$$

- Man verfeinert die Zerlegung des Intervalls [a,b] durch Vergrößerung von n und kommt zu folgender Def.9.2.

Definition 9.2:

Wenn der Grenzwert I (reelle Zahl) der betrachteten Summe I_n für $n\to\infty$ bei beliebiger Zerlegung des Intervalls [a,b] existiert, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = I$$

so nennt man ihn *bestimmtes Integral*, schreibt

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\int_a^b\int_c^d u(x)\cdot v(y)\;dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d u(x)\cdot v(y)\;dx\right)dy = \int_c^d u(x)\,dx\cdot\int_a^b v(y)\,dy$$

Im Folgenden ist eine Illustration an einer konkreten Aufgabe zu sehen:

$$\int_0^1\int_1^2 e^x\cdot y\,dx\,dy = \int_1^2 e^x\,dx\cdot\int_0^1 y\,dy = e^x\Big|_{x=1}^{x=2}\cdot\frac{1}{2}\cdot y^2\Big|_{y=0}^{y=1} = \left(e^2 - e\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Beispiel 9.5:

Betrachten wir einige Anwendungen von Integralen in mathematischen Modellen der Wirtschaft, die bereits die Wichtigkeit der Integralrechnung erkennen lassen:

a) Da sich im Abschn.8.3.4 betrachtete *Grenzfunktionen* als Ableitungen definieren, gestattet die Integralrechnung die Berechnung ökonomischer Funktionen aus ihren Grenzfunktionen, wie im Folgenden unter Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung zu sehen ist:

a1) *Kostenfunktionen* K(x) sind Stammfunktionen von *Grenzkosten* $K'(x)$:

$$K(x) = \int_0^x K'(s)\,ds + K(0)$$, wobei K(0) die *fixen Kosten* darstellen.

a2) *Erlösfunktionen* E(x) sind Stammfunktionen von *Grenzerlösen* $E'(x)$:

$$E(x) = \int_0^x E'(s)\,ds + E(0) = \int_0^x E'(s)\,ds$$

da der Erlös E(0) bei einem Absatz x = 0 wegen E(x) = x · p(x) immer Null ist.

b) Betrachten wir die Problematik der *Konsumentenrente:*

- Bei *Nachfragefunktionen* $P_N(x)$ für eine Ware stellen $P_N(x)$ den Preis (in GE) und x die nachgefragte/abgesetzte Menge (in ME) der Ware dar (siehe Beisp.7.1a). Diese Funktion wird als *monoton fallend* vorausgesetzt, da der Preis $P_N(x)$ sinkt, je mehr von der Ware angeboten, d.h. je größer x wird.
- Wenn sich aufgrund des Marktmechanismus in x_0 ein *Gleichgewichtszustand* mit dem Preis $p_0 = P_N(x_0)$ einstellt, für den der Erlös $E_0 = p_0\cdot x_0$ beträgt, so ergibt sich der theoretisch mögliche Gesamterlös E bis x_0 aus $E = \int_0^{x_0} P_N(x)\,dx$
- Die *Konsumentenrente* $K_R(x_0)$ im Gleichgewichtszustand wird als Differenz zwischen theoretisch möglichen und tatsächlichen Erlösen

$$K_R(x_0) = E - E_0 = \int_0^{x_0} P_N(x)\,dx - p_0\cdot x_0$$

definiert und liefert aus der Sicht des Konsumenten die *Einsparung*, wenn erst im Gleichgewichtszustand gekauft wird.

und bezeichnet $f(x)$ als *Integranden*, x als *Integrationsvariable*, a und b als untere bzw. obere *Integrationsgrenze*, [a,b] als *Integrationsintervall* und die Zahl I als Wert des bestimmten Integrals.

♦

Zu *bestimmten Integralen* ist Folgendes zu bemerken:

- Die gegebene Definition eignet sich nicht zur Berechnung bestimmter Integrale.
- Der Zusammenhang mit unbestimmten Integralen wird im folgenden Abschn.9.3.2 aufgezeigt. Dieser Zusammenhang liefert gleichzeitig die Berechnungsgrundlage für bestimmte Integrale.
- Wenn untere und obere Integrationsgrenzen a und b einen endlichen reellen Zahlenwert annehmen, so spricht man von *eigentlichen Integralen* im Unterschied zu *uneigentlichen Integralen*, bei denen sie auch $-\infty$ bzw. ∞ sein können. Uneigentliche Integrale sind als Grenzwert von eigentlichen Integralen definiert, wie z.B.

  $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

  Diese Form uneigentlicher Integrale trifft man in mathematischen Modellen der Wirtschaft an, wie aus Beisp.9.5d zu sehen ist.
- Analog zu unbestimmten Integralen muss ein bestimmtes Integral nicht für jede beliebige Funktion $f(x)$ existieren. Ein hinreichendes Kriterium für seine Existenz ist die Stetigkeit des Integranden $f(x)$ über dem Integrationsintervall [a,b].
- Aus der Definition bestimmter Integrale folgt eine anschauliche *geometrische Interpretation:*
  Nimmt die Funktion $f(x)$ über dem Integrationsintervall [a,b] nur positive Werte an (d.h. $f(x) \geq 0$), so liefert der Wert des bestimmten Integrals den *Flächeninhalt* zwischen der Funktionskurve von $f(x)$ und der x-Achse über dem Intervall [a,b].

9.3.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Unbestimmte und *bestimmte Integrale* sind aufgrund des *Hauptsatzes* der *Differential-* und *Integralrechnung* durch die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

miteinander verbunden, wobei $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Dieser Hauptsatz zeigt, dass beide Zugänge zur Integralrechnung gleichwertig sind:

- Ein bestimmtes Integral ist unmittelbar berechenbar, wenn eine Stammfunktion $F(x)$ bekannt ist, wobei sich sein Wert $F(b) - F(a)$ als Differenz der Werte der Stammfunktion $F(x)$ an oberer und unterer Integrationsgrenze berechnet.

c) Betrachten wir die Problematik der *Produzentenrente:*

- Das Analogon zur *Konsumentenrente* für Konsumenten aus Beisp.9.5b bildet für Produzenten die *Produzentenrente*.
- Hier wird für eine Ware die *Angebotsfunktion* $P_A(x)$ betrachtet (siehe Beisp.7.1b), in der $P_A(x)$ den Preis (in GE) und x die vom Produzenten angebotene Menge (in ME) der Ware darstellen. Diese Funktion wird als *monoton wachsend* vorausgesetzt, da die angebotene Menge x der Ware erhöht wird, wenn der Preis $P_A(x)$ steigt.
- Die zur Ware gehörige monoton fallende *Nachfragefunktion* (siehe Beisp.9.5b) sei durch $P_N(x)$ gegeben.
- Im *Marktgleichgewicht* (x_0, p_0) schneiden sich beide Funktionen, d.h. es gilt $p_0 = P_A(x_0) = P_N(x_0)$. Für diesen Gleichgewichtsfall beträgt der Erlös für den Produzenten $E_0 = p_0 \cdot x_0$, während sich der theoretisch mögliche *Gesamterlös* E bis x_0 aus $E = \int\limits_0^{x_0} P_A(x)\,dx$ analog wie im Beisp.9.5b ergibt.
- Diejenigen Produzenten, die zu einem niedrigeren Preis verkauft hätten, erreichen damit den *zusätzlichen Gewinn,* der als *Produzentenrente* $P_R(x_0)$ bezeichnet wird:

  $$P_R(x_0) = E_0 - E = p_0 \cdot x_0 - \int\limits_0^{x_0} P_A(x)\,dx$$

d) *kontinuierliche Zahlungen:*

- In einem ökonomischen Prozess wird vorausgesetzt, das die Zahlungen mittels eines stetigen (kontinuierlichen), zeitabhängigen *Zahlungsstromes* (Kapitalgeschwindigkeit) R(t) (in Geldeinheiten GE/Zeiteinheit) durchgeführt werden.
- Die Summe K der in einem kleinen Zeitintervall dt durchgeführten Zahlungen ergeben sich näherungsweise aus $R(t) \cdot dt$, so dass man die gesamten im Zeitintervall [0,T] geflossenen Zahlungen K_T mittels des folgenden bestimmten Integrals erhält:

  $$K_T = \int\limits_0^T R(t)\,dt$$

- Den *Gegenwartswert* K_0 eines von 0 bis T kontinuierlich fließenden Zahlungsstromes erhält man durch Multiplikation von R(t) mit dem *Barwertfaktor* $e^{-r \cdot t}$ mittels des bestimmten Integrals $K_0 = \int\limits_0^T R(t) \cdot e^{-r \cdot t}\,dt$
- Ist der Zahlungsstrom zeitlich nicht beschränkt, kommt man zu *unendlichen Zahlungsströmen*. Man kann T immer größer wählen (d.h. $T \to \infty$), so dass sich der *Gegenwartswert* aus folgendem *uneigentlichen Integral* berechnet:

  $$K_0 = \int\limits_0^\infty R(t) \cdot e^{-r \cdot t}\,dt$$

Beispiele

- Wenn man in der Gleichung des Hauptsatzes b = x und x = t setzt, erhält man die Darstellung von Stammfunktionen $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ mittels bestimmter Integrale in der Form

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a)$$

Diese Formel

- liefert die spezielle Stammfunktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

mit $F(a) = 0$. Dies ist sofort einzusehen, da sich alle Stammfunktionen einer Funktion nur um eine Konstante unterscheiden.

- kann jedoch nicht die Aufgabe lösen, zu einer gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ eine *Stammfunktion* $F(x)$ *explizit* (analytisch) zu *bestimmen*.
- liefert nur die Darstellung unbestimmter Integrale durch bestimmte mit variabler oberer Integrationsgrenze.
- kann herangezogen werden, wenn man Funktionswerte der Stammfunktion numerisch berechnen möchte, wie im Beisp.9.7c illustriert ist.

9.3.3 Numerische Berechnung

Da sich in vielen praktischen Anwendungen auftretende Integrale nicht exakt berechnen lassen, benötigt man zu ihrer Berechnung numerische Methoden (Näherungsmethoden):

- Die Numerische Mathematik stellt effektive Methoden zur Verfügung, die sich mittels Computer ohne Schwierigkeiten anwenden lassen.
- Da EXCEL keine Funktionen zur Integralberechnung zur Verfügung stellt, kann man VBA-Programme für numerische Methoden erstellen, wie im Beisp.9.6 illustriert ist.

Wir können im Rahmen des vorliegenden Buches nicht ausführlich hierauf eingehen, sondern stellen im Folgenden ein allgemeines Prinzip und zwei daraus resultierende einfache numerische Methoden kurz vor:

- Aufgrund der Definition bestimmter Integrale (siehe Abschn.9.3.1) bietet sich folgende Struktur für Formeln zur näherungsweisen Berechnung an:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f(x_k) + R_n = Q(f) + R_n \qquad (R_n \text{ - Quadraturfehler})$$

- In der als *Quadraturformel* bezeichneten Näherungsformel $Q(f)$ sind
  - * α_k - *Gewichte*
  - * x_k - *Stützstellen* mit $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \ldots \le x_{n-1} \le x_n = b$

e) *Kapitalstock*
Die zeitliche *Änderung* $K'(t)$ des *Kapitalstocks* K(t) einer Volkswirtschaft ergibt sich aus den Nettoinvestitionen I(t) zum Zeitpunkt t, d.h. $K'(t) = I(t)$.
Damit berechnet sich der Kapitalstock K(T) zum Zeitpunkt T als bestimmtes Integral aus den Investitionen I(t) im Zeitraum von 0 bis T:

$$K(T) = \int_0^T I(t)\,dt + K(0)$$

wenn der Kapitalstock zum Zeitpunkt 0 bekannt ist.

f) *Wachstumsprozesse*
Im Abschn.8.3.6 wird zur Beschreibung des Wachstums einer zeitabhängigen ökonomischen Funktion f(t) das *Wachstumstempo* w(f,t) mittels

$$w(f,t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

eingeführt:

- Wenn man für eine Funktion f(t) ein konstantes *Wachstumstempo* w(f,t) = k voraussetzt, so berechnet sich durch Integration die Funktion f(t) aus $\ln|f(t)| = k \cdot t + K$, wobei K die Integrationskonstante darstellt. Eine Auflösung nach f(t) liefert das Ergebnis

  $$f(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$$

  mit frei wählbarer Integrationskonstanten $C = e^K$.
- Eine *typische Anwendung* von Wachstumsprozessen wird durch den Prozess der *kontinuierlichen Verzinsung* geliefert (siehe Abschn.13.2.2), bei dem sich das Kapital K(t) nach der Zeit t bei einem Zinssatz i aus dem Anfangskapital K_0 mittels

  $K(t) = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$ berechnet.

  Aufgrund der vorangehenden Betrachtung muss hier das *Wachstumstempo* konstant gleich dem Zinssatz i sein. Dies folgt auch sofort aus

  $$w(f,t) = \frac{K'(t)}{K(t)} = \frac{K_0 \cdot i \cdot e^{i \cdot t}}{K_0 \cdot e^{i \cdot t}} = i$$

g) In einer Firma ist der Bedarf pro Zeiteinheit an einem Artikel durch eine stetige Funktion b(t) gegeben und wird aus einem Lager mit dem Anfangsbestand von L(0) Einheiten befriedigt:

- Der *Lagerbestand* L(T) zur Zeit T berechnet sich aus

  $$L(T) = L(0) - \int_0^T b(t)\,dt$$

  wenn das Lager nicht wieder aufgefüllt wird.

Beispiele

- Stützstellen sind im Integrationsintervall [a,b] frei wählbar und teilen das Integrationsintervall in n Teilintervalle auf.
- Gewichte und Anzahl n der Stützstellen werden so gewählt, dass begangene Integrationsfehler (*Quadraturfehler*) R_n möglichst klein sind.
- Spezielle Auswahlen von Gewichten und Stützstellen liefern verschiedene Quadraturformeln.
- In einer Reihe von Quadraturformeln verwendet man *gleichabständige Stützstellen,* d.h. $x_k = k \cdot h + a$ (k = 0, 1, 2, ... , n):
  * $h = \frac{b-a}{n}$ bezeichnet die konstante *Schrittweite*
  * In diesem Fall sind nur Gewichte α_k und Anzahl n der Stützstellen frei wählbar.

- *Quadraturformeln* werden u.a. durch folgende *Vorgehensweisen* bestimmt:

  I. Die zu integrierende Funktion (Integrand) $f(x)$ wird durch Polynome interpoliert, die anschließend integriert werden.

  II. Man fordert, dass Polynome möglichst hohen Grades mittels der Näherungsformel exakt integriert werden.

- Auf Vorgehensweise I beruhen folgende zwei bereits seit langem bekannte Methoden, die ursprünglich durch geometrische Überlegungen gefunden wurden und mit konstanter Schrittweite arbeiten, d.h. mit Stützstellen

  $$x_k = k \cdot h + a \text{ und Schrittweite } h = \frac{b-a}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

  - *Sehnen-Trapez-Methode:*

    Die Quadraturformel

    $$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot (0.5 \cdot f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + 0.5 \cdot f(x_n))$$

    wird erhalten, indem man den Integranden $f(x)$ zwischen zwei Stützstellen durch eine Sehne annähert, so dass eine Trapezfläche entsteht und abschließend diese Trapezflächen für k = 1 bis k = n addiert.

  - *Simpson-Methode:*
    * Hier muss zusätzlich n als *gerade* vorausgesetzt werden, d.h. das Integrationsintervall wird in eine gerade Anzahl von Teilintervallen aufgeteilt.
    * Die Quadraturformel

      $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \ldots + 4 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

      wird erhalten, indem man den Integranden $f(x)$ zwischen drei Stützstellen durch eine Parabel annähert, diese integriert und abschließend die Ergebnisse für k = 0 bis k = n–2 für gerades k addiert.

- Wenn die Lagerkosten pro Zeiteinheit für eine Einheit des Artikels durch die Funktion k(t) gegeben ist, so berechnen sich die gesamten *Lagerkosten* K(T) bis zum Zeitpunkt T unter Verwendung eines *zweifachen Integrals* (siehe Abschn.9.4 und Beisp.9.4) folgendermaßen

$$K(T) = \int_0^T k(t) \cdot \left(L(0) - \int_0^t b(s)\,ds \right) dt = L(0) \cdot \int_0^T k(t)\,dt - \int_0^T \int_0^t k(t) \cdot b(s)\,ds\,dt$$

Beispiel 9.6:

Im Folgenden stellen wir für die beiden im Abschn.9.3.3 gegebenen *Quadraturformeln* in VBA das Funktionsprogramm TRAPEZ bzw. SIMPSON vor:

- *Sehnen-Trapez-Methode*

```
Function TRAPEZ (a As Double , b As Double , n As Integer) As Double
' Anwendung der Sehnen-Trapez-Methode
h = (b – a) / n
TRAPEZ = ( INTEGR(a) + INTEGR(b) ) / 2
For i = 1 To n – 1
TRAPEZ = TRAPEZ + INTEGR (a + i * h)
Next i
TRAPEZ = TRAPEZ * h
End Function
```

- *Simpson-Methode:*

```
Function SIMPSON (a As Double , b As Double , n As Integer) As Double
' Anwendung der Simpson-Methode: n muss eine gerade Zahl sein
h = (b – a) / n
SIMPSON = ( INTEGR(a) + INTEGR(b) )
For i = 1 To n – 1
SIMPSON = SIMPSON + ( i MOD 2 + 1 ) * 2 * INTEGR (a + i * h)
Next i
SIMPSON = SIMPSON * h / 3
End Function
```

Beide Funktionsprogramme TRAPEZ und SIMPSON sind so angelegt, dass sie zu integrierende Funktionen (Integranden) als Funktionsprogramm INTEGR benötigen, das im gleichen Modul wie TRAPEZ und SIMPSON stehen muss:

```
Function INTEGR (x As Double) As Double
' In der folgenden Zuweisung INTEGR =........ ist der für die Anwendung der
' Programme TRAPEZ und SIMPSON benötigte konkrete
' Integrand f (x) anstatt der Punkte ...... einzugeben:
INTEGR = .........
End Function
```

Bemerkung

Zur Problematik numerischer Integrationsmethoden ist Folgendes zu bemerken:

- Sehnen-Trapez- und Simpson-Methode haben eine niedrige Genauigkeitsordnung:
    - Der begangene Integrationsfehler (Quadraturfehler) ist in Abhängigkeit von der Schrittweite h relativ groß.
    - Um erste Näherungswerte für vorliegende bestimmte Integrale zu erhalten, können beide jedoch erfolgreich eingesetzt werden. Deshalb stellen wir im Beisp.9.6 zwei VBA-Funktionsprogramme vor, um EXCEL zur Integralberechnung einsetzen zu können.
- In professionellen Computerprogrammen zur numerischen Integration werden Methoden mit höherer Genauigkeitsordnung herangezogen.

♦

9.4 Mehrfache Integrale

Die bisher im Abschn.9.2 und 9.3 behandelten Integrale werden als einfache Integrale bezeichnet. Im Beisp.9.5g sind wir bereits auf einen Integralausdruck mit zwei Integralen gestoßen. Derartige Integrale mit mehreren Integralzeichen werden als mehrfache Integrale bezeichnet, und lassen sich auf die Berechnung mehrerer einfacher Integrale zurückführen:

- Das Gebiet mehrfacher Integrale ist sehr umfangreich und wird hauptsächlich in Technik- und Naturwissenschaften benötigt. Wir können deshalb nicht hierauf eingehen.
- Da gewisse mehrfache Integrale auch in mathematischen Modellen der Wirtschaft auftreten, geben wir im Beisp.9.4 eine einführende Illustration zu Berechnungsmöglichkeiten.

9.5 Anwendungen in der Wirtschaft

Aus der Vielzahl der Anwendungen von Integralen in mathematischen Modellen der Wirtschaft können wir nur wenige herausgreifen, die wir im Beisp.9.5 vorstellen. Diese Beispiele geben einen ersten Einblick und lassen bereits die Wichtigkeit von Integralen in der Wirtschaftsmathematik erkennen.

9.6 Einsatz von EXCEL

Wie bereits erwähnt, stellt EXCEL zur Berechnung von Integralen keinerlei Funktionen zur Verfügung:

- Wer die exakte Berechnung einer Stammfunktion benötigt, d.h. ihren analytischen Funktionsausdruck, kann die gegebenen Integrationsregeln versuchen oder ein Computeralgebrasystem wie MATHEMATICA oder MAPLE heranziehen. Man darf jedoch keine Wunder erwarten, da die Theorie keine allgemein anwendbaren Methoden zur exakten Berechnung von Integralen zur Verfügung stellt.

Beispiel 9.7:
Berechnen wir Näherungswerte für das bestimmte Integral aus Beisp.9.3

$$\int_0^1 t \cdot e^{-t}\, dt = -2 \cdot e^{-1} + 1 = 0{,}2642411176571153.....$$

mittels der Funktionsprogramme TRAPEZ und SIMPSON aus Beisp.9.6 für verschiedene Schrittweiten h, d.h. verschiedene Anzahlen n gleichabständiger Stützstellen. Das von beiden Programmen benötigte Funktionsprogramm INTEGR hat hierfür folgende Gestalt:

Function INTEGR (x **As Double**) **As Double**
INTEGR = x * **Exp**(-x)
End Function

a) Mittels des Funktionsprogramms TRAPEZ:

Z2S2 | =TRAPEZ(0;1;ZS(-1))

	1	2	3	4
1	n	TRAPEZ		
2	10	0,2634081		
3	20	0,2640328		
4	30	0,26414853		

b) Mittels des Funktionsprogramms SIMPSON:

Z2S2 | =SIMPSON(0;1;ZS(-1))

	1	2	3	4
1	n	SIMPSON		
2	10	0,26423986		
3	20	0,26424104		
4	30	0,2642411		

c) Bestimmen wir näherungsweise eine Stammfunktion F(x) des betrachteten Integranden

$x \cdot e^{-x}$

(siehe auch Beisp.9.2c) in den Punkten 0 , 0.1 , 0.2 , ... , 1 , indem wir das bestimmte Integral aus der im Abschn.9.3.2 gegebenen Darstellung für Stammfunktionen

$$F(x) = \int_0^x t \cdot e^{-t}\, dt = -e^{-x} \cdot (1+x) + 1$$

mittels des Funktionsprogramms SIMPSON für n = 30 berechnen.
Im folgenden Tabellenausschnitt kann man die gute Übereinstimmung der berechneten Näherungswerte mit den exakten Werten erkennen:

- Wenn die exakte Berechnung eines vorliegenden Integrals nicht in einem vertretbaren Aufwand möglich oder von vornherein unmöglich ist, lassen sich zahlreiche numerische Methoden (Näherungsmethoden) heranziehen. Im Abschn.9.3.3 stellen wir diese Problematik vor.
- EXCEL lässt sich zur numerischen Berechnung von Integralen heranziehen, indem man VBA-Programme für numerische Methoden schreibt.
  Wir geben hierfür einfache Illustrationen, indem wir im Beisp.9.6 für Sehnen-Trapez- und Simpson-Methode jeweils ein VBA-Programm vorstellen.

Z2S2 =SIMPSON(0;ZS(-1);30)

	1	2	3	4
1	x	SIMPSON	exakte Werte	
2	0	0	0	
3	0,1	0,00467884	0,00467884	
4	0,2	0,0175231	0,0175231	
5	0,3	0,03693631	0,03693631	
6	0,4	0,06155194	0,06155194	
7	0,5	0,09020401	0,09020401	
8	0,6	0,12190138	0,12190138	
9	0,7	0,15580498	0,15580498	
10	0,8	0,19120786	0,19120786	
11	0,9	0,22751764	0,22751765	
12	1	0,2642411	0,26424112	

10 Differenzengleichungen

10.1 Einführung

Zeitabhängige (dynamische) Vorgänge spielen in der Wirtschaft eine große Rolle:

- Zeitabhängige (dynamische) Vorgänge werden als *Prozesse* bezeichnet:
    - Wenn man Prozesse nur zu bestimmten Zeitpunkten betrachtet, d.h. bei diskreter (diskontinuierlicher) Betrachtungsweise, spricht man von *diskreten Prozessen.* Als mathematische Modelle ergeben sich hierfür *Differenzengleichungen*.
    - Werden Prozesse kontinuierlich betrachtet, so spricht man von stetiger (kontinuierlicher) Betrachtungsweise. Derartige Prozesse heißen *stetige Prozesse*. Als mathematische Modelle ergeben sich hierfür *Differentialgleichungen*.
- *Zeitabhängige* (*dynamische*) *ökonomische Vorgänge* werden als *ökonomische Prozesse* bezeichnet und teilen sich auf in
    - diskrete ökonomische Prozesse
    - stetige ökonomische Prozesse
- Mathematische Modelle in Form von Differenzen- bzw. Differentialgleichungen finden in der Wirtschaft zahlreiche Anwendungen, so dass wir näher darauf eingehen:
    - *Differenzengleichungen* zur Beschreibung diskreter ökonomischer Prozesse stellen wir in diesem Kapitel vor, indem wir
        * einen Einblick in die mathematische Theorie geben (Abschn.10.2 und 10.4).
        * die Problematik an konkreten ökonomischen Modellen illustrieren (siehe Beisp. 10.1 und 10.2).
        * den Einsatz von EXCEL diskutieren (siehe Abschn.10.5).
    - *Differentialgleichungen* zur Beschreibung stetiger ökonomischer Prozesse stellen wir im Kap.11 vor.

Bemerkung

Differenzengleichungen lassen sich als *diskrete Versionen* von Differentialgleichungen charakterisieren, da folgende Sachverhalte vorliegen:

- Wenn man bei Prozessen von diskreter Betrachtungsweise zur stetigen übergeht, so gehen beschreibende Differenzengleichungen in Differentialgleichungen über (siehe Beisp.10.1a).
- Umgekehrt ergeben sich Differenzengleichungen durch Diskretisierung von Differentialgleichungen (siehe Beisp.10.3 und Abschn.11.6).

Aus beiden Sachverhalten erklärt sich der enge Zusammenhang der Lösungstheorien von Differenzen- und Differentialgleichungen.

♦

Beispiel 10.1:

Betrachten wir mathematische Modelle, die Differenzengleichungen erster Ordnung verwenden:

a) Die *Zinseszinsrechnung* lässt sich folgendermaßen mittels einer Differenzengleichung erster Ordnung mathematisch modellieren (siehe Abschn.13.2.2):

- Häufig wird bei der Zinseszinsrechnung eine jährliche Verzinsung (d.h. *diskrete Verzinsung*) zugrundegelegt, d.h. die diskrete Variable t steht für die Jahre und nimmt Werte $t = 1, 2, \ldots$ an.
  - Damit berechnet sich das Kapital K_t
    nach dem t-ten Jahr mittels der linearen *Differenzengleichung* erster Ordnung (siehe Abschn.13.2.2) $K_t = K_{t-1} \cdot (1+i)$
    aus dem Kapital K_{t-1}
    des vorangehenden (t-1)-ten Jahres, wenn der Zinssatz
    $$i = \frac{p}{100} \qquad \text{(p - Zinsfuß in Prozent)}$$
    beträgt.
  - Diese Differenzengleichung besitzt die Lösung (siehe Beisp.10.5a)
    $$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \qquad (t = 1, 2, \ldots)$$
    wobei K_0
    das Anfangskapital zu Beginn der Verzinsung darstellt, das als Anfangswert vorzugeben ist.
- Im Folgenden illustrieren wir, wie sich die erhaltene Differenzengleichung in eine Differentialgleichung transformiert, wenn man von der *diskreten Verzinsung* zur *stetigen* übergeht:
  - Man kann die Differenzengleichung für die Zinseszinsrechnung
    $K_t = K_{t-1} \cdot (1+i)$ folgendermaßen umformen:
    $$\frac{K_t - K_{t-1}}{\Delta t} = \frac{\Delta K_{t-1}}{\Delta t} = K_{t-1} \cdot i \qquad \text{mit} \quad \Delta t = t - (t-1) = 1$$
  - Betrachtet man abschließend Δt als stetig veränderbar, schreibt K(t) anstatt von K_t und lässt Δt gegen Null gehen, ergibt sich die lineare Differentialgleichung
    $$\frac{dK}{dt} = K \cdot i$$
    erster Ordnung der kontinuierlichen Verzinsung für das Kapital K(t):
    * Sie ist eine *Wachstumsdifferentialgleichung* (siehe Beisp.11.1c).
    * Mit der Anfangsbedingung (Anfangskapital) $K(0) = K_0$
      besitzt sie die Lösung (siehe Beisp.11.5a): $K(t) = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$

10.2 Grundlagen

Differenzengleichungen sind folgendermaßen *charakterisiert:*

- Werte von Lösungsfunktionen $y(x)$ sind nur in diskreten Stellen x=k gesucht, d.h.

  $y_k = y(k)$ $\qquad$ (k = 0, 1, ...)

  - Damit ist eine Folge (*Lösungsfolge*) von Funktionswerten y(k) gesucht, für die als Schreibweise y_k üblich ist, die als *Indexschreibweise* bezeichnet wird.
  - Wenn x die Zeit darstellt, ersetzt man x durch t und verwendet die Indexschreibweise

    y_t $\qquad$ (t = 0, 1, ...)

    die im Folgenden zum Einsatz kommt, da ökonomische Prozesse betrachtet werden.

- Es ist eine *Lösungsfolge* $\{ y_t \}$

  derart zu bestimmen, dass eine Gleichung der (impliziten) Form

  $F\left(y_t , y_{t-1} , y_{t-2} , \dots , y_{t-m} , t\right) = 0$ $\qquad$ ($m \geq 1$)

  für alle positiven ganzen Zahlen t = m , m+1 , m+2 , ... erfüllt ist, die als *Differenzengleichung* m-ter Ordnung bezeichnet wird:

  - Falls eine Lösungsfolge für diese Differenzengleichung existiert, ist sie eine unendliche Zahlenfolge, für die die Problematik der Konvergenz oder Divergenz grundlegende Bedeutung hat. Untersuchungen in dieser Hinsicht würden den Rahmen des Buches sprengen, so dass wir auf die Literatur verweisen.
  - Eine Lösungsfolge ist im Falle ihrer Existenz nicht eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit kann unter gewissen Voraussetzungen durch Vorgabe von m *Anfangswerten* für

    $y_0 , \quad y_1 , \dots , y_{m-1}$

    erreicht werden (siehe Abschn.10.4), so dass man von Differenzengleichungen mit Anfangsbedingungen spricht. Derartige Aufgaben werden als Anfangswertaufgaben bezeichnet.

- Die Struktur von Differenzengleichungen wird durch die konkrete Form der Funktion F bestimmt:

  - Lässt sich die Funktion F nach y_t auflösen, d.h. man erhält

    $y_t = f\left(y_{t-1} , y_{t-2} , \dots , y_{t-m} , t\right)$ $\qquad$ (t = m , m+1 , m+2 , ...)

    so spricht man von Differenzengleichungen m-ter Ordnung in *expliziter Form* (Darstellung)

  - Wenn F bzw. f beliebige Funktionen darstellen, so spricht man von *nichtlinearen Differenzengleichungen.*

    Wie für nichtlineare Gleichungen nicht anders zu erwarten, stellt die mathematische Theorie hierfür keine allgemein anwendbaren Lösungsalgorithmen zur Verfügung.

b) Betrachten wir eine Variante des *Wachstumsmodells* von *Harrod* (postkeynesianisches Wachstumsmodell), das auf eine Differenzengleichung erster Ordnung führt:

- In diesem *diskreten Modell* für eine Volkswirtschaft wird angenommen, dass
  - in der Zeitperiode t der *Betrag* s_t gespart wird, der *proportional* zum *Volkseinkommen* y_t ist, d.h.

    $s_t = a \cdot y_t$ (a – Proportionalitätsfaktor)

  - der gesparte Betrag als *Investition* verwendet werden soll, die proportional zur Differenz $y_t - y_{t-1}$ ist, d.h.

    $s_t = b \cdot (y_t - y_{t-1})$ (b– Proportionalitätsfaktor)

- Damit ergibt sich die *Differenzengleichung* erster Ordnung

  $a \cdot y_t = b \cdot (y_t - y_{t-1})$ (t = 1 , 2 , ...)

  die sich auf folgende Form bringen lässt

  $$y_t = \frac{b}{b-a} \cdot y_{t-1}$$

- Im Folgenden zeigen wir, dass sich die Differenzengleichung in eine *Differentialgleichung* transformiert, wenn man von der *diskreten* (diskontinuierlichen) Betrachtungsweise zur *stetigen* (kontinuierlichen) übergeht:
  - Dividiert man die Differenzengleichung

    $a \cdot y_t = b \cdot (y_t - y_{t-1})$ durch $\Delta t = t - (t-1) = 1,$ so erhält man

    $$a \cdot y_t = b \cdot \frac{y_t - y_{t-1}}{\Delta t}$$

  - Betrachtet man abschließend Δt als stetig veränderbar und lässt es gegen Null gehen, so ergibt sich die *lineare Differentialgleichung* (Wachstumsdifferentialgleichung)

    $$y'(t) = \frac{a}{b} \cdot y(t)$$

    erster Ordnung für das *stetige Wachstumsmodell* von *Baumol* (siehe Beisp. 11.1b) zur Berechnung des Volkseinkommens $y(t)$.

Beispiel 10.2:

Betrachten wir ein mathematisches Modell, das Differenzengleichungen zweiter Ordnung verwendet:

Das *Multiplikator-Akzelerator-Modell* für das Wachstum des Volkseinkommens von *Samuelson* stellt ein weiteres *Wachstumsmodell* dar:

- In diesem diskreten Modell für eine Volkswirtschaft wird Folgendes angenommen:

- Für den Sonderfall, dass F bzw. f lineare Funktionen sind, spricht man von *linearen Differenzengleichungen,* die wir ausführlicher im Abschn.10.4 betrachten:
  * Sie besitzen ein breites Anwendungsspektrum in mathematischen Modellen der Wirtschaft.
  * Die mathematische Theorie liefert für diesen Sonderfall weitreichende Aussagen.

- Bei diskreten ökonomischen Prozessen stellt sich die Frage nach *Gleichgewichtszuständen*, die sich für die beschreibenden Differenzengleichungen folgendermaßen bestimmen:
  - Bei *Differenzengleichungen erster Ordnung* müssen zwei aufeinanderfolgende Werte y_t und y_{t-1} den gleichen Wert annehmen, d.h. es muss gelten:

    $y_t = y_{t-1} = c =$ konstant (t = 1, 2, ...)
  - Bei *Differenzengleichungen zweiter Ordnung* muss Folgendes erfüllt sein (siehe Beisp.10.2a):

    $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = c =$ konstant (t = 2, 3, 4, ...)

Bemerkung

Neben der im Buch verwendeten Schreibweise für Differenzengleichungen, die man als *datierte Form* bezeichnet, ist in der Literatur eine weitere als *Differenzenform* bezeichnete Schreibweise zu sehen, in der man Differenzen erster, zweiter, ... Ordnung der Form

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \ , \ \Delta^2 y_t = \Delta y_t - \Delta y_{t-1} = y_t - y_{t-1} - y_{t-1} + y_{t-2} = y_t - 2 \cdot y_{t-1} + y_{t-2} \ ....$$

einsetzt:

- Beide unterschiedliche Schreibweisen haben keinen Einfluss auf die Lösungstheorie, sondern liefern nur unterschiedliche Darstellungen der Differenzengleichung.
- Man kann eine in Differenzenform gegebene Differenzengleichung unmittelbar durch Einsetzen der Differenzen in die im Buch angewandte datierte Form umwandeln, wie im Beisp.10.4b illustriert ist.

♦

10.3 Anwendungen in der Wirtschaft

Da man *ökonomische Prozesse* in zahlreichen Fällen nur zu bestimmten Zeitpunkten betrachtet, d.h. *diskrete Betrachtungsweisen* bevorzugt, sind *Differenzengleichungen* für die mathematische Modellierung erforderlich:

- Zur Beschreibung diskreter ökonomischer Prozesse gibt es eine große Anzahl mathematischer Modelle in Form von Differenzengleichungen, wobei lineare Differenzengleichungen überwiegen.
- Einen ersten Einblick in Differenzengleichungs-Modelle für praktische ökonomische Prozesse findet man in den Beisp.10.1und 10.2.

- Die Summe von *Konsumnachfrage* k_t und *Investititionsnachfrage* i_t in einem Zeitabschnitt t entspreche dem *Volkseinkommen* y_t dieses Zeitabschnitts. Damit ergibt sich die Gleichung $y_t = k_t + i_t$
- Des Weiteren wird in diesem Modell davon ausgegangen, dass der aktuelle *Konsum* k_t *proportional* zum *Volkseinkommen* y_{t-1} des vorhergehenden Zeitabschnitts $t-1$ ist (p-Proportionalitätsfaktor), d.h. $k_t = p \cdot y_{t-1}$
- Nach dem *Akzelerationsprinzip* hängen die *Investitionen* i_t nicht vom aktuellen Einkommen y_t ab, sondern sind zur *Veränderungsrate* des aggregierten Einkommens $y_{t-1} - y_{t-2}$ *proportional*, d.h.

  $i_t = c \cdot (y_{t-1} - y_{t-2})$ (c - Proportionalitätsfaktor)

- Das Einsetzen der beiden letzten Gleichungen in die erste Gleichung liefert folgende *homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung* für das Volkseinkommen $(d = c + p)$

  $$y_t - d \cdot y_{t-1} + c \cdot y_{t-2} = 0 \qquad (t = 2, 3, 4, \ldots)$$

  - Diese homogene Differenzengleichung besitzt unter der Bedingung $1 - d + c = 0$ einen *Gleichgewichtszustand* (siehe Abschn.10.2)
  - Die abgeleitete Differenzengleichung wird *inhomogen*, d.h.

    $$y_t - d \cdot y_{t-1} + c \cdot y_{t-2} = s_t$$

    wenn man annimmt, dass sich das *Volkseinkommen* folgendermaßen zusammensetzt:

    $$y_t = k_t + i_t + s_t$$

    d.h. es kommen die *Staatsausgaben* s_t hinzu, die meistens als konstant angesehen werden, d.h. $s_t = b =$ konstant.

Beispiel 10.3:

Nachdem wir im Beisp.10.1a und b die Überführung einer Differenzengleichung in eine Differentialgleichung illustriert haben, betrachten wir im Folgenden ein Beispiel für die umgekehrte Richtung, d.h. die Überführung einer Differentialgleichung in eine Differenzengleichung.

Ein Klasse numerischer Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen führen diese näherungsweise auf Differenzengleichungen zurück:

- Die in Differentialgleichungen auftretenden Ableitungen (Differentialquotienten) werden durch Differenzenquotienten ersetzt. Man bezeichnet derartige Methoden als *Differenzenmethoden*.
- Die Anwendung von Differenzenmethoden ist weitverbreitet, da sich die entstehenden Differenzengleichungen einfacher lösen lassen. Ein Einblick in diese Problematik wird im Abschn.11.6 gegeben.

10.4 Lineare Differenzengleichungen

Für *lineare Differenzengleichungen* existiert eine zu linearen Differentialgleichungen analoge umfassende *Theorie,* wobei für konstante Koeffizienten weitreichende Aussagen bestehen.

Im Folgenden stellen wir wichtige *Eigenschaften* und *Lösungsmethoden* für lineare Differenzengleichungen vor:

- *Lineare Differenzengleichungen m-ter Ordnung* sind folgendermaßen charakterisiert:
  - Sie haben die Form (in Indexschreibweise) $\quad (t = m , m+1 , ...)$

    $y_t + a_1(t) \cdot y_{t-1} + a_2(t) \cdot y_{t-2} + \ ... \ + a_m(t) \cdot y_{t-m} = b_t$

    wobei die Größen Folgendes bedeuten:

    * $a_1(t) \ , \ a_2(t) \ , \ ... \ , \ a_m(t)$

      gegebene reelle stetige Koeffizienten.
      Hängen die Koeffizienten nicht von t ab, so spricht man von linearen Differenzengleichungen mit *konstanten Koeffizienten.*

    * $\{ b_t \}$ $\quad (t = m , m+1 , ...)$

      reellwertige Folge der gegebenen rechten Seiten der Differenzengleichung:
      – Sind alle Glieder dieser Folge gleich Null, so spricht man von *homogenen linearen Differenzengleichungen*, ansonsten von *inhomogenen*.
      – Des Weiteren spricht man bei einer inhomogenen Differenzengleichung von der *zugehörigen homogenen Differenzengleichung*, wenn man ihre rechte Seite gleich Null setzt.

    * $\{ y_t \}$ $\quad (t = 0 , 1 , 2 ,..., m-1 , m , ...)$

      Gesuchte unendliche *Lösungsfolge* mit den Gliedern

      $y_0 , y_1 , y_2 , ... , y_{m-1} , y_m , y_{m+1} , y_{m+2} ,...$

- Lineare Differenzengleichungen besitzen bzgl. der *Lösungstheorie* analoge Eigenschaften wie lineare Differentialgleichungen:
  - Die *allgemeine Lösung* einer *inhomogenen linearen Differenzengleichung* ergibt sich als Summe aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen.
  - Um eine spezielle Lösung zu erhalten, wendet man gleiche Methoden wie bei linearen Differentialgleichungen an:
    Ansatzmethode (siehe Beisp.10.5b) oder Variation der Konstanten.
  - Jede *lineare Differenzengleichung* m-ter Ordnung ist *lösbar*. Die allgemeine Lösung hängt von m frei wählbaren reellen Konstanten ab:
  - Bei linearen Differenzengleichungen m-ter Ordnung kann man Anfangswerte für $y_0 \ , \ y_1 \ , ... , \ y_{m-1}$ vorgeben:

- Im Folgenden geben wir eine erste Illustration für Differenzenmethoden, indem wir die in mathematischen Modellen der Wirtschaft auftretende Wachstumsdifferentialgleichung der Form (siehe Beisp.10.1 und 11.1)

  $y'(t) = a \cdot y(t)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$

  betrachten, in der a eine beliebige reelle Konstante darstellt.

  * Diese lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten besitzt folgende exakte Lösung, wie im Beisp.11.4a gezeigt ist:

    $$y(t) = y_0 \cdot e^{a \cdot t}$$

  * Indem man die erste Ableitung aus der Differentialgleichung näherungsweise durch den ersten Differenzenquotienten mit $\Delta t = 1$ ersetzt (siehe Beisp.8.6), d.h.

    $$y'(t) \approx \frac{y_t - y_{t-1}}{1} = \Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

    ergibt sich für $a \neq 1$ folgende Differenzengleichung erster Ordnung:

    $y_t - y_{t-1} = a \cdot y_t$ bzw. nach Umformung $(1-a) \cdot y_t = y_{t-1}$

    die sich analog zur Gleichung im Beisp.10.1a lösen lässt, wobei die Lösung folgende Gestalt hat

    $$y_t = y_0 \cdot \left(\frac{1}{1-a} \right)^t$$

  * Die Gegenüberstellung der für $y_0 = 1$, $a = -1$ und t = 0, 1, 2, 3, 4 berechneten Werte der exakten Lösung $y(t) = e^{-t}$ und der mittels Differenzengleichung berechneten Näherungslösung

    $$y_t = \left(\frac{1}{2} \right)^t$$

    zeigt relativ starke Abweichungen, die aus der groben Annäherung der ersten Ableitung in der Differentialgleichung resultieren:

t	(1/2)^t	e^(-t)
0	1	1
1	0,5	0,36787944
2	0,25	0,13533528
3	0,125	0,04978707
4	0,0625	0,01831564

Beispiel 10.4:

Illustrieren wir verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für Differenzengleichungen:

a) Die Gleichung zweiter Ordnung aus Beisp.10.2 in der Darstellung

$$y_t - d \cdot y_{t-1} + c \cdot y_{t-2} = b \qquad (t = 2, 3, 4, \ldots)$$

* Damit sind die weiteren Glieder

  $y_m \ , \ y_{m+1} \ , \ y_{m+2} \ , \ldots$

  der Lösungsfolge eindeutig bestimmt.
* Man spricht bei Vorgabe von Anfangswerten von *Anfangswertaufgaben.*

- Lösungen *homogener linearer Differenzengleichungen* m-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten berechnen sich mittels des *Ansatzes*

  $$y_t = \lambda^t \qquad (t = m \ , m+1 \ , \ldots)$$

  mit frei wählbarem Parameter λ, der durch Einsetzen in die Differenzengleichung das *charakteristische Polynom* m-ten Grades

  $$P_m(\lambda) = \lambda^m + a_1 \cdot \lambda^{m-1} + a_2 \cdot \lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1} \cdot \lambda + a_m$$

  liefert, dessen Nullstellen zu bestimmen sind (siehe Beisp.10.5):

  * Der einfachste Fall liegt vor, wenn das charakteristische Polynom m paarweise verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1 \ , \ \lambda_2 \ , \ldots , \ \lambda_m$

    besitzt. In diesem Fall lautet die *allgemeine Lösung* (C_i – frei wählbare reelle Konstanten):

    $$y_t = C_1 \cdot \lambda_1^t + C_2 \cdot \lambda_2^t + C_3 \cdot \lambda_3^t + \ldots + C_m \cdot \lambda_m^t$$

  * Die Lösungskonstruktion bei mehrfachen reellen bzw. komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms vollzieht sich folgendermaßen:

    – Sei λ eine r-fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann lautet die zugehörige Lösung der Differenzengleichung:

    $$\lambda^t \cdot (C_r \cdot t^{r-1} + C_{r-1} \cdot t^{r-2} + \ldots + C_1)$$

    – Sei $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann ist nach der Theorie auch die konjugierte $\alpha - \beta \cdot i$ eine Nullstelle. Die zugehörigen Lösungen der Differenzengleichung haben hierfür die Gestalt:

    $$|\lambda|^t \cdot \left(C_1 \cdot \cos(t \cdot \varphi) + C_2 \cdot \sin(t \cdot \varphi) \right)$$

    $$\text{mit} \quad |\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

    – Bei mehrfachen komplexen Nullstellen ist die Vorgehensweise analog zu mehrfachen reellen.

- Die *Konvergenz* der *Lösungsfolge* einer linearen Differenzengleichung hängt von den Werten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms ab. Diesbezüglich verweisen wir auf die Literatur.

kann man durch Transformation der diskreten Variablen t offensichtlich in der analogen Darstellung

$$y_{t+2} - d \cdot y_{t+1} + c \cdot y_t = b \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots)$$

schreiben und umgekehrt, d.h. beide Darstellungen sind äquivalent.

b) Die in *Differenzenform* vorliegende Differenzengleichung zweiter Ordnung

$$\Delta^2 y_t - 3 \cdot \Delta y_t + y_t = 2$$

lässt sich durch Einsetzen der Formeln für die Differenzen erster und zweiter Ordnung

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} \quad , \quad \Delta^2 y_t = y_t - 2 \cdot y_{t-1} + y_{t-2}$$

ohne Schwierigkeiten in folgende Differenzengleichung zweiter Ordnung in *datierter Form*

$$y_t - 2 \cdot y_{t-1} + y_{t-2} - 3 \cdot (y_t - y_{t-1}) + y_t = 2$$

überführen, die sich durch Zusammenfassungen in folgender Gestalt schreibt:

$$-y_t + y_{t-1} + y_{t-2} = 2$$

Beispiel 10.5:

a) Die lineare *Differenzengleichung erster Ordnung* für die *Zinseszinsrechnung* aus Beisp. 10.1a

$$K_t = K_{t-1} \cdot (1+i) \qquad (t = 1, 2, \ldots, K_0 \text{ - gegeben})$$

mit konstanten Koeffizienten lässt sich mit dem gegebenen *Ansatz*

$$K_t = \lambda^t$$

leicht lösen:

- Die Nullstelle des *charakteristischen Polynoms,* d.h. die Lösung der Gleichung: $\lambda - (1+i) = 0$
  lautet $\lambda = (1+i)$,
  so dass sich folgende *allgemeine Lösung* ergibt $K_t = C \cdot (1+i)^t$
- Die noch frei wählbare Konstante C bestimmt sich aus dem Anfangswert (*Anfangskapital*) K_0 , indem man in der allgemeinen Lösung t gleich Null setzt.
- Damit erhält man als Lösung die im Abschn.13.2.2 vorgestellte Formel der Zinseszinsrechnung bei jährlicher Verzinsung:

$$K_t = K_0 \cdot (1+i)^t \qquad (t = 1, 2, \ldots)$$

b) Lösen wir für die im Beisp.10.2 hergeleitete Differenzengleichung zweiter Ordnung folgendes konkretes Zahlenbeispiel:

$$y_t - 10 \cdot y_{t-1} + 24 \cdot y_{t-2} = 30 \qquad (t = 2, 3, \ldots)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_0 = 3$, $y_1 = 12$

10.5 Einsatz von EXCEL

Die im Beisp.10.5 illustrierte exakte Lösung *linearer Differenzengleichungen* mit *konstanten Koeffizienten* stößt bei praktischen Aufgaben schnell an Grenzen, da sich Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms nicht exakt bestimmen lassen:

- Eine Lösungsmöglichkeit für *lineare Differenzengleichungen* mit konstanten Koeffizienten besteht in EXCEL darin, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms näherungsweise (numerisch) zu bestimmen, wozu man den SOLVER heranzieht, der Polynomgleichungen lösen kann (siehe Abschn. 6.3.2).
- Eine Lösungsmöglichkeit für *nichtlineare Differenzengleichungen* in expliziter Form

  $$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-m}, t) \qquad (t = m, m+1, m+2, \dots)$$

  besteht bei Vorgabe von Anfangswerten für

  $$y_0, \quad y_1, \dots, y_{m-1}$$

  darin, mittels EXCEL weitere aufeinanderfolgende Glieder

  $$y_m, \quad y_{m+1}, \dots$$

  der Lösungsfolge wie folgt aus der Differenzengleichung zu berechnen:

  $$y_m = f(y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_0, t), \; y_{m+1} = f(y_m, y_{m-1}, \dots, y_1, t), \dots.$$

- Die *allgemeine Lösung* der zugehörigen *homogenen Differenzengleichung* erhält man durch den Ansatz

  $y_t = \lambda^t$

  - Die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms,* d.h. die Lösungen der quadratischen Gleichung

    $\lambda^2 - 10 \cdot \lambda + 24 = 0$

    lauten 4 und 6.
  - Damit ergibt sich $y_t = C_1 \cdot 4^t + C_2 \cdot 6^t$ (C_1, C_2 – frei wählbare Konstanten) als *allgemeine Lösung* der *homogenen Differenzengleichung*.
- Um die *allgemeine Lösung* der *inhomogenen Differenzengleichung* zu erhalten, benötigt man eine *spezielle Lösung* der inhomogenen Differenzengleichung:
  - Für die gegebene Differenzengleichung lässt sich dies mittels des Ansatzes

    $y_t = k =$ konstant

    erreichen. Man erhält durch Einsetzen k = 2, d.h. die spezielle Lösung $y_t = 2$.
  - Damit hat die *allgemeine Lösung* der inhomogenen Differenzengleichung die *Gestalt*

    $y_t = C_1 \cdot 4^t + C_2 \cdot 6^t + 2$ (t = 2, 3, ...)
- Das *Einsetzen* der *Anfangsbedingungen* in die allgemeine Lösung liefert das *lineare Gleichungssystem*

  $y_0 = C_1 + C_2 + 2 = 3$

  $y_1 = C_1 \cdot 4 + C_2 \cdot 6 + 2 = 12$

  zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2.

  Das Ergebnis $C_1 = -2$ und $C_2 = 3$ kann per Hand oder mittels SOLVER berechnet werden, so dass sich folgende *Lösung* der *Anfangswertaufgabe* ergibt:

  $y_t = -2 \cdot 4^t + 3 \cdot 6^t + 2$ (t = 2, 3, ...)

11 Differentialgleichungen

11.1 Einführung

Zeitabhängige (dynamische) *Vorgänge* werden als *Prozesse* bezeichnet. Treten sie in Problemstellungen der Wirtschaft auf, so spricht man von *ökonomischen Prozessen.* Wie bereits im Abschn.10.1 beschrieben, gibt es für die mathematische Modellierung von *Prozessen* zwei Möglichkeiten:

- *Diskrete (diskontinuierliche) Betrachtungsweise*
  Hier werden Prozesse nur zu bestimmten Zeitpunkten betrachtet, so dass man von diskreten (diskontinuierlichen) Prozessen spricht, bei deren mathematischer Modellierung sich *Differenzengleichungen* ergeben (siehe Kap.10).
- *Stetige (kontinuierliche) Betrachtungsweise*
  Hier spricht man von stetigen (kontinuierlichen) Prozessen, bei deren mathematischer Modellierung sich *Differentialgleichungen* ergeben, die wir im Folgenden vorstellen.

Differentialgleichungen sind folgendermaßen *charakterisiert:*

- Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen *unbekannte Funktionen* (Lösungsfunktionen) und deren *Ableitungen* vorkommen.
- Man unterscheidet zwischen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, je nachdem ob die in den Gleichungen auftretenden Funktionen von einer oder mehreren unabhängigen Variablen abhängen.
- Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen Differenzen- und Differentialgleichungen. Dieser resultiert aus den Sachverhalten, dass
  - Differenzengleichungen als mathematische Modelle ökonomischer Prozesse bei diskreter Betrachtungsweise auftreten und beim Übergang zur stetigen Betrachtungsweise in Differentialgleichungen übergehen, wie im Beisp.10.1a illustriert ist.
  - umgekehrt Differentialgleichungen durch Diskretisierung in Differenzengleichungen übergehen, wie im Beisp.10.3 und Abschn.11.6 illustriert ist.

11.2 Grundlagen

Da in mathematischen Modellen der Wirtschaft hauptsächlich gewöhnliche Differentialgleichungen auftreten, beschränken wir uns auf diese:

- Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen *unbekannte Funktionen* (Lösungsfunktionen) $y(x)$ einer unabhängigen Variablen x und deren *Ableitungen* vorkommen, wobei ihre Ordnung von der höchsten auftretenden Ableitung bestimmt wird.
- Gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung schreiben sich in der Form
  - $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$

Beispiel 11.1:
Wachstumsdifferentialgleichungen bilden eine Klasse linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, die wir im Abschn.11.4.2 kennenlernen und deren Lösungsproblematik wir in den Beisp.11.4 und 11.5 illustrieren. Sie besitzen zahlreiche Anwendungen in mathematischen Modellen der Wirtschaft, wie bereits folgende Beispiele erkennen lassen:

a) Eine Anwendung für Wachstumsdifferentialgleichungen wird durch die *Bevölkerungsentwicklung* in der Welt oder einem Land geliefert. Das gleiche Modell kann man für das *Wachstum* einer *Tierpopulation* einsetzen:
   - Indem man annimmt, dass die zeitliche Änderung der Bevölkerung (Tierpopulation) $y'(t)$ im Zeitpunkt t proportional zum aktuellen Bevölkerungsbestand (Tierbestand) $y(t)$ ist, ergibt sich die *Wachstumsdifferentialgleichung*

     $y'(t) = a \cdot y(t)$ (a - Proportionalitätsfaktor)

     Kennt man die Anzahl der Bevölkerung (Tierpopulation) y_0 zu einem konkreten Zeitpunkt t_0, so ergibt sich die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$, so dass eine *Anfangswertaufgabe* zu lösen ist, deren Lösung die Form

     $y(t) = y_0 \cdot e^{a \cdot t}$

     besitzt, wie aus Beisp.11.4a zu sehen ist.
   - Die erhaltene Lösung zeigt, dass die *Bevölkerung exponentiell wächst*, falls der Proportionalitätsfaktor a größer Null ist.
   - Das vorgestellte Modell ist meistens unrealistisch (vereinfacht), da ein exponentielles Wachstum erhalten wird, das in der Praxis selten auftritt. Deshalb wird dieses Modell durch genauere Modelle ersetzt, die im Abschn.11.4.2 und Beisp.11.4 und 11.5 vorgestellt werden.

b) Ein einfaches von Baumol aufgestelltes Modell für das *Wachstum* einer *Wirtschaft* ergibt sich folgendermaßen:
   - Es wird angenommen, dass
     * ein Teil a des Volkseinkommens y(t) gespart wird d.h. $s(t) = a \cdot y(t)$.
     * die Sparbeträge s(t) wieder als Nettoinvestitionen i(t) verwendet werden, die den Einkommensänderungen proportional sind, d.h.

       $s(t) = i(t) = b \cdot y'(t)$ (b - Proportionalitätsfaktor)
   - Diese Annahmen ergeben die *Wachstumsdifferentialgleichung* $b \cdot y'(t) = a \cdot y(t)$ die eine analoge Form wie im Beisp.11.1a besitzt:
     * Für eine eindeutige Lösung benötigt man als Anfangsbedingung das Volkseinkommen y_0 zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0, d.h. $y(t_0) = y_0$.
     * Die Lösung lautet dafür $y(t) = y_0 \cdot e^{\frac{a}{b} \cdot (t - t_0)}$

c) Das Endkapital K(t) bei *stetiger Verzinsung* (siehe Beisp.10.1a und 13.2a)

   $K(t) = K_0 \cdot e^{i \cdot t}$ (i – Zinssatz , t – Laufzeit , K_0 – Anfangskapital)

Dies bezeichnet man als *implizite Darstellung*. Dabei brauchen in dem funktionalen Zusammenhang F nicht alle Argumente aufzutreten. Es muss jedoch mindestens die n-te Ableitung

$y^{(n)}(x)$ der unbekannten Funktion (Lösungsfunktion) $y(x)$ vorhanden sein.

- $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n-1)}(x))$

  Dies bezeichnet man als *explizite Darstellung*. Sie wird erhalten, wenn sich die implizite Darstellung nach der n-ten Ableitung von $y(x)$ auflösen lässt. Ist die abhängige Variable die *Zeit* t, so schreibt man

  $y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n-1)}(t))$

- Eine stetige Funktion $y(x)$ heißt *Lösungsfunktion* (*Lösung*) einer Differentialgleichung n-ter Ordnung im Lösungsintervall [a,b], wenn $y(x)$ stetige Ableitungen bis zur n-ten Ordnung besitzt und die Differentialgleichung in [a,b] identisch erfüllt.
- Bei der Bestimmung von Lösungsfunktionen können folgende Fälle auftreten:

  I. Lösungsfunktionen setzen sich aus elementaren mathematischen Funktionen (siehe Abschn.7.3.2) zusammen und werden in einer endlichen Anzahl von Schritten erhalten:

  - Derartige Lösungsdarstellungen sind nur für Sonderfälle möglich, so z.B. für lineare Differentialgleichungen (siehe Abschn.11.5).
  - Dieser Fakt ist nicht verwunderlich, da die Lösung von Differentialgleichungen eng mit der Integration von Funktionen zusammenhängt, bei der die gleiche Problematik auftritt.

  II. Lösungsfunktionen lassen sich in geschlossener Form wie z.B. durch konvergente Funktionenreihen oder in Integralform darstellen:

  - Bei Lösungsdarstellungen durch *Funktionenreihen* spielen Potenzreihen eine wichtige Rolle und man spricht von Potenzreihenlösungen. Lösungen dieser Art treten in Differentialgleichungen der Wirtschaftsmathematik seltener auf, so dass wir nicht hierauf eingehen.
  - Lösungsdarstellungen in *Integralform* lernen wir bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung im Abschn.11.4.1 kennen.

  III. Wenn die Fälle I und II, die als *geschlossene* oder *analytische Lösungsdarstellung* bezeichnet werden, nicht zutreffen, so ist man auf numerische Methoden angewiesen, die wir im Abschn.11.6 vorstellen.

- Eine Lösungsdarstellung für gewöhnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung, die alle möglichen Lösungen enthält, heißt *allgemeine Lösung:*
  - Man kann unter gewissen Voraussetzungen nachweisen, dass die allgemeine Lösung von n frei wählbaren reelle Konstanten (Integrationskonstanten)

    C_1 , C_2 , ... , C_n abhängt.
  - Damit besitzen Differentialgleichungen n-ter Ordnung eine n-parametrische Schar

ergibt sich als Lösung einer *Wachstumsdifferentialgleichung* aus Beisp.11.1a und b:
$K'(t) = i \cdot K(t)$ mit der Anfangsbedingung $K(0) = K_0$.

Beispiel 11.2:

Betrachten wir weitere Differentialgleichungen erster Ordnung, die in mathematischen Modellen der Wirtschaft eine Rolle spielen:

a) Angebot a(t) und Nachfrage n(t) einer Ware stellen sich folgendermaßen in Abhängigkeit des Preises p(t) dar:

$a(t) = A + B\cdot p(t) + C \cdot p'(t)$ (A, B, C gegebene Konstanten ≥ 0)

$n(t) = D - E\cdot p(t) - F \cdot p'(t)$ (D, E, F gegebene Konstanten ≥ 0)

d.h. das Angebot a(t) wächst mit der Erhöhung des Preises p(t), während die Nachfrage n(t) fällt:

- Bei einem *Gleichgewicht* des Marktes, d.h. a(t) = n(t) ergibt sich eine inhomogene *lineare Differentialgleichung* erster Ordnung für die Preisfunktion p(t) in der Form:

  $G \cdot p'(t) + H \cdot p(t) = I$ mit den Konstanten $G = C + F$, $H = B + E$, $I = D - A$.
- Für eine eindeutige Lösung benötigt man als *Anfangsbedingung* den Preis p_0 zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0, d.h. $p(t_0) = p_0$.
- Ein *Preisgleichgewicht* stellt sich für $p'(t) = 0$ ein, d.h. es treten keine Preisänderungen auf. Man erhält hier den konstanten Preis p(t) = I/H.

b) Im Beisp.10.2 haben wir ein diskretes Multiplikator-Akzelerator-Modell von Samuelson betrachtet, das auf eine Differenzengleichung zweiter Ordnung führt.
Betrachten wir im Folgenden ein von Phillips gegebenes *stetiges Analogon* des *Multiplikator-Akzelerator-Modells* für das Wachstum des Volkseinkommens, das auf ein System von zwei *linearen Differentialgleichungen* erster Ordnung führt:

- Mit den Größen
  - y(t) – Volkseinkommen
  - n(t) – Nachfrage
  - k(t) – geplanter Konsum
  - i(t) – Investitionen als Reaktion auf die Veränderung von y(t)
  - ik(t) – Investitionen und Konsum

  lauten die Modellgleichungen (p, b, c, d – gegebene Konstanten)
  - $y'(t) = p \cdot (y(t) - n(t))$
  - $k(t) = b \cdot y(t)$
  - $n(t) = k(t) + ik(t) + i(t)$
  - $i'(t) = c \cdot (i(t) - d \cdot y'(t))$
- Bei bekannter Funktion ik(t) lassen sich die vier Modellgleichungen in folgendes System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung für y(t) und i(t) überführen:
  - $y'(t) = p\cdot (y(t) - b \cdot y(t) - ik(t) - i(t))$
  - $i'(t) = c \cdot (i(t) - d \cdot p\cdot (y(t) - b \cdot y(t) - ik(t) - i(t)))$

$y(x) = y(x; C_1, C_2, ..., C_n)$ von Lösungsfunktionen:

* Lösungen ohne frei wählbare Konstanten heißen *spezielle Lösungen*.
* Es lassen sich maximal n Bedingungen für Lösungen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung vorgeben, durch die sich die in der allgemeinen Lösung enthaltenen Konstanten bestimmen (siehe Beisp.11.6).
* Man spricht von *Anfangswertaufgaben*, wenn für $y(x)$ nur Bedingungen für einen Wert $x = x_0$ der unabhängigen Variablen x aus dem Lösungsintervall [a,b] vorliegen, die als *Anfangsbedingungen* bezeichnet werden.
* In mathematischen Modellen *ökonomischer Prozesse* treten *Anfangswertaufgaben* auf, in denen die unabhängige Variable die Zeit t darstellt, so dass Lösungsfunktionen y(t) zu bestimmen sind:
  Anfangsbedingungen sind häufig für den Beginn des Prozesses y(t) gegeben, d.h. für t = 0 und haben die Form
  $y(0) = y_0 \ , \ y'(0) = y_1 \ ,..., \ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$
  in der die n gegebenen Zahlenwerte y_0 , y_1 , ... , y_{n-1} als *Anfangswerte* bezeichnet werden.

11.3 Anwendungen in der Wirtschaft

Neben durch Differenzengleichungen beschriebenen *diskreten Prozessen* spielen in der Wirtschaft auch *stetige* ökonomische *Prozesse* eine große Rolle, die durch von der Zeit t abhängige Funktionen $y(t)$ beschrieben werden und deren mathematische Modellierung zu *Differentialgleichungen* führt:

- Die erste Ableitung $y'(t)$ eines durch die Funktion $y(t)$ beschriebenen ökonomischen Prozesses stellt ein Maß für seine *zeitliche Änderung* (*Momentangeschwindigkeit*) dar.
- Falls die zeitliche Änderung $y'(t)$ eines ökonomischen Prozesses *proportional* zu seinem gegenwärtigen Zustand y(t) ist, lässt er sich durch *Wachstumsdifferentialgleichungen* beschreiben, in denen $y'(t)$ die Wachstumsgeschwindigkeit darstellt (siehe Abschn.11.4.2).
- Bei *ökonomischen Prozessen* treten nicht nur Wachstumsdifferentialgleichungen, sondern weitere *gewöhnliche Differentialgleichungen erster* und *höherer Ordnung* auf, wie in den Beisp.11.2 und 11.3 illustriert ist.
- Ebenso wie bei diskreten ökonomischen Prozessen stellt sich bei *stetigen Prozessen* $y(t)$ in praktischen Aufgabenstellungen die Frage nach *Gleichgewichtszuständen*:
  - Unter einem Gleichgewichtszustand versteht man einen Zustand, bei dem der *Prozess zeitunabhängig* ist.
  - Dies bedeutet, dass die erste Ableitung als Maß für Änderungen gleich Null sein muss, d.h. $y'(t) \equiv 0$ (siehe Beisp.11.2c, 11.3 und 11.4c).

c) Betrachten wir ein *Wachstumsmodell* von Solow, das auf eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung führt:

- Man nimmt an, dass sich
  I. das Nettosozialprodukt $Y(t)$ als *Cobb-Douglas-Funktion* von Kapital $K(t)$ und Arbeit $A(t)$ in der Form

  $Y(t) = K(t)^a \cdot A(t)^{1-a} \quad (0 < a < 1)$ darstellt,

  II. die Bevölkerungsanzahl und damit das Angebot an Arbeit A(t) als Lösung einer *Wachstumsdifferentialgleichung* (siehe Beisp.11.1a) ergibt, d.h. als folgende Wachstumsfunktion

  $A(t) = A_0 \cdot e^{d \cdot t}$ (d>0 – gegebene Konstante)

  III. das Kapital $K(t)$ proportional zum Nettosozialprodukt $Y(t)$ verändert, d.h.

  $K'(t) = p \cdot Y(t)$ (p – Proportionalitätsfaktor)

- Unter diesen Annahmen ergibt sich das *Wachstumsmodell* von *Solow* aus den in I-III gegebenen Gleichungen.
- Die drei Gleichungen I-III liefern durch
  - Einführung des
    - * Pro-Kopf-Kapitals $k(t) = \dfrac{K(t)}{A(t)}$
    - * Pro-Kopf-Nettosozialprodukts $y(t) = \dfrac{Y(t)}{A(t)}$
  - Differentiation des Pro-Kopf-Kapitals $k(t)$

  folgende *nichtlineare Differentialgleichung* erster Ordnung für das Pro-Kopf–Kapital $k(t)$:

  $$k'(t) = p \cdot k(t)^a - d \cdot k(t)$$

- Die erhaltene Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

  $$k(t) = \left(\frac{p}{d} + e^{(a-1) \cdot d \cdot t} \cdot C \right)^{\frac{1}{1-a}} \qquad \text{(C – frei wählbare Konstante)}$$

  wie man durch Einsetzen nachprüfen kann.

- Für eine eindeutige Lösung benötigt man als Anfangsbedingung das Pro-Kopf-Kapital k_0 zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0, d.h. $k(t_0) = k_0$.

  Damit ergibt sich für $t_0 = 0$ folgende Lösungsfunktion

  $$k(t) = \left(\frac{p}{d} + e^{(a-1) \cdot d \cdot t} \cdot \left(k_0^{1-a} - \frac{p}{d} \right) \right)^{\frac{1}{1-a}}$$

- Aus $k'(t) = 0$ erhält man als *Gleichgewichtszustand* des Pro-Kopf-Kapitals $k(t)$ die Beziehung:

11.4 Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen erster Ordnung stellen die einfachste Form gewöhnlicher Differentialgleichungen dar, da in ihren Gleichungen neben der unbekannten Funktion (Lösungsfunktion) $y(x)$ bzw. $y(t)$ nur noch ihre erste Ableitung $y'(x)$ bzw. $y'(t)$ auftritt:

- Sie schreiben sich in expliziter Darstellung in folgender Form (t - Zeit):
  $y'(x) = f(x, y(x))$ bzw. $y'(t) = f(t, y(t))$
- Es gibt eine Reihe von Sonderfällen, für die sich Lösungsmethoden angeben lassen (siehe Abschn.11.4.1).
- Die *allgemeine Lösung* hängt von einer frei wählbaren reellen Konstanten (Integrationskonstanten) C ab, so dass nur die Vorgabe einer Anfangsbedingung möglich ist.
- Differentialgleichungen erster Ordnung treten in zahlreichen mathematischen Modellen der Wirtschaft auf, wobei Wachstumsdifferentialgleichungen eine große Rolle spielen (siehe Abschn.11.4.2):

11.4.1 Lösungsmethoden

Für eine Reihe von Sonderfällen für Differentialgleichungen erster Ordnung existieren Lösungsmethoden, von denen wir zwei wichtige vorstellen, wobei wir x als unabhängige Variable verwenden:

- *Lineare Differentialgleichungen* erster Ordnung schreiben sich in der Form

  $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = f(x)$ ($a(x)$, $f(x)$ - gegebene Funktionen)

  Für sie lassen sich folgende *Lösungsformeln* angeben:

  - *Allgemeine Lösung* mit frei wählbarer reeller Konstanten C

    $$y(x) = \left(C + \int e^{\int a(x)\,dx} \cdot f(x)\,dx \right) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}$$

    * In dieser Lösungsformel sind alle auftretenden Integrale unbestimmte Integrale, deren Berechnung ohne additive Konstante erfolgt.
    * Damit hat man eine Lösungsdarstellung in Integralform erhalten, die sich nur weiter vereinfachen lässt, wenn die auftretenden Integrale berechenbar sind.

  - *Lösung* für die *Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$

    $$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt} \cdot f(s)\,ds \right) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt}$$

    * In dieser Lösungsformel sind alle auftretenden Integrale bestimmte Integrale.

$$k(t) = \left(\frac{p}{d}\right)^{\frac{1}{1-a}}$$

Beispiel 11.3:

Während wir Anwendungsaufgaben für Differentialgleichungen erster Ordnung in den vorangehenden Beispielen vorstellten, betrachten wir im Folgenden ein Modell für *Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, die ebenfalls ein breites Anwendungsspektrum in der Wirtschaft besitzen:

- Angebot a(t) und Nachfrage n(t) einer Ware stellen sich im Unterschied zu Beisp.11.2a in Abhängigkeit des Preises p(t) folgendermaßen dar:

  $a(t) = A + B\cdot p(t) + C\cdot p'(t) + D\cdot p''(t)$ (A, B, C, D - gegebene Konstanten ≥ 0)

  $n(t) = E - F\cdot p(t) - G\cdot p'(t) - H\cdot p''(t)$ (E, F, G, H - gegebene Konstanten ≥ 0)

  d.h. beide hängen zusätzlich von der *Preisbeschleunigung* p''(t) ab.
- Bei einem Gleichgewicht a(t) = n(t) des Marktes ergibt sich für die Preisfunktion p(t) folgende inhomogene lineare *Differentialgleichung zweiter Ordnung* mit konstanten Koeffizienten (I = D + H, J = C + G, K = B + F, L = E – A):

  $I\cdot p''(t) + J\cdot p'(t) + K\cdot p(t) = L$
- Für eine eindeutige Lösung benötigt man als Anfangsbedingung den Preis p_0 und die Preisänderung p'_0 zu einem gegebenen Zeitpunkt t_0, d.h. $p(t_0) = p_0$ und $p'(t_0) = p'_0$.
- Ein *Preisgleichgewicht* stellt sich für p''(t) = 0 und p'(t) = 0 ein und man erhält aus der Differentialgleichung den konstanten Preis $p(t) = L/K$.

Beispiel 11.4:

Lösen wir *Differentialgleichungen erster Ordnung* mit im Abschn.11.4.1 vorgestellten Methoden, indem wir *Wachstumsdifferentialgleichungen* betrachten, die wir im Abschn. 11.4.2 und Beisp.11.1 vorstellen:

a) Lösen wir die homogene Wachstumsdifferentialgleichung

   $y'(t) + a(t)\cdot y(t) = 0$ (a(t) - gegebene Funktion)

   - Sie kann mittels Methode der *Trennung der Variablen* gelöst werden, d.h. durch Umformung und anschließende Integration:

     $$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)\,dt$$
   - Bei einer beliebigen Funktion a(t) lässt sich nur das Integral auf der linken Seite berechnen, so dass sich

     $$\log y = -\int a(t)\,dt + \log C$$

     ergibt, wenn man die Integrationskonstante in der Form log C schreibt.
   - Die Auflösung nach y ergibt die im Abschn.11.4.1 vorgestellte Lösungsformel für die allgemeine Lösung:

   * Damit hat man eine Lösungsdarstellung in Integralform erhalten, die sich nur weiter vereinfachen lässt, wenn die auftretenden Integrale berechenbar sind.
- Beide Lösungsformeln sind universell einsetzbar, so auch für homogene Differentialgleichungen mit $f(x) \equiv 0$.

- Die in der Mathematik öfters eingesetzte Methode der *Trennung der Variablen* lässt sich auf Differentialgleichungen erster Ordnung anwenden, die folgende Form haben:

  $$y'(x) = g(x) \cdot h(y(x))$$

  d.h. die Variablen x und y müssen trennbar (separierbar) sein. Man spricht hier von *separierbaren Differentialgleichungen:*
  - Wenn diese Form vorliegt, lässt sich die allgemeine Lösung durch Integration in folgender Form finden, wenn man $h(y) \neq 0$ voraussetzt:

    $$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\, dx + C$$

  - Es ist natürlich nicht zu übersehen, dass diese Methode nur explizit eine Lösungsfunktion liefert, wenn beide Integrale berechenbar sind. Ansonsten kann man nur die gegebene implizite Lösungsdarstellung in Integralform weiterverwenden (siehe Beisp.11.4a und c).

11.4.2 Wachstumsdifferentialgleichungen

Einen wichtigen Sonderfall von Differentialgleichungen erster Ordnung bilden Wachstumsdifferentialgleichungen, die in verschiedensten Gebieten eine große Rolle spielen, so auch bei Wachstumsprozessen in der Wirtschaft (siehe Beisp.11.1, 11.4 und 11.5). Da hier Zeitabhängigkeit vorliegt, verwenden wir t als unabhängige Variable.

Wachstumsdifferentialgleichungen können in folgenden Formen auftreten:

I. Einfache *Wachstums-* und *Zerfallsgesetze* gehen davon aus, dass zeitliche Änderungen $y'(t)$ proportional zur Funktion $y(t)$ selbst sind:
   - Damit ergibt sich als mathematisches Modell eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h.

     $$y'(t) = a \cdot y(t) \qquad \text{(a - Proportionalitätsfaktor)}$$

   - Diese Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

     $$y(t) = C \cdot e^{a \cdot t}$$

     d.h. die Lösungsfunktion ist eine e-Funktion (siehe Beisp.11.4a).
   - Für den auftretenden *Proportionalitätsfaktor* a (reelle Zahl), der bei konkreten Aufgaben noch zu bestimmen ist, gilt in Abhängigkeit von seinem Vorzeichen Folgendes:
     * $a < 0$

       Dieser Fall tritt bei *Zerfallsprozessen* (z.B. von radioaktive Substanzen) auf, bei denen a *Zerfallsrate* heißt. Hier ist die Lösungsfunktion eine e-Funktion mit negativem Argument, die für $t \to \infty$ gegen Null strebt.

$$y(t) = C \cdot e^{-\int a(t)\,dt}$$

- Falls a(t) nicht von t abhängt, d.h. konstant gleich a ist, ergibt sich die allgemeine Lösung in der Form

  $$y(t) = C \cdot e^{-a \cdot t}$$

  Diese Lösung kann auch mittels Ansatzmethode erhalten werden (siehe Beisp. 11.6a).

b) Die bei Sättigungsprozessen auftretende Wachstumsdifferentialgleichung

$$y'(t) = a(t) \cdot (N - y(t)) \qquad (\text{ a(t) , N - gegeben })$$

ist eine *inhomogene lineare Differentialgleichung* erster Ordnung:

- Sie kann direkt mittels *Trennung der Variablen* gelöst werden (siehe Beisp.11.4c).
- Nach Umformung auf die Gestalt

  $$y'(t) + a(t) \cdot y(t)) = a(t) \cdot N$$

  ergibt sich ihre *allgemeine Lösung* mit der im Abschn.11.4.1 bereitgestellten *Lösungsformel*, wie im Folgenden zu sehen ist (C - frei wählbare reelle Konstante):

  $$y(t) = \left(C + \int e^{\int a(t)\,dt} \cdot a(t) \cdot N \, dt \right) \cdot e^{-\int a(t)\,dt}$$

c) Lösen wir die im Abschn.11.4.2 vorgestellte *Wachstumsdifferentialgleichung*

$$y'(t) = a(t) \cdot (N - y(t)) \cdot y(t) \qquad (\text{ a(t) , N - gegeben }):$$

- Sie ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung:
  - Man bezeichnet sie als *logistische Differentialgleichung*.
  - Sie beschreibt *Sättigungsprozesse,* d.h. logistische Wachstumsprozesse.
  - Ein Gleichgewicht (Sättigung N) stellt sich für $y'(t) = 0$ ein, d.h. $y(t) = N$.
  - Ihre Lösungsfunktionen heißen *logistische Funktionen* und dienen als Prognosefunktionen für langfristige Prognosen von Wachstumsprozessen.
  - Da sie nichtlinear ist, lässt sich die im Abschn.11.4.1 gegebene Lösungsformel für lineare Differentialgleichungen nicht anwenden. Es ist aber die Methode der Trennung der Variablen erfolgreich, wie im Folgenden illustriert ist.
- Die Methode der *Trennung der Variablen* liefert folgende Beziehung:

  $$\int \frac{dy}{(N-y) \cdot y} = \int a(t)\,dt$$

  Das Integral auf der rechten Seite lässt sich nur bei bekannter einfacher Funktion $a(t)$ berechnen, während das Integral auf der linken Seite durch Partialbruchzerlegung (siehe Beisp.9.2h) berechenbar ist:

  $$\int \frac{dy}{(N-y) \cdot y} = \frac{1}{N} \cdot \int \left(\frac{1}{N-y} + \frac{1}{y} \right) dy = \frac{1}{N} \cdot \left(-\ln|N-y| + \ln|y| \right) = \frac{1}{N} \cdot \ln\left| \frac{y}{N-y} \right|$$

* $a > 0$
  Dieser Fall tritt bei *Wachstumsprozessen* (z.B. von Populationen, Volkseinkommen) auf, bei denen a *Wachstumsrate* heißt. In diesem Fall spricht man von einer *Wachstumsdifferentialgleichung,* da die Lösungsfunktion eine *Wachstumsfunktion* in Form einer e-Funktion mit positivem Argument ist, die für $t \to \infty$ gegen ∞ strebt.

II. Der Proportionalitätsfaktor a kann von der Zeit t abhängen, d.h. a=a(t), so dass die Wachstumsdifferentialgleichung in allgemeinerer Form

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) \qquad \text{(a(t) - gegeben)}$$

vorliegt, die wir im Beisp.11.4a und 11.5a näher betrachten.

III. Durch Differentialgleichungen aus I und II beschriebene Wachstumsprozesse liefern unbeschränkte Wachstumsfunktionen. Dies widerspricht meistens der Realität, da das Wachstum

- i.Allg. beschränkt bleibt, z.B. aufgrund beschränkter Ressourcen.
- sich einer Obergrenze N nähert, so dass man von *Sättigungsprozessen* spricht, die sich durch Differentialgleichungen der Form

  $$y'(t) = a(t) \cdot (N - y(t)) \qquad \text{(a(t) , N - gegeben)}$$

  beschreiben lassen, die wir im Beisp.11.4b und 11.5b näher betrachten.

IV. Der Realität wird am besten Rechnung getragen, wenn man annimmt, dass die Wachstumsgeschwindigkeit $y'(t)$ zur kleiner werdenden Differenz $N - y(t)$ zwischen Obergrenze N und momentanen Zustand $y(t)$ und zum momentanen Zustand $y(t)$ proportional ist, so dass sich die Differentialgleichung

$$y'(t) = a(t) \cdot (N - y(t)) \cdot y(t) \qquad \text{(a(t) , N - gegeben)}$$

ergibt, die wir im Beisp.11.4c und 11.5c näher betrachten.

11.5 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung haben die Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x)$$

mit stetigen Koeffizienten $a_i(x)$ und stellen einen wichtigen Sonderfall gewöhnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung dar, für den die Lösungstheorie weitreichende Aussagen liefert:

- Für n = 1, d.h. für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, lernen wir im Abschn.11.4.1 eine Lösungsformel kennen.
- Lineare Differentialgleichungen besitzen nicht nur großes theoretisches Interesse, sondern haben zahlreiche praktische Anwendungen in mathematischen Modellen der Wirtschaft, wie bereits die betrachteten Beisp.11.1-11.3 erkennen lassen.

- Damit ergibt sich für die allgemeine Wachstumsdifferentialgleichung die Lösung

  $$\ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = N\cdot\int a(t)\,dt$$

  in impliziter Form, die sich durch eine mögliche Auflösung nach y in eine explizite Darstellung bringen lässt (siehe auch Beisp.11.5c).

Beispiel 11.5:
Illustrieren wir das Verhalten von Lösungsfunktionen für einige im Abschn.11.4.2 vorgestellte *Wachstumsdifferentialgleichungen* unter Verwendung der im Beisp.11.4 berechneten Lösungen:

a) Für die spezielle Wachstumsdifferentialgleichung

   $$y'(t) + a(t)\cdot y(t) = 0 \qquad (\,a(t) \text{ - gegeben}\,)$$

   berechnen wir im Beisp.11.4a die allgemeine Lösung:

   - Für den Sonderfall a(t) = a = konstant ergibt sich hieraus unmittelbar die allgemeine Lösung:

     $$y(t) = C\cdot e^{-a\cdot t}$$

     die für a<0 und C>0 offensichtlich eine *Wachstumsfunktion* (monoton wachsende Funktion) realisiert, die nicht beschränkt ist.

   - Bei Vorgabe einer Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ zum Zeitpunkt t = 0 ergibt sich die frei wählbare Konstante C durch Einsetzen zu $y(0) = C\cdot e^{-a\cdot 0} = C = y_0$, so dass man als Lösungsfunktion der Anfangswertaufgabe erhält: $y(t) = y_0\cdot e^{-a\cdot t}$

b) Die bei Sättigungsprozessen auftretende *Wachstumsdifferentialgleichung*

   $$y'(t) = a(t)\cdot(N-y(t)) \qquad (\,a(t)\,,\,N \text{ - gegeben}\,)$$

   lösen wir im Beisp.11.4b:

   - Für den Sonderfall a(t) = a = konstant ergibt sich die allgemeine Lösung

     $$y(t) = \left(C+\int e^{a\cdot t}\cdot a\cdot N\;dt\right)\cdot e^{-a\cdot t} = C\cdot e^{-a\cdot t} + N$$

   - Die Lösungsfunktion ist für a>0 und C>0 eine monoton fallende Funktion und nach unten beschränkt mit $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = N$.

c) Für die allgemeine Wachstumsdifferentialgleichung

   $$y'(t) = a(t)\cdot(N-y(t))\cdot y(t) \qquad (\,a(t)\,,\,N \text{ - gegeben}\,)$$

   berechnen wir im Beisp.11.4c die allgemeine Lösung

   $$\ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = N\cdot\int a(t)\,dt$$

11.5.1 Eigenschaften

Für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung existiert eine umfassende Theorie, die Eigenschaften und Lösungsmethoden liefert:

- Ist die Funktion $f(x)$ der rechten Seite identisch gleich Null (d.h. $f(x) \equiv 0$), so spricht man von *homogenen* linearen Differentialgleichungen, ansonsten von *inhomogenen*.
- Die *allgemeine Lösung* (Lösungsfunktion) $y(x)$ linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung hängt von n frei wählbaren reellen Konstanten ab.
  Hierfür lassen sich weitreichendere Aussagen als für nichtlineare Differentialgleichungen herleiten:
  - Die *allgemeine Lösung* $y_a(x)$ homogener linearer Differentialgleichungen hat die Form

    $$y_a(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + ... + C_n \cdot y_n(x)$$

    wobei die Funktionen $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$

    ein *Fundamentalsystem* von Lösungsfunktionen bilden und $C_1, C_2, ..., C_n$ frei wählbare reelle Konstanten sind:
    * Ein Fundamentalsystem ist dadurch charakterisiert, dass seine n Funktionen Lösungen der homogenen Differentialgleichung und linear unabhängig sind.
    * Damit ist die Berechnung allgemeiner Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen auf die Bestimmung eines Fundamentalsystems zurückgeführt.
    * Derartige Fundamentalsysteme lassen sich z.B. für lineare Differentialgleichungen mit speziellen Koeffizienten explizit bestimmen, wie im Abschn.11.5.2 für konstante Koeffizienten zu sehen ist.
  - Die *allgemeine Lösung* (Lösungsfunktion) $y(x)$ *inhomogener linearer Differentialgleichungen* ergibt sich als Summe aus *allgemeiner Lösung* $y_a(x)$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und *spezieller* (partikulärer) *Lösung* $y_s(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung, d.h.

    $$y(x) = y_a(x) + y_s(x)$$

    Spezielle Lösungen inhomogener Differentialgleichungen lassen sich z.B. mittels Ansatz ermitteln, wie im Abschn.11.5.3 illustriert ist.

11.5.2 Konstante Koeffizienten

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten haben die Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + ... + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = f(x)$$

wobei die Koeffizienten a_k ($k = 0, 1, ..., n-1$) gegebene reelle Konstanten sind, d.h. nicht von x abhängen dürfen.

Für den Sonderfall $a(t) = a =$ konstant lässt sich das Integral auf der rechten Seite der allgemeinen Lösung berechnen, d.h.

$\int a(t)\,dt = a \cdot t + \frac{1}{N} \cdot \ln C$, wobei wir die Integrationskonstante für eine einfache Lösungsdarstellung in der Form $\frac{1}{N} \cdot \ln C$ schreiben:

- Aus der impliziten Darstellung der erhaltenen allgemeinen Lösung

  $$\ln\left|\frac{y}{N-y}\right| = N \cdot a \cdot t + \ln C$$

  ergibt sich durch Auflösung nach y die Lösung in expliziter Form:

  $$y(t) = C \cdot N \cdot \frac{e^{a \cdot N \cdot t}}{1 + C \cdot e^{a \cdot N \cdot t}} = \frac{N}{1 + B \cdot e^{-a \cdot N \cdot t}} \qquad (\text{ mit } B = 1/C)$$

- Die Lösungsfunktion ist für $a>0$, $C>0$, $N>0$ eine monoton wachsende Wachstumsfunktion wie im Beisp.11.5a. Sie trägt jedoch der Realität besser Rechnung, da sie nach oben beschränkt ist mit

  $$\lim_{t \to \infty} y(t) = N$$

Beispiel 11.6:

Illustrieren wir im Folgenden die Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit den im Abschn.11.5.2 und 11.5.3 vorgestellten Methoden:

a) Die im Beisp.11.4a und 11.5a betrachtete homogene lineare Wachstumsdifferentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'(t) + a \cdot y(t) = 0 \qquad (\text{ a - gegebene Konstante })$$

lässt sich mit der im Abschn.11.5.2 vorgestellten Ansatzmethode

$$y(t) = e^{\lambda \cdot t}$$

lösen, die das charakteristische Polynom $\lambda + a = 0$ und damit folgende allgemeine Lösung liefert:

$$y(t) = C \cdot e^{-a \cdot t} \qquad (\text{ C - frei wählbare Konstante })$$

b) Für den Sonderfall der im Beisp.11.4b vorgestellten inhomogenen linearen Wachstumsdifferentialgleichung

$$y'(t) + a \cdot y(t) = a \cdot N = A \qquad (\text{ a , A - gegebene Konstanten })$$

bestimmen wir im Beisp.11.6a die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung:

- Um die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen zu erhalten, benötigt man noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:
  - Diese kann man mit der im Abschn.11.5.3 vorgestellten Ansatzmethode erhalten, indem man folgenden Ansatz $y_s(t) = K$ (K - frei wählbare Konstante) in die inhomogene Differentialgleichung einsetzt.

Für diesen Sonderfall linearer Differentialgleichungen existiert eine umfassende Lösungstheorie, die wir im Folgenden skizzieren:

- Bei *homogenen* Differentialgleichungen ($f(x) \equiv 0$) kann mittels des *Lösungsansatzes*

  $y(x) = e^{\lambda \cdot x}$

  mit frei wählbarem Parameter λ ein Fundamentalsystem von Lösungen und damit die *allgemeine Lösung* bestimmt werden:

  - Das Einsetzen dieses Ansatzes in die homogene Differentialgleichung liefert für λ das *charakteristische Polynom* n-ten Grades

    $P_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0$

  - Damit der Ansatz die homogene Differentialgleichung löst, sind die n Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu bestimmen, d.h. es ist die Polynomgleichung $P_n(\lambda) = 0$ zu lösen.

- Mit den n berechneten Nullstellen des charakteristischen Polynoms lassen sich allgemeine Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten folgendermaßen konstruieren:

  - Der einfachste Fall liegt vor, wenn die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschieden und reell sind. Hier lautet die *allgemeine Lösung* der homogenen Differentialgleichung ($C_1, C_2, \ldots, C_n$ – frei wählbare reelle Konstanten):

    $y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} + C_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot x} + \ldots + C_n \cdot e^{\lambda_n \cdot x}$

    wobei die Lösungsfunktionen $e^{\lambda_1 \cdot x}$, $e^{\lambda_2 \cdot x}$, $e^{\lambda_3 \cdot x}$, ... , $e^{\lambda_n \cdot x}$

    ein *Fundamentalsystem* bilden, wie sich beweisen lässt.

  - Besitzt das charakteristische Polynom eine r-fache reelle Nullstelle λ, so lautet der entsprechende Anteil der allgemeinen Lösung

    $\left(C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + \ldots + C_r \cdot x^{r-1}\right) \cdot e^{\lambda \cdot x}$

    d.h. es werden r linear unabhängige Lösungsfunktionen

    $e^{\lambda \cdot x}$, $x \cdot e^{\lambda \cdot x}$, $x^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$, ... , $x^{r-1} \cdot e^{\lambda \cdot x}$

    für λ erhalten.

  - Besitzt das charakteristische Polynom eine komplexe Nullstelle $a + b \cdot i$, so besitzt es laut Theorie auch die konjugiert komplexe Nullstelle $a - b \cdot i$:

    * Hierfür lassen sich zwei reelle linear unabhängige Lösungsfunktionen

      $\cos(b \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}$, $\sin(b \cdot x) \cdot e^{a \cdot x}$

      der Differentialgleichung konstruieren, so dass der entsprechende Anteil der allgemeinen Lösung folgendermaßen lautet:

      $\left(C_1 \cdot \cos(b \cdot x) + C_2 \cdot \sin(b \cdot x)\right) \cdot e^{a \cdot x}$

- Damit ergibt sich die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

  $$y_s(t) = \frac{A}{a}$$

- Die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differentialgleichung ergibt sich als Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen und einer speziellen Lösung der inhomogenen zu

  $$y(t) = C \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{A}{a}$$

- Mittels der im Abschn.11.4.1 vorgestellten Lösungsformel erhält man ebenfalls die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung

  $$y(t) = \left(C + \int e^{\int a\,dt} \cdot A \; dt \right) \cdot e^{-\int a\,dt} = C \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{A}{a}$$

- Um die Anfangswertaufgabe

  $$y'(t) + a \cdot y(t) = A \qquad y(t_0) = y_0$$

  zu lösen, braucht man nur die Anfangsbedingung in die berechnete allgemeine Lösung einzusetzen:

  $$y(t_0) = C \cdot e^{a \cdot t_0} + \frac{A}{a} = y_0 \qquad \text{ergibt} \qquad C = e^{-a \cdot t_0} \cdot \left(y_0 - \frac{A}{a} \right)$$

  und damit als Lösung der Anfangswertaufgabe $\quad y(t) = \left(y_0 - \frac{A}{a} \right) \cdot e^{a \cdot (t - t_0)} + \frac{A}{a}$

c) Betrachten wir die konkrete inhomogene lineare *Wachstumsdifferentialgleichung* mit konstanten Koeffizienten

$$y'(t) - y(t) = e^t$$

- Hier tritt bei Anwendung von Ansatzmethoden zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung der sogenannte *Resonanzfall* auf, da die Funktion der rechten Seite zugleich Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.
- Hier führt nicht der Ansatz $\quad y_s(t) = k \cdot e^t$

  sondern der Ansatz $\quad y_s(t) = k \cdot t \cdot e^t \quad$ zum Erfolg,

  der das Ergebnis k = 1 liefert, so dass sich die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differentialgleichung in folgender Form schreibt:

  $$y(t) = C \cdot e^t + t \cdot e^t = (C+t) \cdot e^t$$

d) Betrachten wir für das im Beisp.11.3 vorgestellte Differentialgleichungsmodell zweiter Ordnung für Preisfunktionen den konkreten Fall mit variabler rechter Seite

$$p''(t) + p'(t) - 2 \cdot p(t) = a + b \cdot e^{-t}$$

* Treten komplexe Nullstellen mehrfach auf, so ist analog zu mehrfach reellen zu verfahren.

Bemerkung

Die einzige aber nicht unwesentliche Schwierigkeit bei der Berechnung allgemeiner Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten besteht in der Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

- Ab 5. Grad existieren keine Lösungsformeln.
- Da auch Lösungsformeln für 3. und 4. Grad nicht einfach zu handhaben sind, besteht bei ganzzahligen Nullstellen eine Lösungsmöglichkeit darin, eine Nullstelle zu erraten und anschließend den Grad des charakteristischen Polynoms durch Division um eins zu verringern usw. Diese Vorgehensweise benutzt die Faktorisierung von Polynomen und ist bei einfachstrukturierten Polynomen anwendbar (siehe Abschn.6.5.1).
- Zur Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms kann man EXCEL heranziehen, das Funktionen zur Lösung von Gleichungen bereitstellt.

♦

11.5.3 Spezielle Lösungen

Zur Berechnung allgemeiner Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1(x) \cdot y'(x) + a_0(x) \cdot y(x) = f(x)$$

benötigt man eine *spezielle Lösung* $y_s(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung (siehe Abschn.11.5.1):

- Die Bestimmung spezieller Lösungen hängt wesentlich von der Gestalt der Funktion f(x) der rechten Seite der inhomogenen Differentialgleichung ab.
- Der einfachste Fall besteht im Erraten einer speziellen Lösung. Dies wird aber nur bei sehr einfachen rechten Seiten gelingen.
- Es existieren systematische Vorgehensweisen:
  - Wir stellen die *Ansatzmethode* vor, die bei Anwendung auf Aufgaben der Wirtschaftsmathematik häufig erfolgreich ist, wie im Beisp.11.6 illustriert ist:
    * In einer Reihe von Fällen besitzt der Funktionstyp einer speziellen Lösung $y_s(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung die gleiche Gestalt wie die Funktion f(x) der rechten Seite der Differentialgleichung.
    * Deshalb kann ein Ansatz der Form

      $$y_s(x) = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot u_i(x)$$

      mit frei wählbaren Koeffizienten (Parametern) k_i zum Erfolg führen, wobei die Ansatzfunktionen $u_i(x)$ aus den gleichen Funktionsklassen der elementaren mathematischen Funktionen wie die rechte Seite $f(x)$ gewählt werden.

- Bestimmen wir die allgemeine Lösung dieser linearen inhomogenen Differentialgleichung, die sich als Summe aus allgemeiner Lösung der zugehörigen homogenen und spezieller Lösung der inhomogenen Differentialgleichung darstellt:
  - Man benötigt zuerst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

    $$p''(t) + p'(t) - 2 \cdot p(t) = 0$$

    * Dies ist eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, für die das charakteristische Polynom

      $\lambda^2 + \lambda - 2$ die beiden reellen Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$

      besitzt, die man unmittelbar aus der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält.
    * Damit besitzt die homogene Differentialgleichung die allgemeine Lösung

      $$p_a(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2 \cdot t} \qquad (C_1, C_2 \text{ - frei wählbare Konstanten})$$
  - Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhält man mittels des Ansatzes

    $$p_{sp}(t) = k_1 + k_2 \cdot e^{-t} \qquad (k_1, k_2 \text{ - frei wählbare Konstanten})$$

    * Wenn man diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt, ergibt sich Folgendes:

      $$k_2 \cdot e^{-t} - k_2 \cdot e^{-t} - 2 \cdot k_1 - 2 \cdot k_2 \cdot e^{-t} = -2 \cdot k_1 - 2 \cdot k_2 \cdot e^{-t} = a + b \cdot e^{-t}$$
    * Durch Koeffizientenvergleich erhält man hieraus

      $-2 \cdot k_1 = a$ und $-2 \cdot k_2 = b$

      so dass sich folgende spezielle Lösung ergibt: $p_{sp}(t) = -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \cdot e^{-t}$
  - Mit den beiden berechneten Lösungen

    $$p_a(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2 \cdot t} \quad \text{und} \quad p_{sp}(t) = -\frac{a}{2} - \frac{b}{2} \cdot e^{-t}$$

    folgt für die allgemeine Lösung der betrachteten inhomogenen Differentialgleichung

    $$p(t) = p_a(t) + p_{sp}(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot e^{-2 \cdot t} - \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \cdot e^{-t}$$

- Berechnen wir für die gegebene Differentialgleichung mit $a = b = 2$ eine spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen $p(0) = p'(0) = 0$ erfüllt, d.h. lösen wir die Anfangswertaufgabe

  $$p''(t) + p'(t) - 2 \cdot p(t) = 2 + 2 \cdot e^{-t} \quad , \quad p(0) = p'(0) = 0$$

  - Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen in die berechnete allgemeine Lösung erhält man folgendes lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der frei wählbare Konstanten C_1, C_2 :

* Die noch unbekannten Koeffizienten k_i werden durch Koeffizientenvergleich bestimmt, indem man den gewählten Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt.
* Zur Bestimmung der Koeffizienten k_i erhält man ein lineares Gleichungssystem. Wenn dies eine Lösung besitzt, so ist die Ansatzmethode erfolgreich.

- Die Methode der Variation der Konstanten ist eine weitere und allgemein anwendbare Vorgehensweise zur Bestimmung spezieller Lösungen. Sie ist allerdings aufwendiger als die Ansatzmethode, so dass wir auf die Literatur verweisen.

11.6 Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Da die exakte Lösung nur bei hinreichend einfachen (linearen) Differentialgleichungen erfolgreich ist, benötigt man häufig *numerische Lösungsmethoden,* die wir für Differentialgleichungen erster Ordnung vorstellen:

- Ein *Grundprinzip* numerischer Lösungsmethoden für Anfangswertaufgaben

  $$y'(x) \quad = \quad f(x, y(x)) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

  besteht darin, Näherungswerte für die Lösungsfunktion y(x) nur in einer endlichen Anzahl von x-Werten (*Gitterpunkten*) des Lösungsintervalls $[x_0, b]$ zu berechnen:
  - Die Abstände der Gitterpunkte bezeichnet man als *Schrittweiten*. Oft verwendet man gleichabständige Gitterpunkte, d.h. konstante Schrittweiten.
  - Man spricht bei dieser Vorgehensweise von *Diskretisierung* und nennt derartige Methoden *Diskretisierungsmethoden*. Diese nähern Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen an, wie im Folgenden zu sehen ist.
- Bei *Diskretisierungsmethoden* für Anfangswertaufgaben geht man vom bekannten (vorgegebenen) Anfangswert

  $$y(x_0) = y_0$$

  der Lösungsfunktion y(x) aus und konstruiert mit vorgegebenen Schrittweiten h_k näherungsweise weitere Lösungsfunktionswerte (k = 0, 1, 2, ...)

  $y_{k+1} \approx y(x_{k+1})$ in den Gitterpunkten $x_{k+1} = x_k + h_k$

  wobei für *konstante Schrittweiten* $h_k = h$ gilt: $x_{k+1} = x_0 + (k+1) \cdot h$
- Stellen wir zwei bekannte Vertreter von Diskretisierungsmethoden vor:
  - *Euler-Cauchy-Methode* (*Polygonzugmethode*):
    Sie ist eine einfache, schon seit langem bekannte Diskretisierungsmethode und besitzt die *Berechnungsvorschrift* (Rekursionsformel):

    $$y_{k+1} \; = \; y_k + h_k \cdot f(x_k, y_k) \qquad (k = 0, 1, 2, ... \, , \; y_0 \text{ - gegeben})$$

    Man sieht unmittelbar, dass die zu lösende Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung (siehe Kap.10) ersetzt wird:
    * Die Rekursionsformel der Euler-Cauchy-Methode ergibt sich, indem man die Differentialgleichung nur in Gitterpunkten x_k betrachtet, d.h.

      $$y'(x_k) \; = \; f(x_k, y(x_k))$$

      und anschließend eine der folgenden *Vorgehensweisen* anwendet:

$$p(0) = C_1 + C_2 - 2 = 0$$

$$p'(0) = C_1 - 2 \cdot C_2 + 1 = 0$$

- Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, so dass sich folgende Lösung für die Anfangswertaufgabe ergibt: $p(t) = e^t + e^{-2 \cdot t} - 1 - e^{-t}$

Beispiel 11.7:
Erstellen wir zwei VBA-Funktionsprogramme EULER und RK zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung $y'(x) = f(x, y(x))$:

- Wir schreiben die Programme für die im Abschn.11.6 vorgestellten Euler-Cauchy- bzw. Runge-Kutta-Methode.
- Zur Illustration lösen wir mit beiden Programmen die einfache Wachstumsdifferentialgleichung (siehe Beisp.11.5a)

  $y'(t) = y(t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, die die exakte Lösung $y(t) = e^t$ besitzt:
  - Man erkennt bereits an diesem einfachen Beispiel, dass die Runge-Kutta-Methode wesentlich genauere Ergebnisse liefert, wie die abgebildeten Tabellenausschnitte von EXCEL zeigen.
  - Die abgebildeten Tabellenausschnitte sind so gestaltet, dass in
    - ∗ der ersten Spalte die x-Werte aus dem Intervall [0,1] mit Schrittweite 0,1,
    - ∗ der zweiten Spalte die mit den Programmen berechneten Näherungswerte der Lösungsfunktion,
    - ∗ der dritten Spalte die exakten Werte der Lösungsfunktion stehen.
- Beide Funktionsprogramme EULER und RK sind so angelegt, dass sie
  - ausgehend vom Näherungswert y_k nur jeweils den folgenden Näherungswert y_{k+1} der Lösungsfunktion berechnen.
    - ∗ Deshalb sind beide Funktionen in der EXCEL-Tabelle mit relativen x-Bezügen und mit Hilfe des Ausfüllkästchens anzuwenden, wenn man Werte der Lösungsfunktion in einem Intervall benötigt.
    - ∗ Man sieht diese Vorgehensweise in den abgebildeten Tabellenausschnitten.
  - die rechte Seite der Differentialgleichung erster Ordnung als Funktionsprogramm f benötigen:
    - ∗ Es muss im gleichen Modul wie EULER und RK stehen.
    - ∗ Es muss folgende Form haben:

```
Function f (x As Double, y As Double) As Double
' In der folgenden Zuweisung f =...... ist die für die Anwendung der
' Programme EULER und RK benötigte konkrete rechte Seite f (x , y)
'der Differentialgleichung y'(x)=f(x, y) anstatt der Punkte ..... einzugeben.
f = .........
End Function
```

- Man ersetzt die erste Ableitung (Differentialquotient) näherungsweise durch einen *Differenzenquotienten* wie z.B.

  $y'(x_k) \approx \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k}$, so dass die Formel $\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h_k} = f(x_k, y_k)$

  folgt, die durch Auflösung nach y_{k+1} die gegebene Rekursionsformel liefert.
- Geometrische Vorgehensweise:
  Man legt durch einen Punkt (x_k, y_k) der xy-Ebene eine Gerade mit dem durch die Differentialgleichung bestimmten Anstieg und nähert die Lösungsfunktion y(x) in der Umgebung des Punktes durch das Geradenstück

  $y(x) \approx y_k + (x - x_k) \cdot y'(x_k) = y_k + (x - x_k) \cdot f(x_k, y_k)$

  an. Geht man auf dieser Geraden bis zu $x = x_{k+1}$, so ergibt sich ebenfalls die Euler-Cauchy-Berechnungsvorschrift für den nächsten Näherungswert

  $y_{k+1} = y_k + (x_{k+1} - x_k) \cdot f(x_k, y_k) = y_k + h_k \cdot f(x_k, y_k)$

* Da man Lösungsfunktionen aus Geradenstücken zusammensetzt, d.h. durch Polygone annähert, ist für die Euler-Cauchy-Methode auch die Bezeichnung *Polygonzugmethode* gebräuchlich.

* Diese Methode ist aus einer Reihe von Gründen (z.B. Genauigkeit) in ihrer praktischen Anwendbarkeit eingeschränkt, eignet sich aber gut zur Darstellung der Vorgehensweise bei numerischen Lösungsmethoden.

- *Runge-Kutta-Methoden:*
  Da die Euler-Cauchy-Methode eine ziemlich grobe Näherungsmethode ist und eine ungünstige Fehlerfortpflanzung besitzt, stellt die Numerische Mathematik wesentlich effektivere Methoden zur Verfügung:

  * So haben z.B. Runge und Kutta um 1900 eine Methode mit höherer Genauigkeit aufgestellt, die bisher zahlreiche Verbesserungen erfahren hat.

  * Die klassische von Runge und Kutta gegebene Methode besitzt folgende Berechnungsvorschrift (Rekursionsformel):

  $$y_{k+1} = y_k + h_k \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot k_1 + \frac{1}{3} \cdot k_2 + \frac{1}{3} \cdot k_3 + \frac{1}{6} \cdot k_4 \right)$$

  mit

  $$k_1 = f(x_k, y_k)$$

  $$k_2 = f(x_k + h_k/2\,,\; y_k + h_k \cdot k_1/2)$$

  $$k_3 = f(x_k + h_k/2\,,\; y_k + h_k \cdot k_2/2)$$

  $$k_4 = f(x_k + h_k\,,\; y_k + h_k \cdot k_3)$$

  * Man sieht, dass die Idee von Runge-Kutta-Methoden darin besteht, Informationen mehrerer Schritte der Euler-Cauchy-Methode zu kombinieren.

* Für die zur Illustration benutzte konkrete Wachstumsdifferentialgleichung lautet das Funktionsprogramm f folgendermaßen:

Function f (x **As Double,** y **As Double**) **As Double**
f = y
End Function

a) Eine Programmvariante für die Euler-Cauchy-Methode

$$y_{k+1} = y_k + h_k \cdot f(x_k, y_k)$$

kann folgende Form haben:

Function EULER (xk **As Double** , yk **As Double** , hk **As Double**) **As Double**
' Anwendung der Euler-Cauchy-Methode
EULER = yk + hk* f (xk , yk)
End Function

Die Ergebnisse der vom Programm EULER berechneten Differentialgleichung sind im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen:

Z3S2 | =EULER(ZS(-1);Z(-1)S;0,1)

	1	2	3	4	5
1	xk	yk	exakte Lösung		
2	0	1	1		
3	0,1	1,1	1,10517092		
4	0,2	1,21	1,22140276		
5	0,3	1,331	1,34985881		
6	0,4	1,4641	1,4918247		
7	0,5	1,61051	1,64872127		
8	0,6	1,771561	1,8221188		
9	0,7	1,9487171	2,01375271		
10	0,8	2,14358881	2,22554093		
11	0,9	2,35794769	2,45960311		
12	1	2,59374246	2,71828183		

b) Eine Programmvariante für die Runge-Kutta-Methode (k = 0 , 1 , 2 , ...)

$$y_{k+1} = y_k + h_k \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot k_1 + \frac{1}{3} \cdot k_2 + \frac{1}{3} \cdot k_3 + \frac{1}{6} \cdot k_4 \right) \quad \text{mit}$$

$$k_1 = f(x_k, y_k) \qquad k_2 = f(x_k + h_k/2 \,,\; y_k + h_k \cdot k_1/2)$$

$$k_3 = f(x_k + h_k/2 \,,\; y_k + h_k \cdot k_2/2) \qquad k_4 = f(x_k + h_k \,,\, y_k + h_k \cdot k_3)$$

kann folgende Form haben:

* Bei Runge-Kutta-Methoden sind im Unterschied zur Euler-Cauchy-Methode pro Schritt mehrere Funktionswertberechnungen notwendig, d.h. sie sind aufwendiger, erzielen dafür aber bessere Näherungen.

Bemerkung

Wir haben nur die numerische Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung betrachtet. Die vorgestellten Methoden lassen sich auch auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung anwenden und damit auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung, da sich diese auf Differentialgleichungssysteme zurückführen lassen.

♦

11.7 Einsatz von EXCEL

EXCEL stellt zur Lösung von Differentialgleichungen keine Funktionen zur Verfügung:

- Wer die exakte Lösung einer Differentialgleichung benötigt, d.h. den analytischen Funktionsausdruck der Lösungsfunktion, kann bei linearen Differentialgleichungen die gegebenen Lösungsmethoden versuchen oder ein Computeralgebraprogramm wie MATHEMATICA oder MAPLE heranziehen. Man darf hier jedoch keine Wunder erwarten, da die Theorie keine allgemein anwendbaren Lösungsalgorithmen liefert.
- Wenn die exakte Berechnung der Lösung einer vorliegenden Differentialgleichung nicht in einem vertretbaren Aufwand möglich oder von vornherein unmöglich ist, lassen sich zahlreiche numerische Methoden (Näherungsmethoden) heranziehen, die sehr effektiv sind. Im Abschn.11.6 haben wir diese Problematik vorgestellt.
- EXCEL lässt sich zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen heranziehen, indem man VBA-Programme für numerische Methoden schreibt.
  Wir geben hierfür zwei einfache Illustrationen, indem wir im Beisp.11.7 für die im Abschn.11.6 vorgestellten Euler-Cauchy-Methode und Runge-Kutta-Methode jeweils ein VBA-Programm schreiben.

```
Function RK (xk As Double , yk As Double , hk As Double) As Double
' Anwendung der Runge-Kutta-Methode
k1 = f(xk,yk)
k2 = f(xk+hk/2,yk+hk*k1/2)
k3 = f(xk+hk/2,yk+hk*k2/2)
k4 = f(xk+hk,yk+hk*k3)
RK = yk+hk*(k1/6+k2/3+k3/3+k4/6)
End Function
```

Die Ergebnisse der vom Programm RK berechneten Differentialgleichung sind im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen:

Z3S2 =RK(ZS(-1);Z(-1)S;0,1)

	1	2	3	4
1	xk	yk	exakte Lösung	
2	0	1	1	
3	0,1	1,10517083	1,10517092	
4	0,2	1,22140257	1,22140276	
5	0,3	1,3498585	1,34985881	
6	0,4	1,49182424	1,4918247	
7	0,5	1,64872064	1,64872127	
8	0,6	1,82211796	1,8221188	
9	0,7	2,01375163	2,01375271	
10	0,8	2,22553956	2,22554093	
11	0,9	2,45960141	2,45960311	
12	1	2,71827974	2,71828183	

12 Optimierung

12.1 Einführung

Das Gebiet der Optimierung ist sehr umfangreich:

- Wir geben im Folgenden einen Einblick, der die Problematik veranschaulicht und für den Einsatz von EXCEL ausreicht.
- Ausführlichere Informationen erhält man aus der umfangreichen Literatur, von der wir im Literaturverzeichnis eine Auswahl angeben.
- Im täglichen Sprachgebrauch treten Begriffe aus der Optimierung wie *minimal*, *maximal*, *optimal*, *Minimum*, *Maximum* und *Optimum* häufig auf, ohne dass Gedanken über ihre exakte Bedeutung angestellt werden:
  - Man verwendet diese Begriffe, wenn es sich um kleinste bzw. größte Werte handelt.
  - In Reden und Zeitungsartikeln findet man öfters Steigerungen der Worte minimal, maximal und optimal, die jedoch keinen Sinn ergeben.
- Die Optimierung gewinnt zunehmend an Bedeutung:
  - In zahlreichen Gebieten von Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften sind maximale Ergebnisse und minimaler Aufwand gesucht.
  - Die Anwendung in der Wirtschaft ist besonders hervorzuheben, da ökonomisches Streben darin besteht, *maximale Gewinne* und *minimale Kosten* zu erreichen.
- Das Gebiet der Mathematik, das sich mit Aufgaben der Optimierung (*Optimierungsaufgaben*) beschäftigt, heißt *mathematische Optimierung* oder kurz *Optimierung*. Hier wird Folgendes bereitgestellt:
  - Exakte Definitionen der Begriffe minimal, maximal, optimal, Minimum, Maximum und Optimum,
  - Mathematische Modelle für praktische Optimierungsaufgaben,
  - Optimalitätsbedingungen,
  - Exakte und numerische Lösungsmethoden.

12.2 Grundlagen

Aufgaben der *Optimierung* (Minimierungs- bzw. Maximierungsaufgaben) sind folgendermaßen *charakterisiert:*

- Für ein gegebenes Kriterium (wie z.B. Kostenfunktion, Gewinnfunktion, Nutzenfunktion) ist ein kleinster (minimaler) bzw. größter (maximaler) Werte zu bestimmen, so dass man von einem *Optimierungskriterium* spricht.
- In den meisten Fällen liegen *Beschränkungen* vor, die einzuhalten sind.

Beispiel 12.1:
Illustrieren wir die grundlegenden Begriffe *lokales* bzw. *globales Minimum* und *Maximum*, indem wir die Funktion (Polynomfunktion)

$$f(x) = x^4 - \frac{8}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x$$

über dem abgeschlossenen Intervall [–2,3] betrachten:

a) *Grafische Darstellung* der Funktion:

Abb.12.1 lässt folgende Minima und Maxima der Funktion $f(x)$ im Intervall [–2,3] erkennen:

- In $x = -1$: lokales Minimum, das gleichzeitig globales Minimum ist
- In $x = 1$: lokales Maximum
- In $x = 2$: lokales Minimum
- In $x = 3$: globales Maximum im Intervall [-2,3]

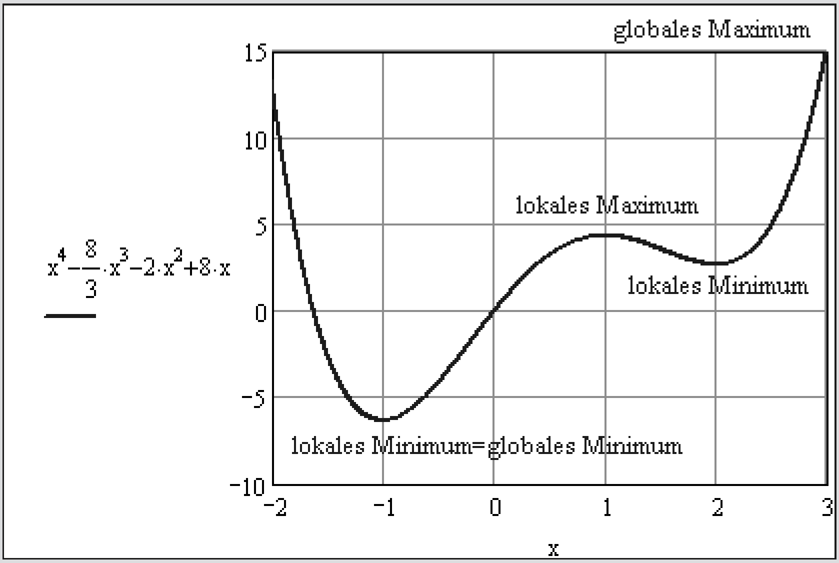


Abb.12.1. Grafische Darstellung von Minima und Maxima der Funktion aus Beisp.12.1

b) Anwendung der notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingung:

- Die *notwendige Optimalitätsbedingung* liefert durch Nullsetzen der ersten Ableitung der Funktion $f(x)$ folgende Gleichung (Polynomgleichung) zur Bestimmung *stationärer Punkt*e:

  $$f'(x) = 4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 8 = 4 \cdot (x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 2) = 0$$

  Ohne die Lösungsformel für Polynomgleichungen dritten Grade zu benutzen, kann man hier eine Nullstelle erraten, so z.B. x = 1. Danach dividiert man die Polynomgleichungen durch x–1 und erhält

  $$x^2 - x - 2 = 0$$

In diesem Kapitel betrachten wir Aufgaben der mathematischen *Optimierung*, die hauptsächlich in Modellen der Wirtschaft vorkommen und folgende allgemeine *Struktur* besitzen:

- Gegebene *Optimierungskriterien* werden durch mathematische Funktionen
  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$
  von n Variablen beschrieben, die man als *Zielfunktionen* bezeichnet, wobei man die Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ zur Vereinfachung als Komponenten eines Zeilenvektors $\mathbf{x}$ darstellt, d.h. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
- Zielfunktionen sind bzgl. der Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ zu *minimieren* oder *maximieren:*
  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Minimum/Maximum}}$
  Es sind folglich kleinste Werte (*Minima*) oder größte Werte (*Maxima*) von Funktionen zu berechnen.
- Für die Variablen können *Beschränkungen* (Nebenbedingungen) vorliegen, die in Form von *Gleichungen* (Gleichungsnebenbedingungen)
  $g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$
  bzw. *Ungleichungen* (Ungleichungsnebenbedingungen) (i = 1, 2, ... , m)
  $g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$
  gegeben sind:
  - In der mathematischen Optimierung bezeichnet man vorliegende Beschränkungen als Nebenbedingungen und spricht von *Optimierungsaufgaben ohne* bzw. *mit Nebenbedingungen*. Weiterhin werden die Bezeichnungen *unrestringierte* bzw. *restringierte Optimierungsaufgaben* verwendet.
  - Wenn Nebenbedingungen in Gleichungsform bzw. Ungleichungsform vorliegen, spricht man von *Gleichungs-* bzw. *Ungleichungsnebenbedingungen.*
  - Den durch Nebenbedingungen für die Variablen bestimmten Bereich B bezeichnet man als *zulässigen Bereich,* der leer, beschränkt oder unbeschränkt sein kann.
- Je nach Art der Zielfunktion und Nebenbedingungen ergeben sich verschiedene Aufgaben der mathematischen Optimierung:
  - *Extremwertaufgaben* (siehe Abschn.12.4)
    Für beliebige Zielfunktionen können höchstens Gleichungsnebenbedingungen auftreten.
  - *Lineare Optimierungsaufgaben* (siehe Abschn.12.5)
    Hier sind Zielfunktion und alle Funktionen der Nebenbedingungen linear und es liegen Ungleichungsnebenbedingungen vor, so dass ein Sonderfall der nichtlinearen Optimierung gegeben ist.

d.h. eine quadratische Gleichung, deren Lösungen $x = -1$ und $x = 2$ sich durch Anwendung der Lösungsformel (siehe Abschn.6.5) berechnen.

- Damit besitzt die betrachtete Polynomfunktion drei stationäre Punkte $x = -1$, 1 und 2, die mittels *hinreichender Optimalitätsbedingung* zu klassifizieren sind:
  - Die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$, d.h. $f''(x) = 12 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 4$ liefert folgendes für die berechneten stationären Punkte:
    * $f''(-1) = 24 > 0$, d.h. $x = -1$ ist ein *lokaler Minimalpunkt*
    * $f''(1) = -8 < 0$, d.h. $x = 1$ ist ein *lokaler Maximalpunkt*
    * $f''(2) = 12 > 0$, d.h. $x = 2$ ist ein *lokaler Minimalpunkt*
  - Damit sind die aus der grafischen Darstellung erhaltenen Ergebnisse bewiesen, dass alle stationären Punkte ein lokales Minimum bzw. Maximum realisieren.
- Bei Funktionen $f(x)$ einer Variablen lässt sich die Aufgabe relativ einfach lösen, das *globale Minimum* bzw. *globale Maximum* über einem abgeschlossenen Intervall wie z.B. $[-2,3]$ zu berechnen:
  - Man bestimmt unter allen lokalen Minima bzw. Maxima des Intervalls das kleinste bzw. größte und vergleicht diese mit den Werten der Funktion in den beiden Randpunkten -2 und 3 des Intervalls.
  - So erhält man für die betrachtete Polynomfunktion, dass das
    * lokale Minimum $x = -1$ auch gleichzeitig *globales Minimum* ist.
    * *globale Maximum* am rechten Rand des Intervalls $x = 3$ angenommen wird.

Beispiel 12.2:

Betrachten wir mathematische Modelle für *Extremwertaufgaben*, die bereits Einsatzmöglichkeiten in der Wirtschaft erkennen lassen:

a) *Maximierung* des *Gewinns:*

Bei der Produktion von Waren kann folgende Extremwertaufgabe auftreten:

- *Gewinnfunktionen* G(x) für die Produktion der Menge x einer Ware werden als Differenz aus Erlös $E(x) = p \cdot x$ und Kosten (Produktionskosten) K(x) gebildet (siehe Beisp.7.1f), d.h. es gilt $G(x) = E(x) - K(x)$.
- Wenn eine Firma den *Gewinn maximieren* möchte, ergibt sich die *Extremwertaufgabe* ohne Nebenbedingungen

  $$G(x) = E(x) - K(x) = p \cdot x - K(x) \rightarrow \underset{x}{\text{Maximum}}$$

  in der p den Preis einer Mengeneinheit (ME) der Ware darstellt:
  - Diese Extremwertaufgabe bildet kein realistisches Modell, da in den meisten Fällen die Menge x beschränkt ist, da x nur Werte aus einem Intervall [a,b] mit $0<a<b$ annehmen kann.
  - Deshalb kommt die *Nebenbedingung* $x \in [a,b]$ hinzu, so dass das globale Maximum der Gewinnfunktion über einem Intervall [a,b] zu bestimmen ist. Die Vorgehensweise zur Lösung derartiger Aufgaben wird im Beisp.12.1b illustriert.

- *Nichtlineare Optimierungsaufgaben* (siehe Abschn.12.6)
  Hier sind Zielfunktion oder mindestens eine Funktion der Nebenbedingungen nichtlinear, wobei Ungleichungsnebenbedingungen vorliegen.
- Aufgaben der *ganzzahligen* (diskreten) *Optimierung* (siehe Abschn.12.7)
  Wenn die Variablen bei nichtlinearen Optimierungsaufgaben nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen, spricht man von ganzzahliger oder diskreter Optimierung.
- Aufgaben der *Vektoroptimierung* (siehe Abschn.12.8)
  Hier sind mehrere Zielfunktionen gegeben und man unterscheidet wie bei einer Zielfunktion zwischen linearer und nichtlinearer Vektoroptimierung.

12.2.1 Minimum und Maximum

Betrachten wir die Begriffe *Minimum* und *Maximum* für eine Funktion

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

von n Variablen:

- Anschaulich versteht man hierunter *kleinste* bzw. *größte Werte* dieser Funktion über ihrem Definitionsbereich oder einem durch Nebenbedingungen vorgegebenen beschränkten (offenen oder abgeschlossenen) Bereich B, der als *zulässiger Bereich* bezeichnet wird.
- In der *mathematischen Optimierung* muss die anschauliche Deutung von Minimum und Maximum exakt definiert werden, wie in folgender Definition zu sehen ist, in der wir den mathematischen Begriff der ε-Umgebung eines Punktes x als bekannt voraussetzen.

Definition 12.1:
Man unterscheidet zwischen einem *lokalen* (relativen) und *globalen* (absoluten) *Minimum* bzw. *Maximum* einer Funktion $f(\mathbf{x})$ über einem (offenen oder abgeschlossenen) zulässigen Bereich B des n-dimensionalen Euklidischen Raumes R^n, die folgendermaßen definiert sind.

Eine Funktion $f(\mathbf{x})$ nimmt in einem im zulässigen Bereich B gelegenen Punkt $\mathbf{x}^0$

- ein *lokales Minimum* bzw. *Maximum* an, wenn
  - $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$ (*lokales Minimum* - $\mathbf{x}^0$ lokaler Minimalpunkt)
  - $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$ (*lokales Maximum* - $\mathbf{x}^0$ lokaler Maximalpunkt)

  für alle Punkte $\mathbf{x}$ in einer im zulässigen Bereich B gelegenen (hinreichend kleinen) *ε-Umgebung* $U_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ des Punktes $\mathbf{x}^0$ gilt.
- ein *globales Minimum* bzw. *Maximum* an, wenn die gleichen Relationen wie im lokalen Fall jetzt für alle Punkte $\mathbf{x}$ aus dem gesamten zulässigen Bereich B gelten. Man bezeichnet in diesem Fall $\mathbf{x}^0$ als globalen Minimal- bzw. Maximalpunkt.

  ♦

b) *Minimierung* der *Lagerkosten:*
Wenn Firmen ihre Lagerkosten für hergestellte Produkte minimieren möchten, entstehen *Extremwertaufgaben* bzgl. der *Lagerkostenfunktionen:*

- Bei einem hergestellten Produkt ergibt sich die Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen (a>0, b>0, c>0):

$$f(x) = a \cdot x + \frac{b}{x} + c \rightarrow \underset{x}{\text{Minimum}}$$

  * $f(x)$ beschreibt die Lagerkosten für den *Lagerbestand* x eines Produkts (siehe Beisp.7.1h).
  * Die Positivitätsbedingung (>0) für x wird weggelassen.

- Bei zwei hergestellten Produkten ergibt sich die Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen (a>0, b>0, c>0, d>0, e>0):

$$f(x_1, x_2) = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + \frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_2} + e \rightarrow \underset{x_1, x_2}{\text{Minimum}}$$

  * $f(x_1, x_2)$ beschreibt Lagerkosten für die *Lagerbestände* x_1 und x_2 von zwei Produkten (siehe Beisp.7.1h).
  * Die Positivitätsbedingungen (>0) für x_1 und x_2 werden weggelassen.
  * Diese Aufgabe lösen wir unter Anwendung der notwendigen Optimalitätsbedingung im Beisp.12.7b.

- Ebenso wie im Beisp.12.2a kann bei praktischen Aufgaben der Lagerhaltung noch die Beschränkung (Nebenbedingung) hinzukommen, dass es für den Bestand eines jeden Produkts eine untere und obere Schranke gibt, so dass eine nichtlineare Optimierungsaufgabe entsteht.

c) *Maximierung* des *Nutzens:*
Betrachten wir die Nutzenmaximierung beim Verbrauch von Gütern:

- Der durch *ökonomische Nutzenfunktionen* $N(x_1, x_2, ..., x_n)$
  beschriebene *Nutzen* beim Verbrauch der Mengen $x_1, x_2, ..., x_n$
  von n gegebenen Gütern $G_1, G_2, ..., G_n$
  soll *maximiert* werden.
- Es wird vorausgesetzt, dass der Verbrauch durch vorhandene Haushaltsmittel (Geldmittel) h>0 beschränkt ist, die vollständig auszugeben sind. Deshalb ist zusätzlich die Gleichung (Gleichungsnebenbedingung)

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n = h$$

  zu erfüllen, in der die konstanten Koeffizienten $p_1, p_2, ..., p_n$ (>0) die Preise der einzelnen Güter bezeichnen.
- Damit ist die *Extremwertaufgabe* (siehe auch Beisp.12.4c)

$$N(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, ..., x_n}{\text{Maximum}}$$

Bemerkung

Minimum und *Maximum* lassen sich in der mathematischen Optimierung folgendermaßen *charakterisieren:*

- Man unterscheidet zwischen *lokalen* und *globalen Minima* bzw. *Maxima* einer Funktion über einem gegebenen (zulässigen) Bereich B, die man sich wie folgt veranschaulichen kann (siehe auch Beisp.12.1):
    - *Lokale Minima* und *Maxima* müssen nur in einer hinreichend kleinen in B gelegenen Umgebung eines Punktes kleinste bzw. größte Werte der Funktion realisieren, so dass hiervon mehrere auftreten können.
    - *Globale Minima* und *Maxima* realisieren im gesamten Bereich B den absolut kleinsten bzw. größten Wert der Funktion, so dass hierfür jeweils nur ein Minimal- bzw. Maximalwert der Funktion auftritt.
- Bei *praktischen Anwendungen* sind meistens globale Minima bzw. Maxima zu bestimmen, da man im gesamten zulässigen Bereich B den absolut kleinsten bzw. größten Wert der Funktion sucht.
- Man spricht von *optimieren* oder *Optimierung* bzw. der Bestimmung einer *optimalen Lösung* (eines *Optimums*), wenn nur der Sachverhalt ausgedrückt und nicht zwischen Minimierung und Maximierung unterschieden wird.
- Punkte $\mathbf{x}^0$, in denen Funktionen $f(\mathbf{x})$ ein Minimum oder Maximum annimmt, heißen *Minimal-* bzw. *Maximalpunkte* oder allgemein *Optimalpunkte*.

♦

12.2.2 Optimalitätsbedingungen

Die mathematische Optimierung stellt Bedingungen zur Charakterisierung optimaler Lösungen (Minima und Maxima) zur Verfügung:

- Wie in allen Gebieten der Mathematik unterscheidet man zwischen notwendigen und hinreichenden, die in der Optimierung als *notwendige* bzw. *hinreichende Optimalitätsbedingungen* bezeichnet werden.
- Optimalitätsbedingungen lassen sich nur für einfache Optimierungsaufgaben zur Berechnung von Minima oder Maxima heranziehen, da die von ihnen gelieferten Gleichungen bzw. Ungleichungen in den meisten Fällen nichtlinear sind.

Wir illustrieren die Problematik von Optimalitätsbedingungen im Rahmen von Extremwertaufgaben im Abschn.12.4.

12.2.3 Lösungsmethoden

Die *Lösung* praktischer *Optimierungsaufgaben* vollzieht sich in *zwei Schritten:*

- Zuerst muss ein *mathematisches Modell* (Optimierungsmodell) aufgestellt werden. Dies ist Aufgabe von Spezialisten der betreffenden Fachgebiete, die mit der Gleichungsnebenbedingung $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n = h$

zu lösen, wenn man Nicht-Negativitätsbedingungen ($x_i \geq 0$) für die Variablen weglässt.

- Betrachten wir eine *konkrete Nutzenfunktion* (siehe Beisp.7.1i):
  - Als Nutzenfunktion trete eine *Cobb-Douglas-Funktion* mit zwei Variablen auf, d.h. es werden nur zwei Güter mit den Mengenbezeichnungen x_1 und x_2 zugelassen und die zugehörigen Preise mit p_1 und p_2 bezeichnet.
  - Dafür lautet die *Extremwertaufgabe:*

    $$a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \to \underset{x_1, x_2}{\text{Maximum}} \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0,\ p_1>0,\ p_2>0,\ h>0)$$

    mit der *Gleichungsnebenbedingung* $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = h$

d) *Minimierung* der *Kosten:*

Betrachten wir die Kostenminimierung bei der Produktion von Waren:

- Zur Herstellung der Menge a (>0) einer *Ware* benötigt eine Firma drei *Rohstoffe* mit den Mengen x_1, x_2, x_3 (>0), wobei der Zusammenhang durch

  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = a$ gegeben sei.
- Die Kosten pro Mengeneinheit ME für die drei Rohstoffe betragen b, c bzw. d, so dass sich die gesamten Kosten K bei Anwendung linearer Kostenfunktionen in der Form (siehe Beisp.7.1e)

  $K(x_1, x_2, x_3) = b \cdot x_1 + c \cdot x_2 + d \cdot x_3$ ergeben.
- Da die *Kosten* K für den Kauf der Rohstoffe *minimal* sein sollen, ergibt sich die *Extremwertaufgabe* (a>0, b>0, c>0, d>0)

  $$K(x_1, x_2, x_3) = b \cdot x_1 + c \cdot x_2 + d \cdot x_3 \to \underset{x_1, x_2, x_3}{\text{Minimum}}$$

  mit der *Gleichungsnebenbedingung* $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = a$

  wenn man Positivitätsbedingungen (>0) für x_1, x_2, x_3 weglässt.

e) *Maximales Ergebnis:*

Betrachten wir eine Aufgabe zum Erreichen eines maximalen Volumens:

- Aus vorhandenen quadratischen Pappscheiben der Seitenlänge a>0 sollen Kartons ohne Deckel hergestellt werden, indem man an den vier Ecken der Pappscheiben jeweils ein Quadrat mit frei wählbarer Seitenlänge x herausschneidet und anschließend den Karton faltet.
- Die entstehenden Kartons haben die Höhe x und quadratische Grundfläche (Seitenlänge $a - 2 \cdot x$).
- Das Volumen V dieser Kartons ist von x abhängig und berechnet sich offensichtlich aus Grundfläche×Höhe zu

  $$V = V(x) = (a - 2 \cdot x)^2 \cdot x$$

- Variablen und Zielfunktionen festlegen,
- Gleichungen und Ungleichungen der Nebenbedingungen aufstellen.

Im Rahmen des Buches werden konkrete Optimierungsmodelle für einfache praktische Aufgabenstellungen gegeben.

- Wenn ein Optimierungsmodell vorliegt, tritt die mathematische Optimierung in Aktion, um Lösungen zu charakterisieren und zu bestimmen.
  Die zur Verfügung gestellten *Lösungsmethoden* teilen sich in *drei Klassen* auf:

  I. Man bestimmt *Lösungen* der Gleichungen bzw. Ungleichungen der notwendigen *Optimalitätsbedingungen,*
     - Wir illustrieren diese Vorgehensweise im Abschn.12.4 an Extremwertaufgaben.
     - Bei praktischen Aufgabenstellungen ist diese Vorgehensweise nur für Sonderfälle anwendbar, da Gleichungen bzw. Ungleichungen der Optimalitätsbedingungen meistens nichtlinear sind, so dass kein endlicher Lösungsalgorithmus existiert.
     - Eine numerische Lösung der Gleichungen bzw. Ungleichungen der Optimalitätsbedingungen ist nicht immer effektiv, kann aber bei Sonderfällen wie quadratischen Optimierungsaufgaben erfolgreich eingesetzt werden. Diese Methoden werden als *indirekte Methoden* bezeichnet.

  II. Man berechnet *Näherungslösungen* mittels *numerischer Methoden* (Näherungsmethoden), ohne Optimalitätsbedingungen heranzuziehen. Derartige Methoden werden als *direkte Methoden* bezeichnet:
     - Direkte numerische Methoden bilden die hauptsächliche Lösungsmöglichkeit für praktische Optimierungsaufgaben:
       * Es gibt zahlreiche unterschiedliche Methoden, die jedoch nicht nur Vorteile sondern auch Nachteile besitzen.
       * Wir können nicht näher auf diese vielschichtige Problematik eingehen und verweisen auf die Literatur.
     - Numerische Methoden sind nur mittels Computer realisierbar:
       * Es existieren zahlreiche Computerprogramme zur Optimierung, die von Spezialisten erstellt werden und i.Allg. wesentlich wirkungsvoller arbeiten als selbst geschriebene Programme.
         Deshalb steht für Anwender der Einsatz effektiver Programme im Vordergrund und nicht das Studium numerischer Methoden.
       * Wir illustrieren am Beispiel des SOLVERS von EXCEL, wie man ohne tieferes Wissen über numerische Methoden zahlreiche Extremwertaufgaben und Aufgaben der linearen und nichtlinearen Optimierung numerisch lösen kann (siehe Abschn.12.9 und Beisp.12.16.).

  III. Die *grafische Lösung* kann bei einfachen Aufgaben (mit maximal drei unabhängigen Variablen) angewandt werden:

- Die Aufgabe besteht darin, x so zu wählen, dass hergestellte Kartons *maximales Volumen* besitzen, d.h. es ist folgende *Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen* zu lösen:

  $$V(x) = (a - 2\cdot x)^2 \cdot x \quad \to \underset{x}{\text{Maximum}}$$

- Man sieht sofort, dass bei dieser Aufgabenstellung x nur Werte aus dem Intervall [0,a/2] annehmen kann, da sonst kein Volumen ≥0 möglich ist.
- Die Lösung dieser Aufgabe findet man im Beisp.12.7a.

f) *Materialeinsparung*:
Betrachten wir eine Aufgabe zur Materialeinsparung:

- Zylindrische Konservendosen aus Blech mit Deckel und einem vorgegebenen Inhalt (Volumen) von 1000 cm^3 sollen produziert werden, wofür ein minimaler Materialverbrauch gefordert wird.
- Damit ist die *Zielfunktion* der Extremwertaufgabe durch die Oberfläche O der zylindrischen Konservendosen gegeben, die sich aus
  - zwei Kreisflächen (Boden + Deckel) mit Radius r,
  - einer Mantelfläche mit Höhe h

  zusammensetzt, so dass sie eine Funktion von Radius r>0 und Höhe h>0 ist und sich folgendermaßen ergibt: $O = O(r,h) = 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$
- Da die Oberfläche $O(r,h)$ aufgrund von Materialeinsparung minimal sein soll, ist sie bzgl. der Variablen r und h zu minimieren, d.h.

  $$O(r,h) = 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot h \quad \to \underset{r\,,\,h}{\text{Minimum}}$$

- Es besteht die Beschränkung, $V(r,h) = 1000 \ cm^3$ für das Volumen, so dass zusätzlich die *Gleichungsnebenbedingung* $V(r,h) = \pi\cdot r^2\cdot h = 1000$ zu erfüllen ist.
- Somit liegt eine *Extremwertaufgabe* mit einer *Gleichungsnebenbedingung* vor, wenn man von den Positivitätsbedingungen (>) für die Variablen r und h absieht. Diese Aufgabe wird im Beisp.12.8 gelöst.

Beispiel 12.3:
Stellen wir mathematische Modelle für *lineare Optimierungsaufgaben* vor, die bereits ihre große Bedeutung in der Wirtschaft erkennen lassen:

a) *Gewinnmaximierung* in einer Firma:

- Eine Firma stellt n *Produkte* $P_1 , P_2 , ... , P_n$
  mit folgenden *Mengen* (in ME) her: $x_1 , x_2 , ... , x_n$
- Die Produktion geschieht mit Hilfe von m *Produktionsfaktoren* (Arbeit, Maschinen, Energie, Rohstoffe usw.) $F_1 , F_2 , ... , F_m$
  die mit Mengeneinheiten (ME) $b_1 , b_2 , ... , b_m$

- Wir werden sie für lineare Optimierungsaufgaben kennenlernen (siehe Abschn. 12.5.3).
- Sie hat nur illustrativen Charakter und spielt bei praktischen Aufgaben keine Rolle.

12.3 Anwendungen in der Wirtschaft

In *mathematischen Modellen* der Wirtschaft spielen *Optimierungsaufgaben* eine fundamentale Rolle:

- Optimierung ist durch *Hauptziele* ökonomischer Untersuchungen begründet:
  - Man möchte *optimal wirtschaften,* d.h. nach einer *optimalen Strategie*.
  - Man möchte *maximale Ergebnisse* und *minimalen Aufwand* erzielen.
  - Konkrete Ziele der Wirtschaft sind *Maximierung* des *Gewinns* bzw. *Minimierung* der *Kosten* (z.B. Lagerhaltungs-, Lohn-, Rohstoff-, Energiekosten).
- Bereits Extremwertaufgaben als klassische (seit langem bekannte) Optimierungsaufgaben besitzen eine Reihe von Anwendungen in der Wirtschaft, wie im Beisp.12.2 zu sehen ist.
- Einen breiteren Anwendungsbereich besitzen *lineare* und *nichtlineare Optimierungsaufgaben* (siehe Beisp.12.3, 12.4 und Abschn.12.5 und 12.6), da bei ökonomischen Modellen meistens Ungleichungen als Beschränkungen (Nebenbedingungen) gegeben und globale (absolute) Minima und Maxima gesucht sind.
  - Die *lineare Optimierung* als Sonderfall der nichtlinearen Optimierung spielt die dominierende Rolle:
    * Viele ökonomische Optimierungsaufgaben lassen sich mathematisch durch lineare Zielfunktionen und lineare Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen hinreichend gut modellieren.
    * Für lineare Optimierungsaufgaben existieren effektive Lösungsmethoden.
    * Aufgaben der linearen ganzzahligen Optimierung und linearen Vektoroptimierung als moderne Gebiete der linearen Optimierung gewinnen ständig an Bedeutung (siehe Abschn.12.7 und 12.8).
  - In den Beisp.12.2-12.6 betrachten wir eine Reihe ökonomischer Anwendungsaufgaben, die bereits die fundamentale Bedeutung der Optimierung in der Wirtschaft erkennen lassen.

12.4 Extremwertaufgaben

12.4.1 Grundlagen

Unter *Extremwertaufgaben* (*Extremalaufgaben*) versteht man Aufgaben zur Bestimmung *lokaler Minima* und *Maxima* einer Funktion (*Zielfunktion*)
$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ von n Variablen:

pro betrachteter Produktionsperiode verfügbar sind und für die *Reingewinne* in Geldeinheiten (GE) g_1 , g_2 , ... , g_n je Stück erzielt werden.

- Die Aufgabe der *Gewinnmaximierung* besteht darin, den Gewinn zu maximieren: Mathematisch bedeutet dies, die *Gewinnfunktion* zu *maximieren,* d.h.

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2 + \ldots + g_n \cdot x_n \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Maximum}}$$

wenn man lineare Gewinnfunktionen voraussetzt, d.h. die g_i konstant sind und nicht von **x** abhängen.

- Wenn für einzelne Produkte P_i (i = 1, 2, ... , n) die
  - Herstellungskosten c_i
  - Verkaufspreise (Erlöse) p_i

  bekannt sind, so gilt für die *Reingewinne* $g_i = p_i - c_i$.
  In diesem Fall ist folgende lineare *Gewinnfunktion* zu *maximieren* :

$$(p_1 - c_1) \cdot x_1 + (p_2 - c_2) \cdot x_2 + \ldots + (p_n - c_n) \cdot x_n \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Maximum}}$$

- Beschränkungen (*Nebenbedingungen*) für die Gewinnmaximierung ergeben sich folgendermaßen:

	P_1	P_2	$\ldots$	P_n
F_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
F_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_m	a_{m1}	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}

  - Für die Erzeugung je einer Einheit der n Produkte P_i werden in obiger Tabelle gegebene Mengen von Produktionsfaktoren F_i benötigt.
  - Aus der Tabelle erhält man unter Verwendung verfügbarer Mengen an Produktionsfaktoren die Nebenbedingungen in Form des folgenden linearen *Ungleichungssystems:*

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &\le b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &\le b_2 \\ &\vdots \qquad\qquad x_i \ge 0 \quad , \quad i=1, \ldots, n \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &\le b_m \end{aligned}$$

b) *Kostenminimierung* in einer Firma:

- Aus n *Rohstoffen* R_1 , R_2 , ... , R_n
  - mit Mengenbeschränkungen (in ME) b_1 , b_2 , ... , b_n
  - und *Preisen* (je ME) p_1 , p_2 , ... , p_n

- Es können zusätzlich *Nebenbedingungen* in Form von *Gleichungen* auftreten, die man als *Gleichungsnebenbedingungen* bezeichnet, so dass man von Extremwertaufgaben ohne *Nebenbedingungen* bzw. mit *Gleichungsnebenbedingungen* spricht.
- Bei Extremwertaufgaben bezeichnet man Minimum bzw. Maximum meistens nicht als optimale Lösung oder Optimum sondern als *extremale Lösung* oder *Extremum* oder *Extremwert*.
- Extremwertaufgaben zählen zu den ersten mathematisch untersuchten Optimierungsaufgaben. Bereits in den Anfängen der Differentialrechnung stellte man Optimalitätsbedingungen auf und löste hiermit eine Reihe von Aufgaben.
- Extremwertaufgaben spielen in praktischen ökonomischen Anwendungen nicht die dominierende Rolle, da hier meistens Ungleichungsnebenbedingungen vorliegen:
  - Die einfachsten Ungleichungsnebenbedingungen sind *Nicht-Negativitätsbedingungen* für die Variablen:
    Da die Variablen x_i bei den meisten ökonomischen Aufgaben keine *negativen Werte* annehmen dürfen, muss $x_i \geq 0$ gefordert werden.
  - Wenn nur Nicht-Negativitätsbedingungen vorliegen, lässt man diese oft weg, um Theorie und Lösungsmethoden für Extremwertaufgaben anwenden zu können. Abschließend ist jedoch zu überprüfen, ob die so erhaltenen Lösungen die Nicht-Negativitätsbedingungen erfüllen.
- Im Abschn.12.4.2 und 12.4.3 betrachten wir Optimalitätsbedingungen für Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen bzw. mit Gleichungsnebenbedingungen, illustrieren die Problematik in den Beisp.12.2, 12.7 und 12.8 und diskutieren im Abschn.12.4.4 ihre numerische Lösung.

12.4.2 Ohne Nebenbedingungen

Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen haben folgende *Struktur:*

- Es sind *lokale Minima* bzw. *Maxima* einer Funktion (Zielfunktion) von n Variablen zu bestimmen, d.h.

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \underset{x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n}{\text{Minimum/Maximum}}$$

- Für die Variablen sind keinerlei Nebenbedingungen (Beschränkungen) gegeben.

Die mathematische Theorie stellt Folgendes zur *Charakterisierung* und *Berechnung* von *Lösungen* zur Verfügung, wofür die Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen erforderlich ist:

- *Notwendige Optimalitätsbedingung:*
  - Sie muss für einen Minimal- oder Maximalpunkt
    $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ erfüllt sein.
  - Sie hat folgende Form:

soll in einer Firma ein Endprodukt mit vorgegebenen Eigenschaften derart hergestellt werden, dass auftretende *Rohstoffkosten minimal* sind.

- Verwendet man von den einzelnen Rohstoffen die Mengen

  x_1 , x_2 , ... , x_n (≥ 0)

  so ergibt sich die lineare *Kostenfunktion* (siehe Beisp.7.1e)

  $$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n$$

  wenn man annimmt, dass die Preise konstant bleiben und nicht von der Menge der bezogenen Rohstoffe abhängen.
- Die lineare Kostenfunktion ist zu minimieren, d.h.

  $$K(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Minimum}}$$

- Beschränkungen (*Nebenbedingungen*) ergeben sich
  - aus Mengenbeschränkungen für Rohstoffe,
  - durch geforderte Eigenschaften für das Endprodukt.
- Betrachten wir ein *Zahlenbeispiel* für eine *Mischungsaufgabe,* bei der konkrete Beschränkungen für Rohstoffe und Eigenschaften des Endprodukts vorliegen:

	Produkt I	Produkt II	Mindestgehalt im Endprodukt
Eiweiß/ME	25	45	3931
Fett/ME	31	52	772
Energie/ME	18	29	598
verfügbar (ME)	75	57	
Preis/ME	100	98	

  - Aus zwei begrenzt zur Verfügung stehenden landwirtschaftlichen Produkten I und II (d.h. n = 2), die Eiweiß, Fett und Energie enthalten, ist durch Mischung kostengünstig ein Futtermittel herzustellen, das den vorgegebenen Mindestgehalt an diesen drei Bestandteilen enthält.
  - Die *konkreten Zahlenwerte* sind aus obiger Tabelle zu entnehmen.
  - Aus der Tabelle ergeben sich
    - * die zu minimierende *lineare Kostenfunktion*

      $$K(x_1, x_2) = 100 \cdot x_1 + 98 \cdot x_2 \rightarrow \underset{x_1, x_2}{\text{Minimum}}$$

    - * die *Ungleichungsnebenbedingungen*

      $$25 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2 \geq 3931 \ , \ 31 \cdot x_1 + 52 \cdot x_2 \geq 772$$

      $$18 \cdot x_1 + 29 \cdot x_2 \geq 598 \ , \ 0 \leq x_1 \leq 75 \ , \ 0 \leq x_2 \leq 57$$

* Bei Funktionen $f(x)$ einer Variablen ist die erste Ableitung gleich Null, d.h. $f'(x^0) = 0$
* Bei Funktionen $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ von n Variablen sind alle partiellen Ableitungen erster Ordnung gleich Null, d.h.
  $f_{x_1}(\mathbf{x}^0) = 0, \; f_{x_2}(\mathbf{x}^0) = 0, \; ..., \; f_{x_n}(\mathbf{x}^0) = 0$
  Unter Verwendung des Gradienten (siehe Abschn.8.3.2) lassen sich die erhaltenen Gleichungen in vektorieller Form schreiben:
  $\mathbf{grad}\; f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$

- Sie lässt sich folgendermaßen *charakterisieren:*
  * Sie liefert n Gleichungen für die Variablen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, deren Lösungen man als *stationäre Punkte* bezeichnet.
  * Da es sich nur um eine notwendige Bedingung handelt, muss nicht jeder stationäre Punkt ein Minimal- oder Maximalpunkt sein.
  * Zur *Bestimmung stationärer Punkte* kann man versuchen, die von der Optimalitätsbedingung gelieferten Gleichungen zu lösen. Bei dieser Vorgehensweise treten zwei Schwierigkeiten auf:
    – Da Gleichungen der notwendigen Optimalitätsbedingung i.Allg. nichtlinear sind, müssen diese nicht exakt lösbar sein. Es bleibt eine numerische (näherungsweise) Lösung (siehe Abschn.12.4.4).
    – Da die Optimalitätsbedingung nur notwendig ist, muss man sich überzeugen, ob die hiermit berechneten stationären Punkte Minimal- oder Maximalpunkte sind, d.h. es ist eine *hinreichende Optimalitätsbedingung* heranzuziehen, die im Folgenden vorgestellt wird.

- *Hinreichende Optimalitätsbedingung:*
  - Sie dient zum Nachweis, ob ein aus notwendiger Optimalitätsbedingung berechneter stationärer Punkt ein Minimal- oder Maximalpunkt ist.
  - Sie wird durch die positive/negative Definitheit der zur Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ gehörenden Hesse-Matrix $H(\mathbf{x})$ gegeben, falls $f(\mathbf{x})$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt:
    * Da dies für $n \geq 3$ nicht einfach nachzuweisen ist, gehen wir nicht näher hierauf ein und verweisen auf die Literatur.
    * Für $n = 1$ und 2 ist sie problemlos zur Überprüfung stationärer Punkte anwendbar, wie im Folgenden zu sehen ist.
  - Für *Funktionen* $f(x)$ *einer Variablen* hat sie folgende Form:
    * Wenn $f''(x^0) \neq 0$ für einen stationären Punkt x^0 gilt, dann ist für

      $f''(x^0) > 0$ $\quad$ x^0 ein *Minimalpunkt*

      $f''(x^0) < 0$ $\quad$ x^0 ein *Maximalpunkt*

- Diese Aufgabe besitzt die Lösung $x_1 = 54{,}64$, $x_2 = 57{,}00$
  mit zugehörigem minimalen Zielfunktionswert 11050, wie mit EXCEL berechnet werden kann (analog zu Beisp.12.16b).

c) Betrachten wir ein *Zahlenbeispiel* für die *Transportoptimierung*, die wir im Abschn. 12.5.5 vorstellen:

- Von zwei verschiedenen Kiesgruben sind drei Baustellen mit Kies (in Mengeneinheiten ME) zu beliefern, wobei transportierte Mengen mit Variablen
  x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{23}
  bezeichnet werden.
- Die zu minimierende Funktion der *Transportkosten* habe die Gestalt:
  $$2 \cdot x_{11} + 3 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{21} + 7 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{23} \rightarrow \underset{x_{11},\dots,x_{23}}{\text{Minimum}}$$
  wobei die Zahlenkoeffizienten konkrete Transportpreise pro ME bezeichnen.
- Gleichungsnebenbedingungen für die auf den Baustellen benötigten Mengen an Kies haben folgende Gestalt:
  $x_{11} + x_{21} = 1200$, d.h. Baustelle 1 benötigt 1200 ME.
  $x_{12} + x_{22} = 1500$, d.h. Baustelle 2 benötigt 1500 ME.
  $x_{13} + x_{23} = 1000$, d.h. Baustelle 3 benötigt 1000 ME.
- Ungleichungsnebenbedingungen für die Kapazitätsbeschränkungen der Kiesgruben haben folgende Gestalt:
  $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2100$, d.h. Kiesgruppe 1 kann maximal 2100 ME liefern.
  $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2300$, d.h. Kiesgruppe 2 kann maximal 2300 ME liefern.
- Zusätzlich sind für x_{11} , x_{12} , x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{23} Nicht-Negativitätsbedingungen ($\geq$) zu erfüllen.
- Diese Aufgabe besitzt die Lösung
  $x_{11} = 600$, $x_{12} = 1500$, $x_{13} = 0$, $x_{21} = 600$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 1000$
  die mit EXCEL berechnet werden kann, wie im Beisp.12.16c illustriert ist.

Beispiel 12.4:

Betrachten wir Aufgaben, die zur *nichtlinearen Optimierung* führen.

a) *Gewinnmaximierung:*

- Man erhält ein Modell der linearen Optimierung in der Form
  $$g_1 \cdot x_1 + g_2 \cdot x_2 + \dots + g_n \cdot x_n \rightarrow \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{Maximum}}$$
  $$\begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \end{array} \qquad x_i \geq 0 \quad , \quad i=1, \dots , n$$

* Im Falle $f''(x^0) = 0$ müssen höhere Ableitungen solange berechnet werden, bis für ein $n \geq 3$ $f^{(n)}(x^0) \neq 0$ gilt: Ist dieses n
  – gerade, so liegt in x^0 ein Minimalpunkt bzw. Maximalpunkt vor.
  – ungerade, so liegt in x^0 ein *Wendepunkt* vor.

- Für *Funktionen* $f(x, y)$ von *zwei Variablen* hat sie folgende Form:
  Wenn die Ungleichung $f_{xx}(x^0, y^0) \cdot f_{yy}(x^0, y^0) - (f_{xy}(x^0, y^0))^2 > 0$ für einen stationären Punkt (x^0, y^0) erfüllt ist, dann ist für

  * $f_{xx}(x^0, y^0) > 0$ $\quad (x^0, y^0)$ ein Minimalpunkt

  * $f_{xx}(x^0, y^0) < 0$ $\quad (x^0, y^0)$ ein Maximalpunkt

- Aufgrund der geschilderten Problematik verzichtet man ab drei Variablen meistens auf den Einsatz hinreichender Optimalitätsbedingungen und untersucht stationäre Punkte, indem man sie mit Erfahrungswerten vergleicht oder Werte der Zielfunktion in ihrer Umgebung berechnet.

Bemerkung

Bei Funktionen $f(x)$ einer Variablen x lassen sich Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen zusätzlich für den Fall heranziehen, bei dem die Beschränkung (Nebenbedingung) für die Variable x vorliegt, dass x nur Werte aus einem gegebenen abgeschlossenen Intervall [a,b] annehmen darf (siehe auch Beisp.12.1b):

- Damit ist die Optimierungsaufgabe

  $$f(x) \rightarrow \underset{a \leq x \leq b}{\text{Minimum/Maximum}}$$

  zu lösen, d.h. das *globale Minimum* bzw. *Maximum* der Zielfunktion $f(x)$ über dem Intervall [a,b] zu bestimmen.

- In diesem Fall sind die mittels Optimalitätsbedingungen für das Intervall [a,b] berechneten lokalen Minima und Maxima nur mit den Randwerten $f(a)$ und $f(b)$ der Funktion $f(x)$ in beiden Randpunkten des Intervalls zu vergleichen:
  - Das *globale Minimum* ergibt sich als Minimalwert aus lokalen Minima und beiden Randwerten $f(a)$ und $f(b)$.
  - Das *globale Maximum* ergibt sich als Maximalwert aus lokalen Maxima und beiden Randwerten $f(a)$ und $f(b)$.

  ♦

wenn die Gewinne g_i konstant sind, d.h. nicht von den hergestellten Mengen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängen (siehe Beisp.12.3a).

- In der Praxis führt jedoch der Einfluss von Angebot und Nachfrage und die Möglichkeit der Kosteneinsparung bei größeren Produktionsmengen häufig dazu, dass Gewinne nicht konstant sind, sondern von den hergestellten Mengen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängen, d.h.

  $$g_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

  * Da sich Gewinne als Differenz aus Erlösen (Verkaufspreisen) p_i und Kosten (Herstellungskosten) c_i ergeben, folgt ihre Abhängigkeit von hergestellten Mengen aus der Abhängigkeit von Preis und Kosten, d.h. es gilt

  $$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  * Da der Preis stark von Angebot und Nachfrage abhängt, beeinflusst er hauptsächlich den Gewinn, während die Herstellungskosten meistens als konstant angesehen werden, d.h.

  $$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c_i$$

  Damit ist für die gegebenen linearen Nebenbedingungen eine nichtlineare Zielfunktion zu maximieren ist, d.h.

  $$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_1 + \ldots + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_n \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Maximum}}$$

  und folglich eine Aufgabe der *nichtlinearen Optimierung* entstanden.

b) Eine ähnliche Problematik wie im Beisp.12.4a ergibt sich bei der *Kostenminimierung,* die wir im Beisp.12.3b im Rahmen der linearen Optimierung vorstellen:

- Die Preise p_i (pro ME) benötigter Rohstoffe R_i sind in der Praxis häufig nicht konstant, sondern verändern sich durch Angebot und Nachfrage und durch Preisnachlass bei größerer Abnahmemenge, so dass sie von den Mengen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängen, d.h.

  $$p_i = p_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

- Damit ist die nichtlineare Zielfunktion

  $$p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_1 + p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_2 + \ldots + p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_n \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Maximum}}$$

  zu minimieren, wobei meistens *lineare Nebenbedingungen* hinzukommen, so dass eine Aufgabe der *nichtlinearen Optimierung* entsteht.

c) *Extremwertaufgaben* zur *Nutzenmaximierung* aus Beisp.12.2c

$$N(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Maximum}}$$

werden zu Aufgaben der *nichtlinearen Optimierung:*

Beispiele

12.4.3 Mit Gleichungsnebenbedingungen

Bei Extremwertaufgaben ab zwei Variablen sind Nebenbedingungen in Form von Gleichungen zulässig und man spricht von *Extremwertaufgaben* mit *Gleichungsnebenbedingungen,* die folgendermaßen charakterisiert sind:

- Es sind *lokale Minima* und *Maxima* einer Funktion (Zielfunktion) von n Variablen zu bestimmen, d.h.

  $$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Minimum/Maximum}}$$

- Die Variablen müssen zusätzlich *Gleichungsnebenbedingungen* in Form von m Gleichungen erfüllen, d.h.

  $$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

  wobei die Funktionen $g_i(\mathbf{x})$ beliebig sind und zu einem Vektor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ zusammengefasst werden können.

- Um eine Lösung für Extremwertaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen zu gewährleisten, dürfen sich die gegebenen m Gleichungen der Nebenbedingungen nicht widersprechen, so dass sie eine nichtleere Lösungsmenge besitzen, d.h. einen nichtleeren zulässigen Bereich B beschreiben:
  - Falls nur endlich viele Lösungen der Gleichungen existieren, entstehen diskrete Optimierungsaufgaben (siehe auch Abschn.12.7), die nicht mit den im Folgenden vorgestellten Methoden lösbar sind.
  - Falls für m = n das Gleichungssystem der Nebenbedingungen mit n Gleichungen und n Variablen nur eine Lösung besitzt, ist eine Optimierung nicht mehr möglich und das vorliegende Optimierungsmodell sollte überprüft werden.

- Zur *Charakterisierung* und *Berechnung* von *Lösungen* stellt die mathematische Theorie folgende zwei Vorgehensweisen bereit, für die Differenzierbarkeit der auftretenden Funktionen erforderlich ist:

  I. *Eliminationsmethode*
  Sie beruht auf folgender Vorgehensweise (siehe Beisp.12.8a):
  - Falls sich die m Gleichungen der Nebenbedingungen nach gewissen *Variablen auflösen* lassen, werden die erhaltenen Relationen in die Zielfunktion eingesetzt und man erhält eine *Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen*.
  - Wenn die Eliminationsmethode anwendbar ist, sollte man sie bevorzugen, da hierbei die Anzahl der Variablen in der erhaltenen Zielfunktion geringer wird und nur noch n – m beträgt.

  II. *Lagrangesche Multiplikatorenmethode*
  Sie ist als universelle Methode immer anwendbar und beruht auf folgender Vorgehensweise (siehe Beisp.12.8b):
  - Zuerst wird aus der Zielfunktion und den Funktionen der Gleichungsnebenbedingungen die *Lagrangefunktion*

- In der Praxis fordert man meistens anstatt der vollständigen Ausgabe der Haushaltsmittel h, dass diese die obere Grenze h nicht überschreiten dürfen, d.h.
  $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + ... + p_n \cdot x_n \le h$
- Die Nicht-Negativitätsbedingungen für die Variablen werden hinzugenommen, d.h. $x_1 \ge 0 ,..., x_n \ge 0$.

Beispiel 12.5:

Betrachten wir zwei praktische Aufgabenstellungen zur *ganzzahligen Optimierung:*

a) Eine typische Anwendung ist die bekannte *Knapsack-* oder *Rucksackaufgabe,* die zur *0-1-Optimierung* (*Booleschen Optimierung*) führt :
   - Man möchte einen Rucksack mit vorgegebenem Gewicht W mit einzelnen (nichtteilbaren) Gegenständen mit gegebenen Gewichten w_i packen ($i = 1 , ... , n$), so dass man einen optimalen Nutzen erzielt:
     * Den Gegenständen werden Nutzenswerte p_i zugeordnet.
     * Man nimmt an, dass alle Gegenstände von ihren Abmessungen her in den Rucksack passen.
   - Die auftretenden Variablen x_i können nur Werte 1 oder 0 annehmen, je nachdem ob zugehörige Gegenstände eingepackt werden oder nicht.
   - Damit ergibt sich mit dem vorgegebenen Gewicht W für den Rucksack und gegebenen Gewichten w_i ($i = 1,..., n$) für einzupackende Gegenstände mit Nutzenswerten p_i folgende Aufgabe der 0-1-Optimierung (Booleschen Optimierung) für einen maximalen Nutzen:
     $$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots + p_n \cdot x_n \to \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{Maximum}}$$
     $$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n \le W$$
     $$x_i \in \{0,1\} \quad , \quad i = 1 , \dots , n$$
   - Diese Aufgabenstellung bleibt nicht auf Rucksäcke beschränkt, sondern hat zahlreiche weiteren Anwendungen, so z.B. bei der Untersuchung von Finanzierungsmöglichkeiten im Rahmen von Investitionsentscheidungen.

b) Betrachten wir eine Aufgabe aus der *Gewinnmaximierung*, bei der nur ganzzahlige Variablen auftreten:
   - Wenn im Beisp.12.11a die Produkte A und B nur in ganzzahligen Stückzahlen herstellbar sind, ergibt sich folgende Aufgabe der *ganzzahligen linearen Optimierung:*
     $$f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \to \underset{x_1 , x_2 \text{ ganzzahlig}}{\text{Maximum}}$$
   - mit linearen Ungleichungsnebenbedingungen
     $$x_1 + 2 \cdot x_2 \le 10$$
     $$2 \cdot x_1 + x_2 \le 10$$
   - und Nicht-Negativitätsbedingungen $x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2 \ge 0$

$$L(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}) = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) =$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g_i(\mathbf{x})$$

mit den *Lagrangeschen Multiplikatoren* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ gebildet, die man zu einem Vektor $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ zusammenfasst.

- Anschließend wird die *notwendige Optimalitätsbedingung* auf die *Lagrangefunktion* $L(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda})$ bzgl. der Variablen **x** und $\boldsymbol{\lambda}$ angewandt. Dies ergibt n+m Gleichungen für **x** und $\boldsymbol{\lambda}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} L(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} g_i(\mathbf{x}) = 0$$

$$(k = 1, \ldots, n \;;\; i = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}) = g_i(\mathbf{x}) = 0$$

die sich unter Verwendung des Gradienten (siehe Abschn.8.3.2) in folgender *vektorieller Form* schreiben:

$$\mathbf{grad}\, f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \mathbf{grad}\, g_i(\mathbf{x}) = 0 \,, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

- Die *Lagrangesche Multiplikatorenmethode* ist folgendermaßen charakterisiert:
  * Man betrachtet die Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen

    $$L(\mathbf{x};\boldsymbol{\lambda}) \to \underset{\mathbf{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}}{\text{Minimum / Maximum}}$$

    für die Lagrangefunktion:
    – Dies ist eine *Ersatzaufgabe* für die gegebene Extremwertaufgabe mit Gleichungsnebenbedingungen.
    – Unter gewissen Voraussetzungen kann man zeigen, dass die notwendige Optimalitätsbedingung für die Lagrangefunktion eine notwendige Optimalitätsbedingung für die ursprünglich gegebene Extremwertaufgabe mit Gleichungsnebenbedingungen liefert.
  * Da es sich um eine notwendige Optimalitätsbedingung handelt, müssen stationäre Punkte der Lagrangefunktion nicht immer Minimal- oder Maximalpunkte sein:
    – Man muss zusätzlich eine *hinreichende Optimalitätsbedingung* heranziehen, deren Anwendung sich schwieriger gestaltet.
    – Deshalb verzichtet man meistens auf hinreichende Optimalitätsbedingungen und untersucht erhaltene stationäre Punkte, indem man sie mit Erfahrungswerten vergleicht oder Werte der Zielfunktion in ihrer Umgebung berechnet.

Beispiel 12.6:

Betrachten wir eine praktische Aufgabenstellung der Vektoroptimierung:

- Wenn man bei der konkreten Aufgabe der Erlösmaximierung aus Beisp.12.11a zusätzlich die Produktionskosten minimieren möchte, um einen maximalen Gewinn zu erzielen, erhält man eine Aufgabe der *linearen Vektoroptimierung* mit zwei Zielfunktionen:
  - In einer Firma betragen die Kosten für die Produktion einer Mengeneinheit (ME) vom Produkt A 100 Euro und einer Mengeneinheit (ME) vom Produkt B 200 Euro.
  - Bei der Berücksichtigung der Kosten kommt deshalb neben der Zielfunktion zur Maximierung des Verkaufserlöses eine zweite Zielfunktion zur Kostenminimierung hinzu:
    * Es ergibt sich folgende *lineare Vektoroptimierungsaufgabe,* um den Gewinn der Firma zu maximieren:

      $$f_1(x_1,x_2) \;=\; 200\cdot x_1 + 300\cdot x_2 \;\rightarrow\; \underset{x_1\,,\,x_2}{\text{Maximum}}$$

      $$f_2(x_1,x_2) \;=\; 100\cdot x_1 + 200\cdot x_2 \;\rightarrow\; \underset{x_1\,,\,x_2}{\text{Minimum}}$$

    * mit Ungleichungsnebenbedingungen

      $$x_1 + 2\cdot x_2 \le 10$$

      $$2\cdot x_1 + x_2 \le 10$$

    * und Nicht-Negativitätsbedingungen $x_1 \ge 0 \quad , \quad x_2 \ge 0$
  - Schon bei dieser einfachen Aufgabe der Vektoroptimierung gibt es keine Lösung, die gleichzeitig
    * den Verkaufserlös, d.h. die Zielfunktion $f_1(x_1,x_2)$ maximiert:

      Für das Maximum bzgl. der Nebenbedingungen berechnet der SOLVER von EXCEL folgende Werte: $x_1 = 3,33$, $x_2 = 3,33$
    * die Produktionskosten, d.h. die Zielfunktion $f_2(x_1,x_2)$ minimiert:

      Für das Minimum der Produktionskosten bzgl. der Nebenbedingungen ist sofort die Lösung $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ersichtlich.

      Diese Lösung ist natürlich für sich allein gesehen trivial, da die Produktionskosten immer minimal sind, wenn nicht produziert wird.
- Da man i.Allg. keine Lösung findet, die jede einzelne Zielfunktion minimiert bzw. maximiert, müssen *Kompromisse* gefunden werden, die in der Vektoroptimierung untersucht werden (siehe Abschn.12.8).

Beispiel 12.7:

Illustrieren wir die Lösung von *Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen:*

a) Betrachten wir die im Beisp.12.2e hergeleitete Extremwertaufgabe

$$V(x) = (a - 2\cdot x)^2\cdot x \;=\; a^2\cdot x - 4\cdot a\cdot x^2 + 4\cdot x^3 \;\rightarrow\; \underset{x}{\text{Maximum}}$$

* *Lagrangesche Multiplikatoren* besitzen für die eigentliche Extremwertaufgabe keine Bedeutung, d.h. ihr Zahlenwert ist hierfür uninteressant. Sie lassen sich jedoch in Optimierungsmodellen der Wirtschaft als sogenannte *Schattenpreise* ökonomisch interpretieren, wie im Beisp.12.9 illustriert ist.

12.4.4 Numerische Lösungsmethoden

Die exakte Lösung von Extremwertaufgaben mittels notwendiger Optimalitätsbedingung gelingt nur für einfache Aufgaben, da die entstehenden Gleichungen für die meisten praktischen Anwendungen nichtlinear sind.
Man ist deshalb auf *numerische Lösungsmethoden* (Näherungsmethoden) angewiesen, die nur unter Einsatz von Computern effektiv realisierbar sind:

- Diese Problematik haben wir bereits im Abschn.12.2.3 diskutiert.
- Für Extremwertaufgaben gibt es folgende Möglichkeiten, die wir nur nennen, aber nicht weiter behandeln können:
  - Numerische *Lösung* der Gleichungen der notwendigen *Optimalitätsbedingung*. Dies ist nicht immer effektiv, kann aber bei Sonderfällen erfolgreich eingesetzt werden.
  - Man berechnet *Näherungslösungen*, ohne Optimalitätsbedingungen heranzuziehen:
    * Für Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen existieren effektive Methoden. Hierzu gehören Abstiegsmethoden (z.B. Gradienten- und Newton-Methoden).
    * Für Extremwertaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen besteht eine große Klasse numerischer Methoden (sogenannte Strafmethoden) darin, sie auf Aufgaben ohne Nebenbedingungen zurückzuführen und diese dann numerisch zu lösen.
    * EXCEL kann alle Arten von Extremwertaufgaben numerisch lösen, wie im Abschn.12.9 beschrieben ist.

12.5 Lineare Optimierungsaufgaben

Aufgaben der linearen Optimierung (*lineare Optimierungsaufgaben*) bilden die einfachste Klasse nichtlinearer Optimierungsaufgaben, da Zielfunktion und Funktionen der Nebenbedingungen nur in *linearer Form* auftreten:

- In der *englischsprachigen Literatur* bezeichnet man lineare Optimierung als *linear programming*, so dass man im Deutschen manchmal die Bezeichnung *lineare Programmierung* findet.
- Lineare Optimierungsaufgaben treten bei ökonomischen Fragestellungen häufig auf, da hier Zielfunktion und Nebenbedingungen meistens linear sind:
  * Kosten und Verbrauch (von Rohstoffen, Materialien) sollen minimiert bzw. Gewinne und Produktionsmengen maximiert werden.
  * Man findet sie in Aufgaben der *Transportoptimierung*, *Produktionsoptimierung*, *Mischungsoptimierung*, *Gewinnmaximierung*, *Kostenminimierung*.

für ein maximales Volumen herzustellender Kartons (a>0):

- Bei dieser Aufgabenstellung kann x nur Werte aus dem Intervall [0,a/2] annehmen, da sonst kein Volumen ≥0 möglich ist.
- Da das Volumen in beiden Randwerten x = 0 und x = a/2 des Intervalls gleich Null ist, kann ein Maximum nur im Inneren des Intervalls angenommen werden.
- Deshalb lässt sich die *notwendige Optimalitätsbedingung*

  $$V'(x) = a^2 - 8\cdot a\cdot x + 12\cdot x^2 = 0$$

  heranziehen, die zur Berechnung stationärer Punkte eine quadratische Gleichung liefert, die folgende zwei Lösungen besitzt: $x_1 = \frac{a}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{a}{6}$
- Die erste Lösung $x_1 = \frac{a}{2}$

  kann offensichtlich kein Maximum für das Volumen realisieren, da es hierfür Null ist. Deshalb bleibt nur die zweite Lösung übrig, die sich als Maximalpunkt erweist, wie die Anwendung der *hinreichenden Optimalitätsbedingung* zeigt:
  - Die zweite Ableitung $V''(x) = -8\cdot a + 24\cdot x$

    liefert für beide stationären Punkte folgendes:

    * $V''(x_1) = -8\cdot a + 24\cdot\frac{a}{2} = 4\cdot a > 0$, d.h. $x_1 = \frac{a}{2}$ ist ein *Minimalpunkt.*
    * $V''(x_2) = -8\cdot a + 24\cdot\frac{a}{6} = -4\cdot a < 0$, d.h. $x_2 = \frac{a}{6}$ ist ein *Maximalpunkt.*
  - Damit erhält man für $x_2 = \frac{a}{6}$ ein Maximum für das Volumen der Kartons:

    $$V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - 2\cdot\frac{a}{6}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27}\cdot a^3$$

b) Lösen wir die im Beisp.12.2b vorgestellte *Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen* (a>0, b>0, c>0, d>0, e>0) zur *Lagerkostenminimierung* für eine Firma, die zwei Produkte herstellt

$$f(x_1,x_2) = a\cdot x_1 + b\cdot x_2 + \frac{c}{x_1} + \frac{d}{x_2} + e \to \underset{x_1,x_2}{\text{Minimum}}$$

wobei die Zielfunktion $f(x_1,x_2)$ die Lagerkosten für die Lagerbestände x_1 und x_2 von zwei Produkten beschreibt:

- Die *notwendige Optimalitätsbedingung* liefert durch Nullsetzen der ersten partiellen Ableitungen folgende zwei Gleichungen zur Bestimmung stationärer Punkte:

  $$f_{x_1}(x_1,x_2) = a - \frac{c}{x_1^2} = 0, \; f_{x_2}(x_1,x_2) = b - \frac{d}{x_2^2} = 0$$

12.5.1 Aufgabenstellung

Lineare Optimierungsaufgaben haben folgende *Struktur:*

- Zielfunktion und alle Funktionen der Nebenbedingungen müssen linear sein:
  - Eine *lineare Zielfunktion* ist bezüglich der n Variablen zu *maximieren*, d.h.

    $$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \underset{x_1, x_2, \ldots, x_n}{\text{Maximum}}$$

  - Die Variablen müssen m *lineare Ungleichungsnebenbedingungen*

    $$\begin{array}{ccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{1n} \cdot x_n & \leq & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{2n} \cdot x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{mn} \cdot x_n & \leq & b_m \end{array}$$

    erfüllen, wobei zusätzlich *Vorzeichenbedingungen* in Form von *Nicht-Negativitätsbedingungen* vorliegen können, d.h.

    $$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

    * Alle auftretenden Ungleichungen legen den *zulässigen Bereich* B für die Punkte (Variablen) **x** fest.
    * Punkte **x** , die zum zulässigen Bereich B gehören, werden als *zulässige Punkte* bezeichnet.
  - Die in Nebenbedingungen und Zielfunktion vorkommenden Konstanten

    $$a_{ij} \ , \quad b_i \ , \quad c_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

    sind vorgegeben.
- Die gegebene Form linearer Optimierungsaufgaben ist hinreichend allgemein:
  - Sie wird im Weiteren als *Normalform* bezeichnet.
  - Alle praktisch auftretenden Aufgaben können in diese Form überführt werden.
  - Folgende Umformungen sind möglich (siehe auch Beisp.12.10):
    * Falls eine *Zielfunktion* zu *minimieren* ist, so erhält man durch Multiplikation mit -1 eine zu maximierende Zielfunktion.
    * Falls eine *Gleichungsnebenbedingung* vorkommt, so kann diese durch zwei Ungleichungsnebenbedingungen ersetzt werden.
    * Bei Ungleichungsnebenbedingungen lässt sich das auftretende Ungleichungszeichen durch Multiplikation mit -1 in die jeweils andere Form bringen: Falls z.B. Ungleichungen mit $\geq$ vorkommen, so können diese durch Multiplikation mit -1 in Ungleichungen mit $\leq$ transformiert werden und umgekehrt.
  - Diese Umformungen können auch erforderlich sein, wenn man bei Anwendung von Computerprogrammen die Aufgabe auf die dort geforderte Form bringen muss.

Diese beiden Gleichungen lassen sich einfach auflösen, so dass sich ein stationärer Punkt $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ mit den Koordinaten

$$x_1^0 = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad , \; x_2^0 = \sqrt{\frac{d}{b}} \text{ ergibt.}$$

- Die Überprüfung des berechneten stationären Punktes mittels *hinreichender Optimalitätsbedingung* liefert:

$$f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) \cdot f_{x_2x_2}(x_1^0, x_2^0) - (f_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0))^2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{a^3}{c}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{b^3}{d}} > 0$$

  so dass er wegen $f_{x_1x_1}(x_1^0, x_2^0) = 2 \cdot \sqrt{\frac{a^3}{c}} > 0$ einen Minimalpunkt realisiert, d.h. ein Minimum der Lagerkosten liefert.

Beispiel 12.8:

Illustrieren wir die Lösung von Extremwertaufgaben mit Gleichungsnebenbedingungen anhand der im Beisp.12.2f betrachteten Aufgabe

$$O(r,h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \rightarrow \underset{r\,,\,h}{\text{Minimum}}$$

mit der *Gleichungsnebenbedingung* $V(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$

indem wir die beiden im Abschn.12.4.3 beschriebenen Methoden anwenden:

a) Lösung mittels *Eliminationsmethode:*

- Die Gleichungsnebenbedingung lässt sich einfach nach einer Variablen auflösen, so z.B.

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2}$$

- Durch Einsetzen des für h erhaltenen Ergebnisses in die Zielfunktion erhält man folgende *Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen*:

$$O(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \frac{1000}{r} \rightarrow \underset{r}{\text{Minimum}}$$

  d.h. die Oberfläche ist nur als Funktion der Variablen r>0 (Radius) zu minimieren.

- Durch Anwendung der notwendigen Optimalitätsbedingung für Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen ergibt sich folgende Lösung, wobei wir die Überprüfung mittels hinreichender Optimalitätsbedingung dem Leser überlassen:

  Aus $O'(r) = 4 \cdot \pi \cdot r - 2 \cdot \frac{1000}{r^2} = 0$ folgt die Lösung: $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$

- Damit berechnet sich das zugehörige h durch Einsetzen von r zu

$$h = \frac{1000}{\pi \cdot r^2} \approx \frac{1000}{\pi \cdot 5{,}42^2} \approx 10{,}84$$

- In *Matrizenschreibweise* hat die gegebene Normalform linearer Optimierungsaufgaben die Gestalt

$$z = \mathbf{c}^{T} \cdot \mathbf{x} \underset{\mathbf{x}}{\rightarrow \text{Maximum}} \quad , \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \le \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

wobei sich Vektoren **c**, **x** und **b** und Matrix **A** folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} , \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} , \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

12.5.2 Eigenschaften

Lineare Optimierungsaufgaben besitzen folgende grundlegende *Eigenschaften:*

- Wenn sich die Ungleichungen der Nebenbedingungen nicht widersprechen, so ist der durch sie beschriebene zulässige Bereich B nicht leer:
  - B besitzt die geometrische Form eines abgeschlossenen konvexen *Polyeders* mit höchstens endlich vielen Eckpunkten.
  - Die *Eckpunkte* von B sind diejenigen Punkte, die sich auf dem Rand von B befinden und nicht auf der Verbindungsgeraden zweier anderer Punkte aus B liegen können, d.h. im zwei- und dreidimensionalen anschaulich an Ecken erinnern (siehe Beisp. 12.13 und 12.14).
- Es existieren nur globale (absolute) Minima und Maxima, die auf dem Rand des zulässigen Bereichs B angenommen werden:
  - Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu Extremwertaufgaben aus Abschn.12.4.
  - Die Differentialrechnung kann nicht zur Bestimmung von Minima und Maxima herangezogen werden.
- Lineare Nebenbedingungen können so gestellt sein, dass lineare Optimierungsaufgaben keine Lösung besitzen, d.h. *unlösbar* sind:
  - Hier sind *zwei Fälle* zu unterscheiden:
    I. Der durch die Ungleichungsnebenbedingungen beschriebene zulässige Bereich B ist *leer*, d.h. die Ungleichungsnebenbedingungen widersprechen sich (siehe Beisp.12.12a).
    II. Die Zielfunktion ist auf dem durch die Ungleichungsnebenbedingungen beschriebenen zulässigen Bereich B nicht nach oben beschränkt.
    Dieser Fall tritt ein, wenn der zulässige Bereich B unbeschränkt ist (siehe Beisp.12.12b).
  - Wenn derartige Fälle der *Unlösbarkeit* bei praktischen Optimierungsaufgaben vorkommen, so haben sich entweder Schreib- oder Modellfehler eingeschlichen oder die untersuchte Problematik gestattet keine optimalen Werte.
- Für lineare Optimierungsaufgaben existieren *spezielle Lösungsmethoden:*
  - Die bekannteste ist die *Simplexmethode* (siehe Abschn.12.5.4).

b) Lösung mittels *Lagrangescher Multiplikatorenmethode:*

- Für die *Lagrangefunktion*

  $$L(r,h;\lambda) = 2\cdot\pi\cdot r^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot h + \lambda\cdot(\pi\cdot r^2\cdot h - 1000)$$

  ergeben sich aus der notwendigen Optimalitätsbedingung folgende drei nichtlineare Gleichungen für die drei Variablen r, h und λ:

  $$\frac{\partial L(r,h;\lambda)}{\partial r} = 4\cdot\pi\cdot r + 2\cdot\pi\cdot h + 2\cdot\lambda\cdot\pi\cdot r\cdot h = 0$$

  $$\frac{\partial L(r,h;\lambda)}{\partial h} = 2\cdot\pi\cdot r + \lambda\cdot\pi\cdot r^2 = 0$$

  $$\frac{\partial L(r,h;\lambda)}{\partial \lambda} = \pi\cdot r^2\cdot h - 1000 = 0$$

- Eine Lösung dieser Gleichungen per Hand mittels Elimination ist möglich, aber aufwendiger als im Beisp.12.8a:

  * Das Auflösen der zweiten Gleichung nach λ und der dritten nach h liefert

  $$\lambda = -\frac{2}{r} \quad \text{bzw.} \quad h = \frac{1000}{\pi\cdot r^2}$$

  * Indem man die erste Gleichung durch 2·π dividiert und dann die für λ und h erhaltenen Ergebnisse einsetzt, erhält man

  $$2\cdot r + \frac{1000}{\pi\cdot r^2} - \frac{2}{r}\cdot r\cdot\frac{1000}{\pi\cdot r^2} = 2\cdot r - \frac{1000}{\pi\cdot r^2} = 0$$

  * Daraus ergibt sich die gleiche Lösung wie im Beisp.12.8a:

  $$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42 \qquad , \qquad h = \frac{1000}{\pi\cdot r^2} \approx \frac{1000}{\pi\cdot 5{,}42^2} \approx 10{,}84$$

Beispiel 12.9:

Illustrieren wir die ökonomische Interpretation der Lagrangeschen Multiplikatoren als *Schattenpreise:*

- Für die Aufgabe $f(x) \to \underset{x}{\text{Maximum}}$

  verwendet man anstatt der Gleichungsnebenbedingung $g(x) = 0$ die Gleichungsnebenbedingung mit der rechten Seite ε, d.h. $g(x) = \varepsilon$ bzw. $\varepsilon - g(x) = 0$.

- Für die so *modifizierte Aufgabe* lautet die *Lagrangefunktion*

  $$L(x,\lambda,\varepsilon) = f(x) + \lambda\cdot(\varepsilon - g(x))$$

  die zusätzlich von ε abhängt:

  - Wendet man auf die Lagrangefunktion die notwendige Optimalitätsbedingung

    $$\frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial \lambda} = 0$$

- Treten nur zwei Variablen auf, so kann man *grafische Lösungsmethoden* einsetzen, wie im folgenden Abschn.12.5.3 illustriert ist.

12.5.3 Grafische Lösung

Grafische Lösungsmethoden sind bei linearen Optimierungsaufgaben nur bis zu drei Variablen anwendbar, wobei sich der Fall zweier Variablen am einfachsten realisieren lässt:

- Bei zwei unabhängigen Variablen sind folgende *Schritte* erforderlich:
  I. Zuerst wird der durch die linearen Ungleichungsnebenbedingungen festgelegte zulässige Bereich (konvexes Polyeder) im zweidimensionalen Koordinatensystem grafisch dargestellt. Dies geschieht durch Zeichnung der begrenzenden Geraden, die man aus den Nebenbedingungen entnimmt.
  II. Da die Optimalpunkte (Minimal- oder Maximalpunkte) immer auch in Eckpunkten angenommen werden, reicht es aus, eine Höhenlinie (Gerade) der Zielfunktion zu zeichnen und diese entsprechend parallel zu verschieben, bis der ″letzte″ Eckpunkt des konvexen Polyeders erreicht ist. Dieser realisiert dann den Optimalpunkt. Die Richtung der Parallelverschiebung wird dadurch bestimmt, ob die Zielfunktion zu minimieren oder maximieren ist.
- In den Beisp.12.13 und 12.14 geben wir eine Illustration zur grafischen Lösung linearer Optimierungsaufgaben.
- Da in Anwendungen i.Allg. mehr als drei Variablen auftreten, besitzen grafische Lösungsmethoden keine praktische Bedeutung sondern nur illustrativen Charakter, da man Eigenschaften linearer Optimierungsaufgaben anschaulich darstellen kann.

12.5.4 Simplexmethode

Die *Simplexmethode* ist die bekannteste Methode zur Lösung linearer Optimierungsaufgaben:

- Seit sie in den vierziger Jahren des 20. Jahrhunderts vom amerikanischen Mathematiker Dantzig aufgestellt wurde, hat sie viele Verbesserungen und Modifikationen erfahren und sich zu einer Standardmethode entwickelt.
- Die Simplexmethode nutzt den Sachverhalt aus, das Maximum bzw. Minimum der Zielfunktion in einem der endlich vielen Eckpunkte des zulässigen Bereichs B angenommen werden.
- Die Simplexmethode besitzt jedoch auch Nachteile, so dass weitere Methoden entwickelt wurden und werden, die ihr in gewissen Fällen überlegen sind.
- Die Anwendung der Simplexmethode ist per Hand nur für einfache Beispiele mit wenigen Variablen unter vertretbarem Aufwand möglich:
  - Praktisch anfallende Aufgaben lassen sich nur per Computer lösen, so z.B. mittels des SOLVERS von EXCEL.

an und löst die hierdurch entstandenen zwei Gleichungen, so sind die Lösungen x und λ von ε abhängig, d.h. $x = x(\varepsilon)$ und $\lambda = \lambda(\varepsilon)$.

- Für die erhaltenen Lösungen ergibt sich als Wert
  - * der Zielfunktion $f(\varepsilon) = f(x(\varepsilon))$
  - * der Lagrangefunktion $L(\varepsilon) = L(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon), \varepsilon)$

- Da $f(\varepsilon) = L(\varepsilon)$ gilt, folgt unter Anwendung der Kettenregel

$$\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{dL(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varepsilon} + \frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \lambda$$

weil $\frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial \lambda} = 0$ und $\frac{\partial L(x,\lambda,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \lambda$ gelten.

- Die erhaltene Gleichung $\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \lambda$ besagt Folgendes:
  - Der Lagrangesche Multiplikator λ ist ein Maß für die *Veränderung* des *Minimal-* bzw. *Maximalwertes* der Zielfunktion $f(x)$, bezogen auf eine Veränderung der rechten Seite ε der Nebenbedingung.
  - Wenn sich ε um einen kleinen Wert $d\varepsilon$ (>0) ändert, so ändert sich der *Minimal-* bzw. *Maximalwert* der Zielfunktion $f(\varepsilon)$ näherungsweise um den Wert $df(\varepsilon) = \lambda \cdot d\varepsilon$, d.h. λ gibt den Anstieg der Funktion $f(\varepsilon)$ und wird als *Schattenpreis* oder *Opportunitätskosten* bezeichnet.
  - In ökonomischen Anwendungen
    - * stellt ε häufig die verfügbare Menge einer Ressource dar.
    - * ist die Zielfunktion häufig eine Nutzen- oder Gewinnfunktion.

    Deshalb gibt $\lambda \cdot d\varepsilon$ näherungsweise den Zuwachs des Nutzens bzw. Gewinns an, wenn man die Ressource um $d\varepsilon$ Einheiten erhöht, d.h. λ stellt den Wert der Ressource dar. Hieraus resultiert für λ die Bezeichnung *Schattenpreis*.

Beispiel 12.10:

Die lineare Optimierungsaufgabe

$$2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \to \underset{x_1, x_2, x_3}{\text{Minimum}}$$

$$\begin{aligned} -7 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 &\le 1 \\ 6 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 &\ge -3 \\ x_1 - 2 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 &= 5 \end{aligned}$$

- besitzt nicht die im Abschn.12.5.1 gegebene Normalform, da
  - die Zielfunktion zu minimieren ist,
  - eine Ungleichungsnebenbedingung mit $\ge$ vorliegt,
  - eine Gleichungsnebenbedingung vorliegt.

- Deshalb benötigen Anwender nicht Details der einzelnen Rechenschritte der *Simplexmethode*, sondern es genügt eine anschauliche *Charakterisierung* ihrer Vorgehensweise, um Computerprogramme wie den SOLVER von EXCEL erfolgreich einsetzen zu können.

- Die Vorgehensweise der *Simplexmethode* lässt sich folgendermaßen charakterisieren:
  - Sie ist durch 4 *Schritte* gekennzeichnet:
    I. Ein *Eckpunkt* des durch die Nebenbedingungen bestimmten zulässigen Bereichs (Polyeders) B wird als *Startpunkt* (*Starteckpunkt*, *Anfangseckpunkt*) benötigt. Falls kein Eckpunkt bekannt ist, muss einer bestimmt werden.
    II. Im gewählten *Starteckpunkt* wird eine *Kante* des Polyeders (zulässige Kante) bestimmt, längs der die *Zielfunktion wächst.*
    III. Längs dieser Kante wird bis zum *nächsten Eckpunkt* des zulässigen Bereichs (Polyeders) gegangen, falls ein derartiger Eckpunkt existiert.
    IV. Die *Schritte* II und III werden solange *wiederholt*, bis keine Kanten mehr gefunden werden, längs der die Zielfunktion wächst, oder die Aufgabe als unlösbar erkannt ist.
  - Die Schritte I-IV für den Übergang von einem Eckpunkt zum anderen werden in der Simplexmethode durch Anwendung von Methoden der linearen Algebra realisiert.
  - Die Simplexmethode liefert eine endliche Lösungsmethode (mit Ausnahme von Entartungen), weil ein existierendes Maximum mindestens in einem der endlich vielen Eckpunkte des zulässigen Bereichs B angenommen wird.

12.5.5 Transportoptimierung

Einen wichtigen Sonderfall linearer Optimierungsaufgaben bilden Aufgaben der *Transportoptimierung*, d.h. der Minimierung von *Transportkosten* T. Diese Aufgaben besitzen folgende *spezielle Struktur,* in der Variablen und Preise/Kosten zweckmäßigerweise doppelindiziert sind (siehe auch Beisp.12.3c)*:*

- Von *Lieferanten* in m verschiedenen Orten

  $P_1 , P_2 , ... , P_m$

  ist eine Ware (Rohstoff) zu *Verbrauchern* in n anderen verschiedenen Orten

  $Q_1 , Q_2 , ... , Q_n$

  zu *transportieren*, wobei *minimale Transportkosten* T gefordert werden:
  - Wenn man für den Transport vom i-ten nach dem j-ten Ort
    * die transportierte Mengen der Ware (in Mengeneinheiten ME) mit

      x_{ij} (≥ 0) $\qquad (i = 1, ... , m ; j = 1, ... , n)$
    * den Transportpreis (in Geldeinheiten GE) für eine Einheit der Ware mit

      p_{ij} (≥ 0) $\qquad (i = 1, ... , m ; j = 1, ... , n)$

    bezeichnet, ergeben sich die Transportkosten T in linearer Form, d.h.

    $$T(x_{11},...,x_{mn}) = p_{11} \cdot x_{11} + ... + p_{1n} \cdot x_{1n} + ... + p_{m1} \cdot x_{m1} + ... + p_{mn} \cdot x_{mn}$$

- Durch Anwendung der im Abschn.12.5.1 vorgestellten Umformungsregeln lässt sich die Aufgabe in die folgende äquivalente *Normalform* bringen:

$$-2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 \to \underset{x_1, x_2, x_3}{\text{Maximum}}$$

$$-7 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \le 1$$

$$-6 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 \le 3$$

$$x_1 - 2 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 \le 5$$

$$-x_1 + 2 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 \le -5$$

- Die konkrete Anwendung der Umformungsregeln gestaltet sich folgendermaßen:
  - Die Zielfunktion wird mit −1 multipliziert, um die Maximierung zu erhalten. Nach Lösung der Aufgabe in Normalform muss der maximale Wert der Zielfunktion wieder mit −1 multipliziert werden, um den Minimalwert zu erhalten.
  - Die zweite Ungleichung wird mit −1 multipliziert, um eine Ungleichung mit ≤ zu erhalten.
  - Die Gleichung $x_1 - 2 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 = 5$
    wird durch die beiden äquivalenten Ungleichungen
    $x_1 - 2 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 \le 5$, $x_1 - 2 \cdot x_2 - 9 \cdot x_3 \ge 5$
    ersetzt und abschließend wird die zweite Ungleichung noch mit −1 multipliziert.

Beispiel 12.11:
Betrachten wir zwei konkrete *Zahlenbeispiele* zur *linearen Optimierung*:

a) Eine Firma produziert in einem bestimmten Zeitraum zwei Produkte A und B:
   - Für diese Produktion werden zwei Rohstoffe I und II benötigt, die in je 60 Mengeneinheiten (ME) zur Verfügung stehen.
   - Zur Herstellung je einer ME der Produkte werden für A 6 ME und für B 12 ME des Rohstoffs I und für A 12 ME und für B 6 ME des Rohstoffs II benötigt.
   - Der bei dieser Produktion erzielte Erlös (Verkaufspreis) betrage 200 Euro für eine ME vom Produkt A bzw. 300 Euro für eine ME vom Produkt B.
   - Gesucht ist der maximale Erlös für die Produktion im betrachteten Zeitraum, d.h. es liegt eine Maximierungsaufgabe vor.
   - Bezeichnet man die produzierten ME vom Produkt A und B durch Variablen x_1 bzw. x_2, so hat die *Erlösfunktion* die Form:
     $$f(x_1, x_2) = 200 \cdot x_1 + 300 \cdot x_2 = 100 \cdot (2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$$
     - Den gemeinsamen Faktor 100 zur Berechnung der Lösung kann man weglassen. Er ist nur abschließend für die Berechnung des erzielten maximalen Erlöses wieder zu berücksichtigen.
     - Es liegt damit folgende Zielfunktion vor: $f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$

- Um *Transportkosten* zu *minimieren*, ist die erhaltene lineare Funktion T (Zielfunktion) zu minimieren, d.h.

$$T(x_{11},...,x_{mn}) = p_{11} \cdot x_{11} + ... + p_{1n} \cdot x_{1n} + ... + p_{m1} \cdot x_{m1} + ... + p_{mn} \cdot x_{mn} \rightarrow \underset{x_{11},...,x_{mn}}{\text{Minimum}}$$

● Mit den bisher vorliegenden Nicht-Negativitätsforderungen $x_{ij} \geq 0$ für die Variablen würde man für das Minimum Null erhalten, d.h. es werden keine Waren transportiert. Dies ist kein realistisches Modell, da bei praktischen Aufgaben weitere *Beschränkungen* wegen benötigter Mengen und Kapazitäten vorliegen:

- In Orten Q_j werden von der Ware die Mengen $b_j \geq 0$ benötigt, so dass folgende lineare Gleichungen (*Gleichungsnebenbedingungen*) zu erfüllen sind:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + ... + x_{m1} &= b_1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + ... + x_{m2} &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\
x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + ... + x_{mn} &= b_n
\end{aligned}$$

- Da Lieferorte P_i die Kapazitätsbeschränkungen $a_i \geq 0$ haben, sind folgende lineare Ungleichungen (*Ungleichungsnebenbedingungen*) zu erfüllen:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{1n} &\leq a_1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + ... + x_{2n} &\leq a_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad &\vdots \\
x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + ... + x_{mn} &\leq a_m
\end{aligned}$$

  Wenn das Gesamtangebot der Lieferanten gleich dem Gesamtbedarf der Verbraucher ist, d.h. $a_1 + ... + a_m = b_1 + ... + b_n$, geht dieses lineare Ungleichungssystem in ein lineares Gleichungssystem über.

● Aufgaben der Transportoptimierung sind folgendermaßen charakterisiert:

- Sie lassen sich mit der allgemeinen Simplexmethode lösen (siehe Beisp.12.16c).
- Aufgrund ihrer speziellen Struktur gibt es spezielle Lösungsmethoden.
- Wenn außer den Nicht-Negativitätsbedingungen für die Variablen nur lineare Gleichungsnebenbedingungen vorliegen und die Konstanten a_i, b_j ganzzahlig sind, so sind die Lösungen ebenfalls ganzzahlig.

12.6 Nichtlineare Optimierungsaufgaben

Nicht jede praktische Optimierungsaufgabe lässt sich zufriedenstellend durch lineare Modelle beschreiben, d.h. mittels linearer Optimierung lösen (siehe Beisp.12.4). Deshalb ist es notwendig, neben linearen auch *nichtlineare Optimierungsaufgaben* zu betrachten:

- *Ungleichungsnebenbedingungen* für beide Variablen ergeben sich aus den gegebenen 60 Mengeneinheiten für die Rohstoffe I und II und den zur Produktion benötigten Mengen des
  - Rohstoffs I, d.h. $6 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 \leq 60$
  - Rohstoffs II, d.h. $12 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 60$
- Da nur positive Mengeneinheiten produziert werden können, sind folgende *Nicht-Negativitätsbedingungen* zu erfüllen:

  $x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$
- Aus den vorliegenden Fakten erhält man folgende lineare Optimierungsaufgabe, wenn man die Ungleichungsnebenbedingungen durch mögliche Kürzungen vereinfacht:

$$f(x_1,x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \quad \to \quad \underset{x_1\,,\,x_2}{\text{Maximum}}$$

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 10 \quad , \quad x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

  Diese Aufgabe besitzt die Lösung $x_1 = \frac{10}{3}, \; x_2 = \frac{10}{3}$

  die wir im Beisp.12.14 grafisch erhalten.

b) Eine Firma stellt vier Produkte mit Hilfe von drei Produktionsfaktoren Energie, Rohstoffe und Maschinen her.

- Dafür könnte eine lineare Optimierungsaufgabe für die *Gewinnmaximierung* folgende Gestalt haben:

$$6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \quad \to \quad \underset{x_1,x_2,x_3,x_4}{\text{Maximum}}$$

  wobei folgende Ungleichungsnebenbedingungen zu erfüllen sind:

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 \leq 5500$$

$$8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \leq 6100 \quad , \; x_1 \geq 0 \; , \; x_2 \geq 0 \; , \; x_3 \geq 0 \; , \; x_4 \geq 0$$

$$4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 5200$$

- Diese Aufgabe besitzt die Lösung $x_1 = 600 \; , \; x_2 = 100 \; , \; x_3 = 0 \; , \; x_4 = 550$
  die mittels EXCEL berechnet werden kann (siehe Beisp.12.16b).

Beispiel 12.12:

Betrachten wir *lineare Optimierungsaufgaben*, die *keine Lösung besitzen*. Der SOLVER von EXCEL erkennt die Unlösbarkeit der vorgestellten Aufgaben. Wir empfehlen dem Leser, dies mit der im Beisp.12.16 illustrierten Vorgehensweise nachzuprüfen.

a) Die Aufgabe

$$f(x_1,x_2) = 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \quad \to \quad \underset{x_1\,,\,x_2}{\text{Maximum}}$$

$$x_1 + x_2 \leq 2 \; , \; 3 \cdot x_1 + x_2 \leq -3 \quad , \quad x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0$$

- Sobald Zielfunktion oder eine Funktion der Nebenbedingungen nichtlinear sind, lassen sich Methoden der linearen Optimierung nicht mehr anwenden und man spricht von nichtlinearer Optimierung.
- Theorie und Lösungsmethoden der nichtlinearen Optimierung werden seit den fünfziger Jahren des 20. Jahrhunderts stark entwickelt und haben sich zu umfangreichen Gebieten entwickelt, auf die wir nicht näher eingehen können.
- Da EXCEL nichtlineare Optimierungsaufgaben mittels SOLVER numerisch lösen kann, betrachten wir im Folgenden die Aufgabenstellung, Eigenschaften und die Lösungsproblematik, die für den Einsatz von EXCEL hilfreich sind.

12.6.1 Aufgabenstellung

Nichtlineare Optimierungsaufgaben haben folgende *Struktur:*

- Eine Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ ist bezüglich der n Variablen zu minimieren, d.h.

  $$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \underset{x_1, x_2, \dots, x_n}{\text{Maximum}}$$

- Die Variablen müssen zusätzlich Nebenbedingungen in Form von m *Ungleichungen* (*Ungleichungsnebenbedingungen*) erfüllen, d.h.

  $$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

  wobei die Funktionen $g_i(\mathbf{x})$ beliebig sein können.
- Bei nichtlinearen Optimierungsaufgaben müssen Zielfunktion oder mindestens eine Funktion der Ungleichungsnebenbedingungen nichtlinear sein.
- Die gegebene Form nichtlinearer Optimierungsaufgaben ist hinreichend allgemein, da sich alle praktisch auftretenden Fälle in diese Form überführen lassen:
  - Folgende Umformungen sind möglich:
    - ∗ Falls eine *Gleichungsnebenbedingung* vorkommt, so kann sie durch zwei Ungleichungen beschrieben werden.
    - ∗ Falls *Ungleichungen* mit ≥ vorkommen, so können sie durch Multiplikation mit –1 in Ungleichungen mit ≤ transformiert werden.
    - ∗ Falls eine *Zielfunktion* $f(\mathbf{x})$ zu *minimieren* ist, so erhält man durch Multiplikation mit –1 eine zu maximierende Zielfunktion.
  - Dies sind die gleichen Umformungen, die wir bereits bei der linearen Optimierung kennengelernt haben und im Beisp.12.10 illustrieren.
  - Ähnliche Umformungen können erforderlich sein, wenn man bei Anwendung von Computerprogrammen die Aufgabe auf die dort geforderte Form bringen muss.

12.6.2 Eigenschaften

Nichtlineare Optimierungsaufgaben lassen sich folgendermaßen *charakterisieren:*

- Im Gegensatz zu Extremwertaufgaben aus Abschn.12.4 sind bei der nichtlinearen Optimierung ebenso wie beim Sonderfall der linearen Optimierung nur globale Minima und Maxima gesucht.

besitzt keine Lösungen:

- Der zulässige Bereich ist leer, d.h. es gibt keine zulässigen Punkte, die alle Ungleichungsnebenbedingungen erfüllen.
- Dies kann man sich leicht durch grafische Darstellung veranschaulichen.

b) Die Aufgabe

$$f(x_1,x_2) = x_1 + 2\cdot x_2 \quad \rightarrow \quad \underset{x_1\,,\,x_2}{\text{Maximum}}$$

$$-3\cdot x_1 + x_2 \leq 3$$

$$-x_1 + x_2 \leq -2 \;,\; x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$$

besitzt keine endliche Lösung:

- Dies kommt daher, dass die Zielfunktion auf dem durch die Ungleichungsnebenbedingungen bestimmten zulässigen Bereich B nicht nach oben beschränkt ist, so dass kein endliches Maximum existiert.
- Grafisch kann man sich leicht durch Zeichnung der beiden Geraden

  $$-3\cdot x_1 + x_2 = 3 \qquad \text{und} \qquad -x_1 + x_2 = -2$$

  veranschaulichen, dass der zulässige Bereich B unbeschränkt ist.
- Analytisch kann man sich die Unbeschränktheit der Zielfunktion auf dem zulässigen Bereich B veranschaulichen, in dem man z.B. zulässige Punkte (a,0) mit $a \geq 2$ betrachtet, für die die Zielfunktion gegen Unendlich strebt, wenn a gegen Unendlich strebt, d.h.

  $$\lim_{a \to \infty} f(a,0) = \infty$$

Beispiel 12.13:

Stellen wir den durch das konkrete Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -x_1 - 2\cdot x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

bestimmten zulässigen Bereich B in Form eines Polyeders in der Ebene grafisch dar:

- Die gegebene grafische Darstellung wird erreicht, indem man anstatt der Ungleichungen die vier zugehörigen Gleichungen (Geradengleichungen)

  $$x_1 + x_2 = 4 \;,\quad -x_1 - 2\cdot x_2 = 2$$

  $$-x_1 + x_2 = 2 \;,\quad x_1 - x_2 = 3$$

  in ein Koordinatensystem zeichnet, wie in der Abbildung zu sehen ist.
- Man erkennt, dass das Polyeder B vier Eckpunkte E1, E2, E3 und E4 besitzt, die sich als Schnittpunkte der begrenzenden Geraden ergeben. Die Berechnung ihrer Koordinaten überlassen wir dem Leser.

- Während bei linearen Optimierungsaufgaben sämtliche globalen Minima und Maxima auf dem Rand des zulässigen Bereichs B liegen, können sie bei nichtlinearen Optimierungsaufgaben auch im Inneren liegen, wodurch ihre Bestimmung erschwert wird.
- Es gibt zahlreiche Varianten von Optimalitätsbedingungen. Zu den bekanntesten gehören die Kuhn-Tucker-Bedingungen, die eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode darstellen und ein System von Gleichungen und Ungleichungen liefern.
- Im Unterschied zur linearen Optimierung mit der Simplexmethode existiert in der nichtlinearen Optimierung keine Lösungsmethode, die das Maximum in einer endlichen Anzahl von Schritten liefert. Dies ist nicht verwunderlich, da die Struktur nichtlinearer Optimierungsaufgaben wesentlich komplizierter ist.

12.6.3 Numerische Lösungsmethoden

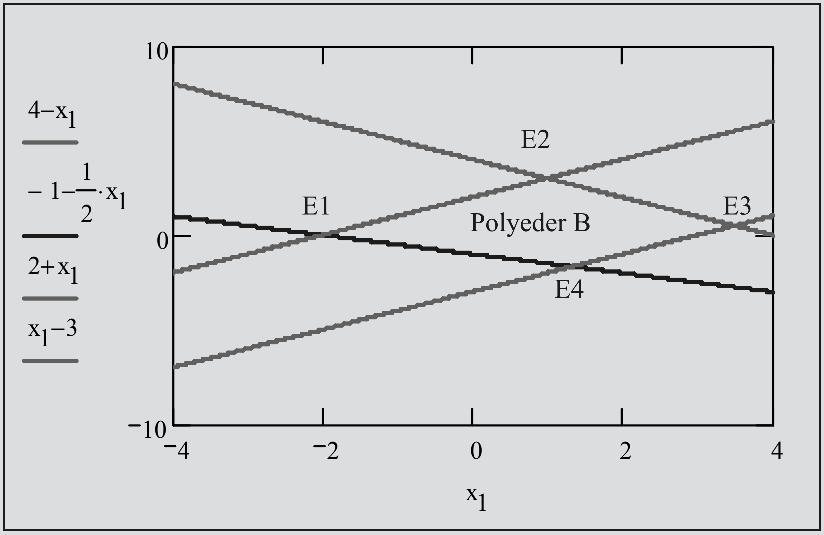
Da es im Unterschied zur linearen Optimierung in der nichtlinearen Optimierung keinen endlichen Lösungsalgorithmus gibt, ist man auf numerische Methoden (Näherungsmethoden) angewiesen, die meistens in Form von Iterationsmethoden vorliegen:

- Die zahlreichen *numerischen Methoden* der nichtlinearen Optimierung, die alle Vor- und Nachteile besitzen, lassen sich aufgrund der angewandten Prinzipien in mehrere große Klassen einteilen, von denen Strafmethoden und Methoden der zulässigen Richtungen die bekanntesten sind.
- Sämtliche numerische Methoden sind für praktische Optimierungsaufgaben nur mittels Computer realisierbar:
  - Es gibt hierfür zahlreiche Computerprogramme, die von Spezialisten erstellt sind, so dass man zuerst hierauf zurückgreifen sollte, da das Erstellen eigener Programme ein tiefes Eindringen in die Problematik numerischer Methoden und gute Programmierkenntnisse erfordert.
  - Mittels des SOLVERS von EXCEL lassen sich ebenfalls nichtlineare Optimierungsaufgaben mittels Computer lösen, wie im Abschn.12.9 beschrieben ist.

12.7 Aufgaben der ganzzahligen Optimierung

Unter *ganzzahligen Optimierungsaufgaben* versteht man Aufgaben der linearen und nichtlinearen Optimierung, bei denen die *Variablen* nur *ganzzahlige Werte* annehmen dürfen (siehe Beisp.12.5):

- Ganzzahlige Optimierung findet man in der Literatur auch unter dem Namen *diskrete Optimierung*.
- Es wurde in den letzten Jahrzehnten eine umfangreiche Theorie entwickelt, so dass wir im Rahmen des Buches nur einige charakteristische Merkmale und illustrative Beispiele vorstellen können und interessierte Leser auf die Literatur zur ganzzahligen Optimierung verweisen.



Beispiel 12.14:

Lösen wir die lineare Optimierungsaufgabe

$$f(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \rightarrow \underset{x_1, x_2}{\text{Maximum}}$$

mit Ungleichungsnebenbedingungen

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 10$$

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 10$$

und Nicht-Negativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

aus Beisp.12.11a grafisch. Dafür gestaltet sich die im Abschn.12.5.3 gegebene Vorgehensweise folgendermaßen:

I. Zuerst zeichnet man die beiden Geraden

$$x_1 + 2 \cdot x_2 = 10 \quad , \quad 2 \cdot x_1 + x_2 = 10$$

die zusammen mit den beiden Koordinatenachsen aufgrund der Nicht-Negativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ den *zulässigen Bereich* B begrenzen.

II. Anschließend zeichnen wir eine *Höhenlinie*

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = c = \text{konstant} \qquad \text{(Gerade)}$$

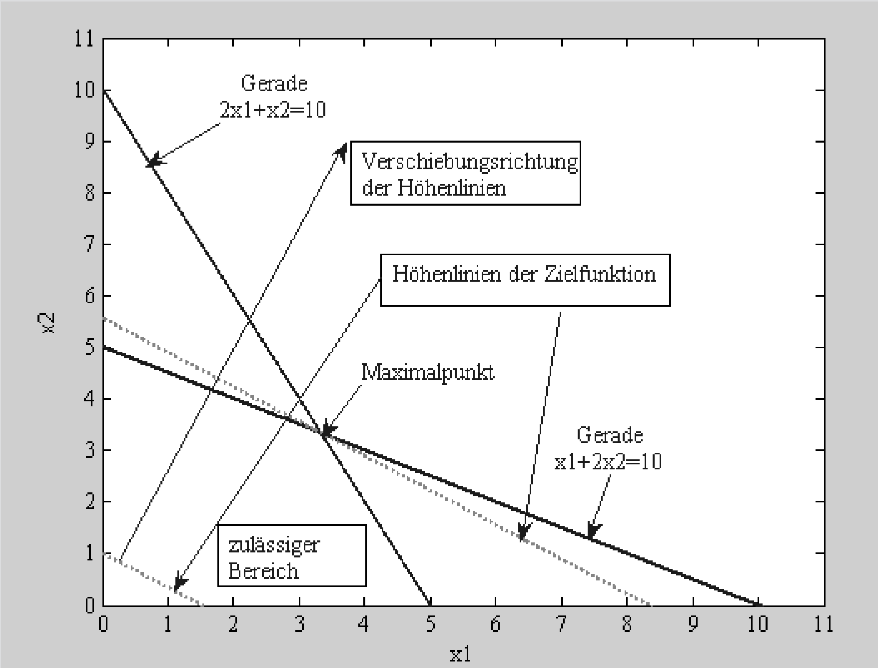
der Zielfunktion (z.B. für c = 3).

III. Da die Zielfunktion maximiert werden soll, verschiebt man die gezeichnete Höhenlinie solange parallel, bis ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs B erreicht wird, so dass sich c nicht weiter vergrößern lässt, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen. Wir erreichen damit den Maximalpunkt:

$$x_1 = \frac{10}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{10}{3}$$

- Ganzzahlige Optimierungsaufgaben treten in mathematischen Modellen der Wirtschaft öfters auf, wenn z.B. Gegenstände (wie Maschinen und Tiere) betrachtet werden, die nicht teilbar sind.
- *Kombinatorische Optimierungsaufgaben* sind spezielle ganzzahlige Optimierungsaufgaben, bei denen der zulässige Bereich nur endlich viele Punkte (ganzzahlige Gitterpunkte) enthält:
  - Typische Beispiele für die kombinatorische Optimierung bilden u.a. Zuordnungsprobleme (z.B. Stundenplanprobleme), Reihenfolgeprobleme (z.B. Rundreiseprobleme/Traveling-Salesman-Probleme, Maschinenbelegungsprobleme und Tourenplanungsprobleme), Gruppierungsprobleme, Verteilungsprobleme und Auswahlprobleme (z.B. Knapsackprobleme).
  - Ein wichtiger *Sonderfall* kombinatorischer Optimierungsaufgaben liegt vor, wenn die *Variablen* nur *zwei Werte* annehmen können (z.B. bei nein/ja- Entscheidungen). Man verwendet hierfür meistens die Werte 0 und 1 und spricht von *0-1-Optimierung*, *binärer Optimierung* oder *Boolescher Optimierung:*
    * Allgemeine Aufgaben der ganzzahligen Optimierung lassen sich in Aufgaben der 0-1-Optimierung überführen, wenn ganzzahlige Variablen nur Werte aus einem beschränkten Intervall annehmen können:
      – Nimmt eine Variable x nur m endlich viele ganzzahlige Werte α_1 , α_2 , … , α_m an, so kann x durch ein m-Tupel $(x_1, x_2, ..., x_m)$ von 0-1-Variablen folgendermaßen ersetzt werden, wofür gilt:
      $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_m \cdot x_m$ mit $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$
      – Ein nicht zu vernachlässigender Nachteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass sich die Anzahl der Variablen wesentlich erhöht.
    * Aufgaben der 0-1-Optimierung lassen sich in *nichtlineare Optimierungsaufgaben überführen:*
      – Dies geschieht für eine 0-1-Variable x, indem man die Gleichung
      $x = x^2$
      zu den Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe hinzufügt und die 0-1-Forderung weglässt.
      – Dies ist aber mehr von theoretischem Interesse, da nichtlineare Optimierungsaufgaben i.Allg. nicht einfacher lösbar sind.
- Wie nicht anders zu erwarten, existieren nur für lineare ganzzahlige Optimierungsaufgaben eine umfangreiche Theorie und effiziente Lösungsmethoden.
- Mittels des SOLVERS von EXCEL kann man unmittelbar keine ganzzahligen Optimierungsaufgaben lösen. Hierfür existieren spezielle Computerprogramme. Für Aufgaben mit wenigen Variablen kann die oben besprochene Transformation in eine nichtlineare Optimierungsaufgabe herangezogen werden, um den SOLVER anwenden zu können.

für den die Zielfunktion den Wert $50/3$ annimmt, wie folgende Abbildung zeigt:



Beispiel 12.15:

Illustrieren wir eine Lösungsmöglichkeit für *lineare Vektoroptimierungsaufgaben* anhand der folgenden Aufgabe mit zwei zu maximierenden Zielfunktionen

$$f_1(x_1,x_2) = x_1 + 2\cdot x_2 \quad \to \quad \underset{x_1\,,\,x_2}{\text{Maximum}}$$

$$f_2(x_1,x_2) = 4\cdot x_1 + x_2 \quad \to \quad \underset{x_1\,,\,x_2}{\text{Maximum}}$$

und folgenden Ungleichungsnebenbedingungen und Nicht-Negativitätsbedingungen

$$\begin{array}{l} x_1 + 3\cdot x_2 \le 42 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ 2\cdot x_1 + x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 3 \;,\; x_2 \ge 2 \end{array} \quad , \quad x_1 \ge 0 \;,\; x_2 \ge 0$$

- Diese Aufgabe lässt sich durch *Skalarisierung* auf folgende lineare Optimierungsaufgabe mit einer Zielfunktion zurückführen:

12.8 Aufgaben der Vektoroptimierung

Bei bisher betrachteten Aufgaben der linearen und nichtlinearen Optimierung ist nur eine Zielfunktion gegeben, die zu minimieren bzw. maximieren ist.
Bei einer Reihe praktischer Aufgabenstellungen sind jedoch oft mehrere Entscheidungen zu treffen, d.h. es sind *mehrere Zielfunktionen* zu minimieren bzw. maximieren:

- So sind z.B. bei der Produktion von Waren die Verkaufseinnahmen zu maximieren und die Produktionskosten zu minimieren (siehe Beisp.12.6), d.h. hier ist eine Optimierungsaufgabe mit zwei Zielfunktionen zu lösen.
- Die Optimierung mit mehreren Zielfunktionen wird in der *Vektoroptimierung* untersucht, die man auch als *Optimierung mit mehrfacher Zielsetzung* oder *mehrkriterielle* (*multikriterielle*) *Optimierung* bezeichnet. Des Weiteren spricht man von *Pareto-Optimierung*, um auf den Ökonomen Pareto hinzuweisen, der bereits im 19. Jahrhundert derartige Aufgaben untersuchte.
- Aufgaben der Vektoroptimierung haben folgende *Struktur:*
  - Im Unterschied zur nichtlinearen Optimierung sind mehrere (z.B. p) Zielfunktionen gegeben, die zu maximieren sind:

$$f_1(\mathbf{x}) = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \underset{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\text{Maximum}}$$

$$f_2(\mathbf{x}) = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \underset{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\text{Maximum}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f_p(\mathbf{x}) = f_p(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow \underset{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\text{Maximum}}$$

    Falls eine zu minimierende Zielfunktion vorliegt, so kann sie in eine zu maximierende transformiert werden, wie im Abschn.12.6.1 beschrieben ist.
  - Die Variablen müssen analog zur nichtlinearen Optimierung zusätzlich Nebenbedingungen in Form von m *Ungleichungen* (*Ungleichungsnebenbedingungen*) erfüllen, d.h.

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$

    wobei die Funktionen $g_i(\mathbf{x})$ beliebig sein können.
  - Wenn alle auftretenden Funktionen linear sind, spricht man von *linearer Vektoroptimierung* ansonsten von nichtlinearer.
- Aufgaben der Vektoroptimierung lassen sich folgendermaßen *charakterisieren:*
  - Bei praktischen Aufgabenstellungen treten selten perfekte Lösungen auf, d.h. zulässige Punkte, für die alle Zielfunktionen gleichzeitig ihren Maximalwert annehmen. Deshalb sind in der Vektoroptimierung *Kompromisse* zu finden, d.h. der Anwender muss aus einer Reihe von zulässigen Punkten die für ihn geeigneten aussuchen.

$$f(x_1,x_2) = \lambda_1 \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2) + \lambda_2 \cdot (4 \cdot x_1 + x_2)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot 4) \cdot x_1 + (\lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2) \cdot x_2 \rightarrow \underset{x_1,x_2}{\text{Maximum}}$$

wobei die oben gegebenen Nebenbedingungen zu erfüllen sind.

- In folgender Tabelle geben wir Lösungen x_1, x_2 dieser Aufgabe für verschiedene Werte der Skalarisierungsparameter λ_1, λ_2, indem wir den SOLVER von EXCEL nach der im Beisp.12.16 illustrierten Vorgehensweise einsetzen:

λ_1	λ_2	x_1	x_2
1	0	9	11
0	1	14	2
2	1	10	10
1	2	14	2
1	5	14	2
5	1	9	11

- Die für verschiedene Skalarisierungsparameter λ_1, λ_2 erhaltenen Lösungen sind laut Theorie effiziente Punkte. Wenn ein Skalarisierungsparameter Null ist, so erhält man offensichtlich die Lösung für eine der Zielfunktionen.

Beispiel 12.16:

Illustrieren wir im Folgenden den Einsatz des SOLVERS von EXCEL zur Lösung von Optimierungsaufgaben:

- Wir lösen eine Extremwertaufgabe und lineare Optimierungsaufgaben mit der im Abschn.12.9 gegebenen Vorgehensweise.
- Die gegebenen Beispiele können als Vorlage dienen, um beliebige (auch nichtlineare) Optimierungsaufgaben mittels SOLVER zu lösen.

a) Im Folgenden wird die Lösung von Extremwertaufgabe am Beisp.12.8

$$O(r,h) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \rightarrow \underset{r\,,\,h}{\text{Minimum}} \quad , \quad \pi \cdot r^2 \cdot h = 1000$$

mittels SOLVER beschrieben:

- Die Namen der auftretenden Variablen r und h sind in die Zellen Z1S1 bzw. Z1S2 der Tabelle eingetragen und darunter in die Zellen Z2S1 bzw. Z2S2 als willkürliche Startwerte 1.
- Danach werden die Zellen Z1S1 bis Z2S2 mit Variablennamen und zugehörigen Startwerten markiert und mittels der Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen** die Namen r und h für die Variablen erstellt und ihnen die Startwerte zugewiesen (siehe Abschn.2.5).
- Als Zielzelle wird Zelle Z5S1 gewählt und hier die Zielfunktion =2*PI()*r^2+2*PI()*r*h als Formel eingetragen.
- Die Gleichungsnebenbedingung wird in Zelle Z7S1 als Formel =PI()*r^2*h–1000 eingetragen.

- Um einen Kompromiss zu finden, stellt die mathematische Theorie den Begriff der *effizienten Punkte* (*Pareto-optimalen Lösungen*) zur Verfügung:
  * Für eine exakte mathematische Definition effizienter Punkte verweisen wir auf die Literatur.
  * Anschaulich sind effiziente Punkte dadurch gekennzeichnet, dass keine weiteren zulässigen Punkte existieren, für die eine Zielfunktion besser und die anderen nicht schlechter sind.
  * Die *Bestimmung aller effizienten Punkte* einer Vektoroptimierungsaufgabe ist schwierig.
  * Man versucht, einzelne effiziente Punkte zu berechnen, indem man Vektoroptimierungsaufgaben auf nichtlineare Optimierungsaufgaben mit einer Zielfunktion zurückführt und die Nebenbedingungen beibehält. Wichtige Methoden dieser Art sind *Skalarisierungsmethoden,* von denen wir eine vorstellen:
    – Die einzelnen Zielfunktionen werden mit Gewichten

      $$\lambda_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, p)$$

      versehen und addiert, wobei die Gewichte als *Skalarisierungsparameter* bezeichnet werden.
    – Auf diese Art wird die Aufgabe der Vektoroptimierung in die nichtlineare Optimierungsaufgabe

      $$\lambda_1 \cdot f_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \cdot f_2(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_p \cdot f_p(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\rightarrow \text{Minimum}}$$

      mit einer Zielfunktion und den Nebenbedingungen

      $$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

      überführt.
    – Meistens fordert man für die Skalarisierungsparameter zusätzlich die Bedingung

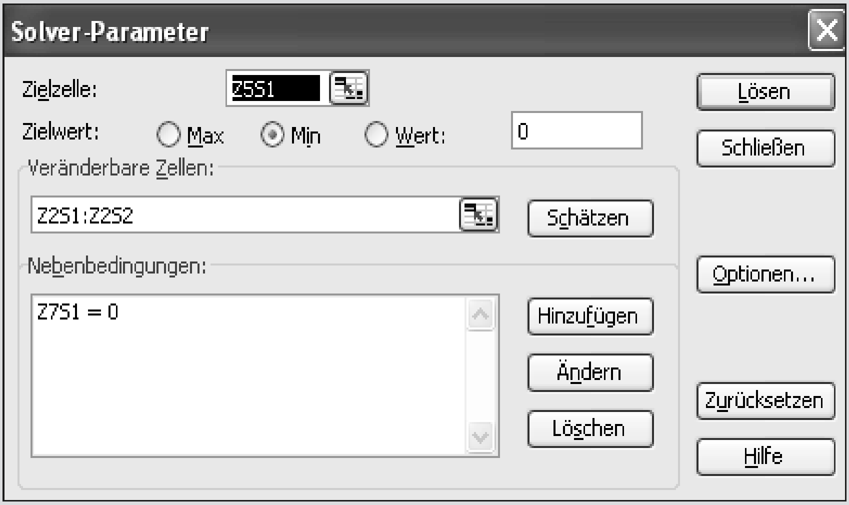
      $$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1$$

    – Für diese Skalarisierungsmethode lässt sich beweisen, dass Maximalpunkte der erhaltenen nichtlinearen Optimierungsaufgabe *effiziente Punkte* für die zugehörige Vektoroptimierungsaufgabe liefern.
    – Zur Lösung der entstandenen Optimierungsaufgabe mit einer Zielfunktion kann man die bekannten Methoden der linearen bzw. nichtlinearen Optimierung heranziehen und somit auch den SOLVER von EXCEL einsetzen (siehe Beisp.12.15).

12.9 Einsatz von EXCEL

Eine effektive Lösung praktischer Optimierungsaufgaben ist ohne Computer nicht möglich. Deswegen werden schon seit längerer Zeit *Computerprogramme* (Programmsysteme/Softwaresysteme) zur *Optimierung* entwickelt, wofür sich *zwei Richtungen* abzeichnen:

- Abschließend wird der SOLVER mittels der Menüfolge
  Extras ⇒ Solver...
  aufgerufen und das erscheinende Dialogfeld **Solver-Parameter** wie folgt ausgefüllt:



- Durch Anklicken von *Lösen* im Dialogfeld **Solver-Parameter** wird die Berechnung durch den SOLVER ausgelöst, wie im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen ist:

	1	2
1	r	h
2	5,41925753	10,8385341
3		
4	Zielfunktion	
5	553,581045	
6	Gleichungsnebenbedingung	
7	1,3484E-08	

  * Das berechnete Ergebnis r = 5,42 und h = 10,84 wird in den Zellen Z2S1 bzw. Z2S2 anstatt der Startwerte angezeigt.
  * In der Zielzelle Z5S1 ist der minimale Zielfunktionswert 553,58 zu sehen.
  * In Zelle Z7S1 der Gleichungsnebenbedingung wird der Wert der Funktion der Nebenbedingung im berechneten Minimalpunkt angezeigt, der näherungsweise Null sein muss.

b) Im Folgenden wird die Lösung linearer Optimierungsaufgaben am Beisp.12.11b

$$6\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + 6\cdot x_3 + 8\cdot x_4 \quad \to \quad \underset{x_1,x_2,x_3,x_4}{\text{Maximum}}$$

- Einerseits werden vorhandene universelle *Computeralgebra-* und *Mathematiksysteme* durch *Zusatzprogramme* zur *Optimierung* erweitert.
  Wir illustrieren dies am Beispiel von EXCEL, mit dessen Hilfe man Optimierungsaufgaben numerisch lösen kann, wenn der SOLVER (siehe Abschn.3.5) installiert ist.
- Andererseits werden *spezielle Programmsysteme* zur *Optimierung* erstellt, wie z.B. CONOPT, EASY-OPT, GLOBT, LINDO, LINGO, MINOPT, MINOS, NOP, NUMERICA, OPL und Programme aus der NAG-Bibliothek:
  * Diese speziellen Programme sind für hochdimensionale Aufgaben mit zahlreichen Variablen und Nebenbedingungen häufig den Computeralgebra- und Mathematiksystemen überlegen.
  * Ausführlichere Informationen über derartige Programmsysteme findet man in der Optimierungsliteratur und im Internet.

Der *Einsatz* des SOLVERS von EXCEL zur numerischen Lösung von Extremwertaufgaben, linearen und nichtlinearen Optimierungsaufgaben ist durch folgende *Vorgehensweise* gegeben, die wir im Beisp.12.16 ausführlich illustrieren:

- Der Einsatz des SOLVERS zur Lösung von Optimierungsaufgaben
  - verläuft bei der Eingabe der Nebenbedingungen analog zu der im Abschn.6.3.2 bei der Lösung von Gleichungen und Ungleichungen beschriebenen Vorgehensweise, d.h.
    * den Variablen sind Startwerte zuzuweisen.
    * die *Gleichungen* und *Ungleichungen* der *Nebenbedingungen* werden zwecks Vereinheitlichung auf eine *Normalform* gebracht, bei der auf der rechten Seite 0 steht. Danach werden die linken Seiten dieser *Gleichungen* und *Ungleichungen* als Formeln in leere Zellen der Tabelle eingegeben und im Dialogfeld **Solver-Parameter** bei *Nebenbedingungen* eingetragen.
  - erfordert zusätzlich die Beachtung von *Zielzelle* und *Zielwert*, wie im Folgenden beschrieben ist.
- Der Einsatz des SOLVERS zur Lösung von Optimierungsaufgaben ist im Einzelnen durch *folgende Schritte* gekennzeichnet:

  I. Zuerst trägt man in zusammenhängende Zellen einer Zeile der Tabelle die Namen der auftretenden Variablen ein und darunter ihre *Startwerte* für die vom SOLVER verwendete numerische Lösungsmethode.
     - Kennt man keine Näherungswerte für die Lösung, so wählt man die Startwerte beliebig.
     - Anschließend markiert man die Zellen der Variablennamen mit darunterstehenden Startwerten, aktiviert die Menüfolge

       Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen

       und klickt im erscheinenden Dialogfeld **Namen erstellen** das Kontrollfeld *Oberster Zeile* an:
       * Damit werden für die Variablen die eingetragenen Namen erstellt, denen die eingetragenen Startwerte zugewiesen werden.

mit Ungleichungsnebenbedingungen

$$3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 6\cdot x_4 \le 5500$$
$$8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 2\cdot x_4 \le 6100 \quad , \; x_1 \ge 0 \; , \; x_2 \ge 0 \; , \; x_3 \ge 0 \; , \; x_4 \ge 0$$
$$4\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 4\cdot x_4 \le 5200$$

mittels SOLVER beschrieben:

- Die Namen der auftretenden Variablen x1, x2, x3 und x4 werden in die Zellen Z1S1 bis Z1S4 eingetragen und darunter in die Zellen Z2S1 bis Z2S4 als willkürliche Startwerte 0.
- Danach werden die Zellen Z1S1 bis Z2S4 markiert und mittels der Menüfolge **Einfügen ⇒ Namen ⇒ Erstellen** die Namen x1, x2, x3 und x4 für die Variablen erstellt und ihnen die Startwerte zugewiesen (siehe Abschn.2.5).
- Als *Zielzelle* wird Zelle Z5S1 gewählt und hier die Zielfunktion als Formel eingetragen, d.h. =6∗x1+7∗x2+6∗x3+8∗x4
- Die 7 Ungleichungsnebenbedingungen werden in die Zellen Z7S1 bis Z9S1 und Z7S2 bis Z10S2 als Formeln in folgender Reihenfolge eingetragen:
  =3∗x1+4∗x2+8∗x3+6∗x4–5500 , =8∗x1+2∗x2+4∗x3+2∗x4–6100
  =4∗x1+6∗x2+2∗x3+4∗x4–5200 , =x1 , =x2 , =x3 , =x4
- Abschließend wird der SOLVER mittels der Menüfolge
  Extras ⇒ Solver...
  aufgerufen und das erscheinende Dialogfeld **Solver-Parameter** wie folgt ausgefüllt, wobei die eingetragene 7. Nebenbedingung nicht zu sehen ist:

- Durch Anklicken von *Lösen* im Dialogfeld **Solver-Parameter** wird die Berechnung durch den SOLVER ausgelöst:

* Da EXCEL keine indizierten Variablen kennt, kann man die Variablennamen z.B. in der Form x1 , x2 , ... , xn schreiben.

II. Danach wählt man eine freie Zelle der aktuellen Tabelle als *Zielzelle* aus und trägt hier die Zielfunktion als Formel ein:

- Analog werden in weitere freie Zellen der aktuellen Tabelle die linken Seiten der Nebenbedingungen als Formeln eingetragen.
- Zusätzlich kann man zur besseren Darstellung und Veranschaulichung die Zielfunktion und Nebenbedingungen als Text (d.h. im Textmodus) über oder neben die entsprechenden Formeln in leere Zellen eintragen.

III. Anschließend wird der SOLVER mittels der Menüfolge
Extras ⇒ Solver...
aktiviert und das erscheinende Dialogfeld **Solver-Parameter**

wie folgt ausgefüllt (siehe Beisp.12.16):

- In *Zielzelle* wird die Zelle mit der Formel der Zielfunktion durch Mausklick eingetragen.
- Bei *Zielwert* wird *Max* oder *Min* angeklickt, je nachdem ob die Zielfunktion zu maximieren oder minimieren ist.
- In *Veränderbare Zellen* ist der Bereich der Startwerte für die Variablen einzutragen. Dies geht am einfachsten durch Überstreichen dieses Bereichs mit gedrückter Maustaste.
- In *Nebenbedingungen* sind die einzelnen Gleichungen/Ungleichungen der Nebenbedingungen der Optimierungsaufgabe durch Anklicken von *Hinzufügen* einzutragen, indem man das erscheinende Dialogfeld **Nebenbedingungen hinzufügen** wie folgt ausfüllt:

* Das berechnete Ergebnis x1 = 600, x2 = 100, x3 = 0 und x4 = 550 wird in den Zellen Z2S1 bis Z2S4 anstatt der Startwerte angezeigt, wie aus folgendem Tabellenausschnitt zu sehen ist.
* In der Zielzelle Z5S1 ist der maximale Zielfunktionswert 8700 zu sehen.
* In den Zellen der Nebenbedingungen werden die Werte der Funktionen der Nebenbedingungen im berechneten Maximalpunkt angezeigt.

	1	2	3	4
1	x1	x2	x3	x4
2	600	100	-4,099E-15	550
3				
4	Zielfunktion			
5	8700			
6	Ungleichungsnebenbedingungen			
7	0	600		
8	0	100		
9	0	-4,099E-15		
10		550		

c) Im Folgenden wird die Lösung linearer Aufgaben der Transportoptimierung aus Beisp. 12.3c

$$2 \cdot x_{11} + 3 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{21} + 7 \cdot x_{22} + 6 \cdot x_{23} \rightarrow \underset{x_{11},\dots,x_{23}}{\text{Minimum}}$$

mit Gleichungsnebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 1200 \\ x_{12} + x_{22} &= 1500 \\ x_{13} + x_{23} &= 1000 \end{aligned}$$

und Ungleichungsnebenbedingungen

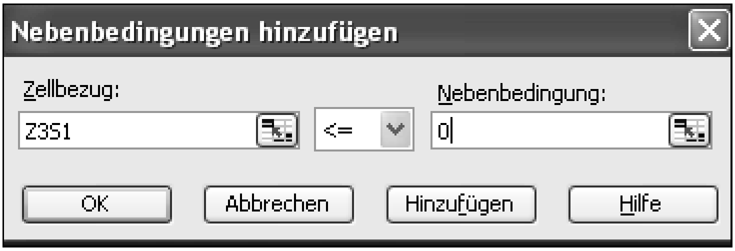
$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 2100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 2300 \end{aligned}$$

und Nicht-Negativitätsbedingungen

$$x_{11} \geq 0 \text{ , } x_{12} \geq 0 \text{ , } x_{13} \geq 0 \text{ , } x_{21} \geq 0 \text{ , } x_{22} \geq 0 \text{ , } x_{23} \geq 0$$

mittels SOLVER berechnet.

Diese Aufgabe wird analog zu Beisp.12.16b gelöst, so dass wir im Folgenden nur den Tabellenausschnitt angeben, in dem das vom SOLVER berechnete Ergebnis in der Zeile Z2S1**:**Z2S6 zu sehen ist:



    * Die Zelladresse (z.B. Z3S1) für die Formel der linken Seite einer Gleichung /Ungleichung der Nebenbedingungen wird bei *Zellbezug* mittels Mausklick auf die entsprechende Zelle eingetragen.
    * Danach werden das Gleichheitszeichen (=) bzw. Ungleichheitszeichen (z.B. <=) und bei *Nebenbedingung* eine 0 eingetragen, wenn in der gewählten Zelle der Ausdruck der linken Seite der Gleichung bzw. Ungleichung in Normalform steht.
    * Das Anklicken von OK bewirkt das Einfügen im Dialogfeld **Solver-Parameter** bei *Nebenbedingungen.*

  IV. Nach beendeter Ausfüllung liefert das abschließende Anklicken von *Lösen* im Dialogfeld **Solver-Parameter** die Berechnung aus:
    - Der SOLVER gibt die Meldung aus, dass entweder ein Ergebnis gefunden oder die Aufgabe nicht gelöst wurde.
    - Falls eine Lösung berechnet wird, zeigt sie der SOLVER in der Tabelle anstatt der Startwerte an und gibt im *Antwortbericht* weitere Informationen.

- Bei Anwendung des SOLVERS zur Lösung von Optimierungsaufgaben ist Folgendes zu beachten:
  - Wenn mehrere Lösungen existieren, so können diese nicht in ihrer Gesamtheit vom SOLVER berechnet werden. Man erhält hier nur eine mögliche Lösung.
  - Der SOLVER kann gelegentlich falsche Näherungslösungen liefern:
    * Dies resultiert aus dem Sachverhalt, dass verwendete Näherungsmethoden nicht immer erfolgreich sein, d.h. konvergieren müssen.
    * Deshalb wird empfohlen, anfallende Aufgaben mit verschiedenen Startwerten für die Variablen zu berechnen.
  - Der Einsatz des SOLVERS kann scheitern, wenn zu lösende Aufgaben zu hochdimensional sind, d.h. die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen sehr groß ist. In diesem Fall muss man auf spezielle Optimierungsprogramme zurückgreifen.

	1	2	3	4	5	6
1	x11	x12	x13	x21	x22	x23
2	600	1500	0	600	0	1000
3						
4	Gleichungsnebenbedingungen			Zielfunktion		
5	0			14100		
6	1E-06					
7	0					
8	Ungleichungsnebenbedingungen					
9	0					
10	-700					
11	Nicht-Negativitätsbedingungen					
12	600	600				
13	1500	0				
14	0	1000				

13 Finanzmathematik

13.1 Einführung

Die *Finanzmathematik* befasst sich mit der mathematischen Beschreibung von Finanzprodukten wie z.B. Krediten, Sparkonten, Aktien und Wertpapieren. Sie ist ein umfangreiches Gebiet innerhalb der Wirtschaftsmathematik und stellt zahlreiche Methoden zur Verfügung, die sich in zwei Klassen aufteilen lassen:

- Elementare (klassische) Methoden:
  - Folgende Problemstellungen werden u.a. behandelt:
    Abschreibungsrechnung, Investitionsrechnung, Kurs- und Renditerechnung, Rentenrechnung, Tilgungsrechnung, Zinsrechnung.
  - *Zins* als Preis für geliehenes bzw. verliehenes Geld spielt eine fundamentale Rolle.
  - Als mathematische Hilfsmittel werden lediglich Kenntnisse aus Logarithmen- und Prozentrechnung, im Umformen algebraischer Ausdrücke, aus der Theorie der Zahlenfolgen und -reihen und im Lösen von Gleichungen und Differenzengleichungen benötigt. Deshalb spricht man hier von *elementarer* oder *klassischer Finanzmathematik,* für die EXCEL die meisten Aufgaben lösen kann.
- Moderne Methoden:
  - Folgende Problemstellungen werden u.a. behandelt:
    Aktien, Derivate, Finanzmarktmodelle, Fonds, Optionen, Portfolios, Wertpapiere.
  - Als mathematische Hilfsmittel werden tiefliegende Kenntnisse der mathematischen Analysis und Stochastik benötigt, so u.a. über Maßtheorie, stochastische Prozesse (Wiener Prozesse), stochastische Differentialgleichungen (z.B. Black-Scholes-Gleichungen). Deshalb spricht man bei diesen Methoden von *moderner Finanzmathematik*.

Bemerkung

Die Finanzmathematik hat sich zu einem eigenständigen Gebiet der Wirtschaftsmathematik entwickelt, wie sich in der zahlreichen Literatur zur Finanzmathematik widerspiegelt. Deshalb wird die Finanzmathematik in Lehrbüchern der Wirtschaftsmathematik nur einführend behandelt, wobei man sich auf Gebiete der elementaren Finanzmathematik beschränkt.
Wir schließen uns dieser Vorgehensweise an, da ein tieferes Eindringen den Rahmen des Buches sprengen würde:

- Für moderne Methoden der Finanzmathematik verweisen wir auf die Literatur, von der wir im Literaturverzeichnis eine Reihe deutschsprachiger Bücher zusammenstellen.
- Um EXCEL problemlos zur Lösung von Aufgaben der elementaren Finanzmathematik einsetzen zu können, geben wir im Abschn.13.2 Erläuterungen und grundlegende Formeln für die Gebiete Abschreibungs-, Zins-, Renten- und Tilgungsrechnung.

Beispiel 13.1:
Betrachten wir Beispiele zur *Abschreibungsrechnung* (siehe Abschn.13.2.1), deren Formeln sich einfach mit EXCEL berechnen lassen:

a) Eine Maschine hat einen Anschaffungswert AW von 200 000 Euro. Es ist eine Nutzungsdauer T von 10 Jahren geplant. Nach dieser Nutzungsdauer rechnet man mit einem Wiederverkaufswert (Restwert) RW_T von 10 000 Euro. Der Wertverlust W beträgt folglich 190 000 Euro. Wenden wir hierfür lineare und geometrisch-degressive Abschreibung an:

- Die *lineare Abschreibung* A als Funktion von Wertverlust W und Nutzungsdauer T hat die Form

  $$A(W,T) = \frac{W}{T}$$

  und liefert für die konkreten Werte $A(190\,000, 10) = 19\,000$
  d.h. während der zehnjährigen Nutzungsdauer ergibt sich ein *Abschreibungsbetrag* von 19 000 Euro pro Jahr.

- Die *geometrisch-degressive Abschreibung* kann folgendermaßen durchgeführt werden:
  - Der *Abschreibungsprozentsatz* p als Funktion von Anschaffungswert AW, Restwert RW_T und Nutzungsdauer T ergibt sich zu

    $$p(AW, RW_T, T) = \left(1 - \sqrt[T]{\frac{RW_T}{AW}}\right) \cdot 100$$

    und liefert für die konkreten Werte $p(200000, 10000, 10) = 25{,}8866$:
    * Mit dem berechneten Abschreibungsprozentsatz von 25,8866 % lässt sich der Abschreibungsplan (Folge der Restwerte) für die gegebene Nutzungsdauer von 10 Jahren mittels EXCEL berechnen.
    * Mittels der Formel für die Restwerte nach dem 1. , 2. , ... , 10. Jahr (siehe Abschn.13.2.1) erhält man durch Differenzenbildung zweier aufeinanderfolgender Werte folgenden *Abschreibungsplan:*
      Es sind im 1. Jahr 51800 , 2. Jahr 38300 , 3. Jahr 28480 , 4. Jahr 21080 , 5. Jahr 15620 , 6. Jahr 11580 , 7. Jahr 8580 , 8. Jahr 6350 , 9. Jahr 4 720 , 10. Jahr 3490 Euro abzuschreiben.
    * Die Summe der zehn Abschreibungen muss den gesamten Wertverlust von 190 000 Euro ergeben, wie man leicht nachrechnet.
    * Um den *genauen Wertverlust* nach den Abschreibungen zu erhalten, muss für den Abschreibungsprozentsatz p die Genauigkeit entsprechend hoch gewählt werden. Wir haben erst nach der dritten Kommastelle gerundet.
  - Die *Nutzungsdauer* T als Funktion von Anschaffungswert AW, Restwert RW_T und Abschreibungsprozentsatz p ergibt sich zu

    $$T(AW, RW_T, p) = \ln\left(\frac{RW_T}{AW}\right) / \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

- EXCEL stellt über 50 Funktionen zur Finanzmathematik zur Verfügung. Deshalb illustrieren wir im Abschn.13.3, wie man diese Funktionen einsetzt und lösen in den Beisp.13.5-13.10 eine Reihe von Standardaufgaben.

♦

13.2 Grundbegriffe und Formeln

Im Folgenden stellen wir häufig benötigte Gebiete der elementaren Finanzmathematik vor und erklären grundlegende Begriffe und Formeln für den Einsatz von EXCEL.

13.2.1 Abschreibungsrechnung

Die *Abschreibungsrechnung* befasst sich mit dem *Wertverlust* (der *Wertminderung*) von Gegenständen und Gütern im Verlauf ihrer Nutzungsdauer T:

- Unter *Nutzungsdauer* T wird die wirtschaftliche Nutzungsdauer verstanden, die diejenige Zeit darstellt, in der betrachtete Gegenstände/Güter ökonomisch zweckmäßig aufgrund von technischem Fortschritt und/oder Bedarfswandel eingesetzt werden können.
- Die *wirtschaftliche Nutzungsdauer* ist von der *technischen Nutzungsdauer* zu unterscheiden, die die Lebensdauer des Gutes durch Abnutzung (Verschleiß), Alterung usw. kennzeichnet.
- Bei der Abschreibung wird der Wertverlust eines Gutes auf die gesamte Nutzungsdauer des Gutes verteilt und in der Regel jährlich abgeschrieben:
  - Der *Anschaffungswert* (Anfangswert) AW des Gutes wird pro Jahr um einen gewissen Betrag (*Abschreibungsrate*) verringert, so dass am Ende der Nutzungsdauer T der *Restwert* (Wiederverkaufswert) RW übrig bleibt.
  - Der *Wertverlust* W eines Gutes während der gesamten Nutzungsdauer T ergibt sich folglich als Differenz $W = AW - RW$ aus Anschaffungswert AW und Restwert RW.
- Je nach Art der jährlichen Abschreibung unterscheidet man zwischen folgenden Abschreibungsarten:
  - Bei *linearer Abschreibung*
    - ∗ berechnet sich die jährliche *Abschreibungsrate* A aus
      $A = \frac{W}{T} = \frac{AW - RW}{T}$, so dass für den Restwert $RW = AW - T \cdot A$ folgt.
    - ∗ Der Wert eines Gutes wird hier in jährlich gleichen Raten A über die gesamte Nutzungsdauer T abgeschrieben.
    - ∗ Wenn der Restwert RW = 0 ist, berechnet sich die erforderliche Abschreibungsrate A wegen $0 = AW - T \cdot A$ aus der Formel $A = \frac{AW}{T}$
  - Bei *arithmetisch-degressiver* (linear-degressiver) *Abschreibung*
    - ∗ wird der Abschreibungsverlauf durch Vorgabe der ersten Abschreibungsrate A_1 und der Differenz D zur nächsten Abschreibungsrate bestimmt, d.h. die Abschreibungsraten A_t nehmen arithmetisch ab.

Wenn man jetzt den berechneten Abschreibungsprozentsatz p von 25,8866% für Anschaffungswert AW = 200 000 und Restwert RW_T = 10000 vorgibt, folgt aus dieser Formel $T(200000, 10000, 25{,}8866) = 10$
d.h. die obige vorgegebene Nutzungsdauer von 10 Jahren.

b) Eine Maschine hat einen Anschaffungswert von 8 000 Euro. Die Nutzungsdauer betrage 6 Jahre. Danach rechnet man mit einem Wiederverkaufswert (Restwert) von 500 Euro, d.h. der Wertverlust beträgt 7 500 Euro. Der Abschreibungsbetrag A_1 nach dem ersten Jahr wird mit 2 000 Euro vorgegeben:

- Bei *arithmetisch-degressiver Abschreibung* ergibt sich die Differenz D als Funktion des ersten Abschreibungsbetrages A_1, der Nutzungsdauer T und des Wertverlusts W zu

$$D(A_1, T, W) = \frac{2 \cdot (T \cdot A_1 - W)}{T \cdot (T-1)}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $D(2000, 6, 7500) = 300$

- Damit ergibt sich folgender *Abschreibungsplan*:
Im 1. Jahr sind 2000 Euro, im 2. Jahr 1700 Euro, im 3. Jahr 1400 Euro, im 4. Jahr 1100 Euro, im 5. Jahr 800 Euro und im 6. und letzten Jahr 500 Euro abzuschreiben, so dass der gegebene Restwert von 500 Euro übrigbleibt.

Beispiel 13.2:

Betrachten wir Beispiele zur *Zinsrechnung* (siehe Abschn.13.2.2), deren Formeln sich einfach mit EXCEL berechnen lassen:

a) Ein Sparer legt bei einer Bank einen Geldbetrag (*Anfangskapital*) von $K_0 = 20\,000$ Euro bei einem Zinsfuß p = 5% für T = 7 Jahre an. Am Ende der Anlegezeit T erhält er den Gesamtbetrag (*Endkapital*) K_T (= Zinsen + Anfangskapital) zurück. Im Folgenden wird das Endkapital K_T mit verschiedenen Verzinsungsarten berechnet:

a1) Bei *einfacher Verzinsung* ergibt sich das Endkapital K_T als Funktion von Anfangskapital K_0, Zinsfuß p und Laufzeit T zu

$$K_T(K_0, p, T) = K_0 \cdot \left(1 + T \cdot \frac{p}{100}\right)$$

so dass für die konkreten Werte folgt $K_T(20000, 5, 7) = 27000$

d.h. das Anfangskapital vergrößert sich auf das Endkapital von 27 000 Euro.

a2) Bei *Zinseszins* ergibt sich das Endkapital K_T als Funktion von Anfangskapital K_0, Zinsfuß p und Laufzeit T aus der Zinseszinsformel zu

$$K_T(K_0, p, T) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^T$$

so dass für die konkreten Werte folgt $K_T(20000, 5, 7) = 28142$

* Da die Summe der Abschreibungsbeträge gleich dem Wertverlust W nach der Nutzungsdauer T sein muss, ergibt sich unter Anwendung endlicher arithmetischer Reihen (siehe Abschn.2.7.6) die Formel

$$W = AW - RW = \sum_{t=1}^{T} A_t = \sum_{t=1}^{T} (A_1 - (t-1) \cdot D) = T \cdot A_1 - \frac{T \cdot (T-1)}{2} \cdot D$$

worin A_t den *Abschreibungsbetrag* der Periode t bezeichnet.

* Die gegebene Formel für den Abschreibungsbetrag liefert einen *Zusammenhang* zwischen den vier Größen D, A_1, T und W, so dass bei Vorgabe von drei die vierte Größe berechenbar ist:
  – So ergibt sich D als Funktion des ersten Abschreibungsbetrages A_1, der Nutzungsdauer T und des Wertverlusts W in der Form

$$D(A_1, T, W) = \frac{2 \cdot (T \cdot A_1 - W)}{T \cdot (T-1)}$$

  – Wegen $D > 0$ und $A_T = A_1 - (T-1) \cdot D > 0$ erhält man für A_1

$$2 \cdot \frac{W}{T} > A_1 > \frac{W}{T}$$

d.h. A_1 muss im offenen Zahlenintervall $(W/T, 2 \cdot W/T)$ liegen.

- Bei *geometrisch-degressiver Abschreibung* wird pro Jahr der Abschreibungszinssatz i = p/100 (p-Abschreibungsprozentsatz, Abschreibungszinsfuß) vom Restwert aus dem vorhergehenden Jahr abgeschrieben, wobei i und damit auch p während der gesamten Laufzeit konstant sind:
  * Mit Anschaffungswert AW ergeben sich in den einzelnen Jahren der Nutzungsdauer T folgende *Restwerte* RW_t:

Restwert nach 1 Jahr: $RW_1 = (1-i) \cdot AW$

Restwert nach 2 Jahren: $RW_2 = (1-i) \cdot RW_1 = (1-i)^2 \cdot AW$

$$\vdots$$

Restwert nach t Jahren: $RW_t = (1-i) \cdot RW_{t-1} = (1-i)^t \cdot AW$

  * Damit ist RW_t Lösung der Differenzengleichung $RW_t = (1-i) \cdot RW_{t-1}$ mit der Anfangsbedingung $RW_0 = AW$, die eine analoge Form wie die der Zinseszinsrechnung hat (siehe Abschn.13.2.2).
  * Die Restwerte RW_t bilden wegen $0<1-i<1$ für t = 1, 2, ... , T eine monoton fallende geometrische Folge (siehe Abschn.2.7.6).
  * Für t = T folgt für den *Restwert* RW_T nach Nutzungsdauer T die Formel

$$RW_T = (1-i)^T \cdot AW = \left(1 - \frac{p}{100}\right)^T \cdot AW$$

d.h. das Anfangskapital hat sich in sieben Jahren auf das Endkapital von 28142 Euro vergrößert, das offensichtlich höher als bei einfacher Verzinsung ist.

a3) Bei *stetiger Verzinsung* ergibt sich das Endkapital K_T als Funktion von Anfangskapital K_0, Zinsfuß p und Laufzeit T zu

$$K_T(K_0, p, T) = K_0 \cdot e^{T \cdot \frac{p}{100}}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $K_T(20000, 5, 7) = 28\,380$

d.h. das Anfangskapital hat sich in sieben Jahren auf das Endkapital von 28 380 Euro vergrößert, das offensichtlich größer als bei jährlicher Verzinsung mittels Zinseszins im Beisp.a2 ist.

b) Ein Sparer möchte in 8 Jahren bei einem Zinsfuß von p = 4% ein *Endkapital* von $K_T =$ 10 000 Euro ansparen. Welches *Anfangskapital* K_0 muss er bei *einfacher Verzinsung* bzw. *Zinseszins* einzahlen, d.h. wie groß ist der Barwert:

- Bei *einfacher Verzinsung* (siehe Beisp.a1) ergibt sich das *Anfangskapital* K_0 als Funktion von Endkapital K_T, Zinsfuß p und Laufzeit T zu

$$K_0(K_T, p, T) = \frac{K_T}{\left(1 + T \cdot \frac{p}{100}\right)}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $K_0(10000, 4, 8) = 7576$

- Bei *Zinseszins* (siehe Beisp.13.2a2) ergibt sich das *Anfangskapital* K_0 als Funktion von Endkapital K_T, Zinsfuß p und Laufzeit T zu

$$K_0(K_T, p, T) = \frac{K_T}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^T}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $K_0(10000, 4, 8) = 7307$

Beispiel 13.3:

Betrachten wir Beispiele zur *Rentenrechnung* (siehe Abschn.13.2.3):

a) Ein Sparer zahlt jährlich-nachschüssig 2000 Euro auf sein Bankkonto mit Zinseszins ein, für das es 5% Zinsen gibt:

- Wie groß ist der Kontostand nach 10 Jahren, d.h. der Rentenendwert.
- Der *nachschüssige Rentenendwert* R_{Tn} als Funktion von Rentenrate R, Zinsfaktor q und Laufzeit T ergibt sich zu (siehe Beisp.2.11c)

$$R_{Tn}(R, q, T) = R \cdot \frac{1-q^T}{1-q}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $R_{Tn}(2000, 1{,}05, 10) = 25155{,}79$

d.h. das Konto ist auf 25155,79 Euro (Rentenendwert) angewachsen.

b) Ein Student erhält 5 Jahre lang nachschüssig 1000 Euro pro Jahr, die er mit Zinseszins zu 5% anspart. Er möchte aber bereits jetzt über den Gesamtwert der Rente (abzüglich zu zahlender Zinsen) verfügen, d.h. er benötigt den Rentenbarwert:

* Die gegebene Formel für den Restwert liefert einen *Zusammenhang* zwischen den vier Größen RW_T, i bzw. p, T und AW, so dass bei Vorgabe von drei die vierte Größe berechenbar ist, so z.B.:
  – *Abschreibungsprozentsatz* durch Auflösung nach p:
  $$p = \left(1 - \sqrt[T]{\frac{RW_T}{AW}}\right) \cdot 100$$
  bei gegebenen Anschaffungswert AW, Nutzungsdauer T und Restwert RW_T.
  – *Nutzungsdauer* durch Auflösung nach T unter Verwendung des natürlichen Logarithmus:
  $$T = \ln\left(\frac{RW_T}{AW}\right) / \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right)$$
  bei gegebenen Anschaffungswert AW, Abschreibungsprozentsatz p und Restwert RW_T.

13.2.2 Zinsrechnung

Zinsen sind eine grundlegende Größe in der Finanzmathematik:

- Zinsen bilden im Geldverkehr (Kapitalverkehr) eine Vergütung für leihweise überlassenes Geld (Kapital K), das geliehen (Leihzinsen) oder verliehen (Guthabenzinsen) wird. Sie hängen i.Allg. von der Höhe des Geldbetrages und der Länge der Leihzeit (Laufzeit T) ab.
- Bei der Berechnung von Zinsen unterscheiden sich die Methoden nach
  - Zeitpunkt der Zinsverrechnung (*jährlich*, *unterjährig*, *stetig*), wenn das Geld (Kapital K) weiter angelegt bleibt.
  - Weiterverrechnung der Zinsen:
    * Bei *einfacher Zinsrechnung* werden Zinsen zum Zeitpunkt ihrer Fälligkeit nicht dem Kapital zugeschlagen sondern ausgezahlt (siehe Beisp.13.2a1).
    * Bei *Zinseszinsrechnung* werden fällige Zinsen dem Kapital zugeschlagen und weiterverzinst (siehe Beisp.13.2a2). Dies führt zum sogenannten Zinseszinseffekt und man spricht von *Zinseszinsen*.
- Folgende *Grundgrößen* werden in der Zinsrechnung benötigt:
  Kapital (Geld) K , Zinssatz i = p/100 , Zinsfuß p , Zinsfaktor q = 1+i , Aufzinsungsfaktor q^T, Abzinsungsfaktor (Diskontierungsfaktor, Barwertfaktor) q^{-T}, Laufzeit T , Anfangskapital (Barwert) K_0 zu Beginn der Laufzeit , Endkapital K_T nach Laufzeit T.
- *Zinssatz* und *Zinsfuß* sind folgendermaßen *charakterisiert:*
  - Lehrbücher der Finanzmathematik
    * verwenden für Zinsfuß oft die Bezeichnung *Prozentzinssatz*, um hierdurch auszudrücken, dass dieser in Prozent angegeben wird.
    * sprechen manchmal nur vom *Zins* und es ist erst aus Anwendungen ersichtlich, ob Zinssatz oder Zinsfuß gemeint sind.

- Der *nachschüssige Rentenbarwert* R_0 als Funktion von Rentenrate R, Zinsfaktor q und Laufzeit T ergibt sich zu

$$R_0(R,q,T) = R \cdot \frac{1-q^T}{q^T \cdot (1-q)}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $R_0(1000\,,1{,}05\,,5) = 4329$

d.h. der Rentenbarwert beträgt 4329 Euro.

- Das berechnete Ergebnis bedeutet:
  - ∗ wenn 4329 Euro zu 5% gespart werden, erhält der Student 5 Jahre lang jährlich-nachschüssig 1000 Euro.
  - ∗ Der Student kann sich sofort den Barwert von 4329 Euro auszahlen lassen.

c) Ein Student erhält für sein fünfjähriges Studium einen Geldbetrag von 20000 Euro (*Rentenbarwert*) geschenkt, den er auf sein Bankkonto einzahlt:

- Welchen Betrag (*Rentenrate*) kann er nachschüssig bei 4% Zinsen (d.h. *Zinsfaktor* 1,04) pro Jahr von seiner Bank abheben, damit das Geld fünf Jahre (*Laufzeit*) reicht.
- Die *Rentenrate* R als Funktion von Rentenbarwert R_0, Zinsfaktor q und Laufzeit T ergibt sich zu

$$R(R_0,q,T) = R_0 \cdot q^T \cdot \frac{1-q}{1-q^T}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $R(20000\,,1{,}04\,,5) = 4493$

d.h. pro Jahr können 4493 Euro abgehoben werden.

d) Berechnen wir für die Aufgabe aus Beisp.13.3c die *Laufzeit*, wenn vom Rentenbarwert 20000 Euro jährlich 4493 Euro *nachschüssig abgehoben* werden, wobei der Zins 4% beträgt:

- Die *Laufzeit* T als Funktion von Rentenbarwert R_0, Rentenrate R und Zinsfaktor q ergibt sich zu (siehe Abschn.13.2.3)

$$T(R_0, R, q) = \frac{\ln\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{R_0}{R}\cdot(1-q)}\right)}{\ln(q)}$$

so dass für die konkreten Werte folgt $T(20000, 4493, 1{,}04) = 4{,}999$

- Damit ist nach 5 Jahren das Guthaben aufgebraucht, wie aus Beisp.13.3c zu sehen ist.

e) Eine Versicherung bietet eine *Rente* an, bei der in den kommenden 10 Jahren monatlich (am Monatsende, d.h. *nachschüssig*) 1000 Euro gezahlt werden. Sie verlangt für diese Rente eine Einzahlung von 100000 Euro, wofür sie eine Verzinsung von 5 % zugrundelegt. Durch Berechnung des *Rentenbarwertes* lässt sich nachprüfen, ob dies ein vorteilhaftes Angebot ist:

- Wir verstehen im Folgenden unter *Zinssatz* i bzw. *Zinsfuß* p den Betrag an Zinsen, der für 1 Euro (Zinssatz) bzw. für 100 Euro (Zinsfuß) Kapital gezahlt wird und geben den Zinsfuß in *Prozent* an.
- Zwischen Zinssatz i und Zinsfuß p besteht somit der Zusammenhang $i = p/100$.

Im Folgenden befassen wir uns mit *Zinseszinsrechnung*, von der zwei wichtige *Vorgehensweisen* vorgestellt werden, wobei die erste für Privatkunden in Banken häufig Anwendung findet:

- *Diskrete* (diskontinuierliche) *Verzinsung:*
  Hier wird die Laufzeit T für einen eingezahlten Geldbetrag (Anfangskapital K_0) in eine endliche Anzahl n von Perioden aufgeteilt (*n-Perioden-Modell*):
  - Als Periode wird häufig ein Jahr genommen, so dass man von *jährlicher Verzinsung* spricht im Gegensatz zur *unterjährigen Verzinsung*, bei der man einen kürzeren Zeitraum (z.B. Monat) festlegt.
  - Am Ende jeder Periode werden anfallende Zinsen zum Kapital addiert und künftig mitverzinst.
  - Damit berechnet sich das Kapital K_t nach der t-ten Periode aus dem Kapital K_{t-1} der (t-1)-ten Periode mittels der Beziehung

    $$K_t = K_{t-1} + K_{t-1} \cdot i = K_{t-1} \cdot (1+i) \qquad (t = 1 , 2 , ... , T)$$

    in der i = p/100 für den Zinssatz und p für den Zinsfuß in Prozent stehen:
    * Dies ist eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung, die für ein Anfangskapital K_0 die Lösung (siehe Kap.10 und Beisp.10.1a und 10.5a)

      $$K_t = K_0 \cdot (1 + i)^t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

      besitzt, die man als *Zinseszinsformel* bezeichnet.
    * Bei Zinseszins wird ein höheres Endkapital als bei einfacher Verzinsung geliefert, wie im Beisp.13.2 illustriert ist.
  - Bei *jährlicher Verzinsung* liefert die Zinseszinsformel für das Endkapital K_T nach einer Laufzeit von T Jahren die Berechnungsformel

    $$K_T = K_0 \cdot (1 + i)^T = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^T = K_0 \cdot q^T$$

    in der man q^T als *Aufzinsungsfaktor* bezeichnet, da sich das Endkapital K_T durch Multiplikation des Anfangskapitals K_0 mit diesem Faktor ergibt.
  - Die Zinseszinsformel stellt einen *Zusammenhang* zwischen den vier Größen K_T, K_0, i bzw. p und T her, so dass bei Vorgabe von drei die vierte berechenbar ist:
    * Zinssatz $$i = \sqrt[T]{\frac{K_T}{K_0}} - 1$$

- Mit der Funktion für den Rentenbarwert (siehe Beisp.13.3b) folgt für die konkreten Werte

  $$R_0(1000\,,\,1+0{,}05/12\,,\,10\cdot 12)\;=94\,281{,}35$$

  wobei zu beachten ist, dass sich der Zinsfuß auf ein Jahr bezieht, d.h. man muss bei monatlicher Zahlung durch 12 dividieren.
- Der berechnete *Rentenbarwert* von 94 281,35 Euro bedeutet, dass man monatlich 1000 Euro für 10 Jahre abheben kann, bis der eingezahlte Betrag und gezahlte Zinsen aufgebraucht sind.
- Der berechnete Rentenbarwert zeigt, dass die von der Versicherung angebotene Rente nicht günstig ist, da 100 000 Euro verlangt werden, obwohl schon 94 281,35 Euro reichen.

Beispiel 13.4:
Betrachten wir Beispiele zur *Tilgungsrechnung* (siehe Abschn.13.2.4):

a) Wie hoch ist bei *Annuitätentilgung* für einen Kredit von 60 000 Euro bei einem Zinsfuß von 6,2% pro Jahr und einer Tilgungszeit von 60 Monaten die Annuität:
   - Die *Annuität* A als Funktion der Gesamtschuld S_0, des Zinsfaktors q = i+1 und der Laufzeit T ergibt sich zu

     $$A(S_0,q,T)\;=\;S_0\cdot q^T\cdot\frac{1-q}{1-q^T}$$

     so dass für die konkreten Werte folgt A(60000, 1+0,062/12, 60) = 1165,56
     d.h. die *Annuität* (konstanter Rückzahlungsbetrag) beträgt 1165,56 Euro pro Monat.
   - Es ist zu beachten, dass sich der Zinssatz i auf ein Jahr bezieht und somit für die Berechnung pro Monat durch 12 zu teilen ist.

b) Berechnen wir für Beisp.13.4a die *Laufzeit* T:
   - Es ist die Zeit T gesucht, um einen Kredit von 60000 Euro bei einem Zinsfuß von 6,2% pro Jahr mit einer monatlichen Rate von 1165,56 Euro abzuzahlen.
   - Die *Laufzeit* T als Funktion von Gesamtschuld S_0, Annuität A und Zinssatz i ergibt sich zu

     $$T(A,S_0,i)\;=\;\frac{\ln A-\ln(A-S_0\cdot i)}{\ln(1+i)}$$

     so dass für die konkreten Werte folgt T(60000, 1165,56, 0,062/12) = 60
   - Der Kredit ist in Übereinstimmung mit Beisp.13.4a. nach 60 Monaten abgezahlt.

Beispiel 13.5:
Wenden wir die finanzmathematische Funktion

LIA (Ansch-Wert **;** Restwert **;** Nutzungsdauer)

von EXCEL zur *Abschreibungsrechnung* an:

- **LIA** kann die *lineare Abschreibung* bei gegebenen Anschaffungswert, Restwert und Nutzungsdauer berechnen.
- Geben wir eine Illustration, indem wir die Aufgabe aus Beisp.13.1a lösen:

* Laufzeit $T = \dfrac{\ln K_T - \ln K_0}{\ln(1+i)}$

* Anfangskapital (Barwert) $K_0 = \dfrac{K_T}{(1+i)^T} = K_T \cdot q^{-T}$

  Diese Formel dient zur *Barwertermittlung* (Gegenwartswert) des Kapitals bei Abzinsung:

  – K_0 ist der Anfangswert, der nach T Jahren bei Verzinsung mit Zinseszins zum Endkapital K_T anwächst.

  – Deshalb werden K_0 als *diskontierter Barwert* von K_T und q^{-T} als *Abzinsungsfaktor* (Diskontierungsfaktor, Barwertfaktor) bezeichnet.

● *Stetige* (kontinuierliche) *Verzinsung:*
Wenn man beim n-Perioden-Modell der diskreten Verzinsung zum Grenzfall übergeht, d.h. n gegen Unendlich gehen lässt, ergibt sich das Modell der *stetigen Verzinsung*, in dem das Kapital K(t) eine Funktion von t ist mit $K(0) = K_0$:

- Die Formel für das Endkapital K_T nach einer Laufzeit von T Jahren

  $$K(T) = K_T = K_0 \cdot e^{T \cdot i} = K_0 \cdot e^{T \cdot \frac{p}{100}}$$

  bei *stetiger Verzinsung* wird als Lösung einer *Wachstumsdifferentialgleichung* erhalten (siehe Beisp.10.1a und Abschn.11.4.2):

  * Man spricht von Endwertermittlung des Kapitals bei *stetiger Aufzinsung*.
  * Das Endkapital ist hier größer als bei diskreter Verzinsung, wie im Beisp.13.2 illustriert ist.

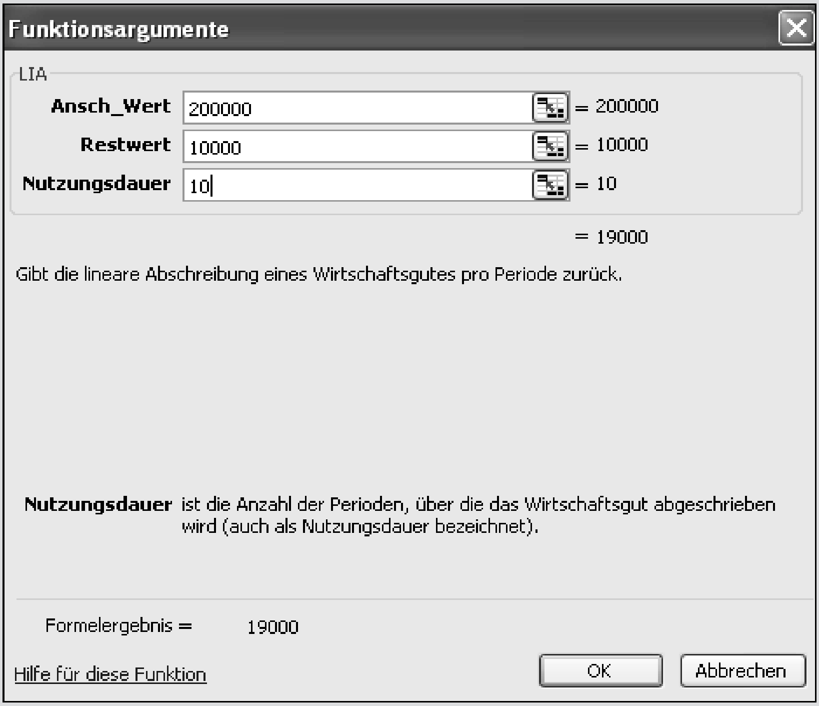
- Die Formel für die stetige Verzinsung liefert einen *Zusammenhang* zwischen den vier Größen K_T, K_0, i bzw. p und T, so dass bei Vorgabe von drei die vierte berechenbar ist:

  * Löst man die Formel für das Endkapital z.B. nach dem *Anfangskapital* (Barwert) K_0 auf, so erhält man

    $$K_0 = K_T \cdot e^{-T \cdot i} = K_T \cdot e^{-T \cdot \frac{p}{100}}$$

  * Diese Formel dient zur *Barwertermittlung* (Gegenwartswert) des Kapitals bei stetiger Abzinsung.
  * Da K_0 nach T Jahren bei stetiger Verzinsung zu K_T anwächst, bezeichnet man K_0 als *diskontierten Barwert* von K_T und $e^{-i \cdot T}$ als *Abzinsungsfaktor* (Diskontierungsfaktor, Barwertfaktor).

* Es ist eine Maschine mit Anschaffungswert = 200000 Euro, Restwert = 10000 Euro und Nutzungsdauer = 10 Jahre *linear abzuschreiben*.
* EXCEL liefert mittels **LIA** (200000 **;** 10000 **;** 10) den *Abschreibungsbetrag* von 19 000 Euro pro Jahr, wie aus folgendem Dialogfeld **Funktionsargumente** des Funktions-Assistenten ersichtlich ist.



Beispiel 13.6:

Wenden wir die finanzmathematische Funktion

GDA2 (Ansch_Wert **;** Restwert **;** Nutzungsdauer **;** Periode)

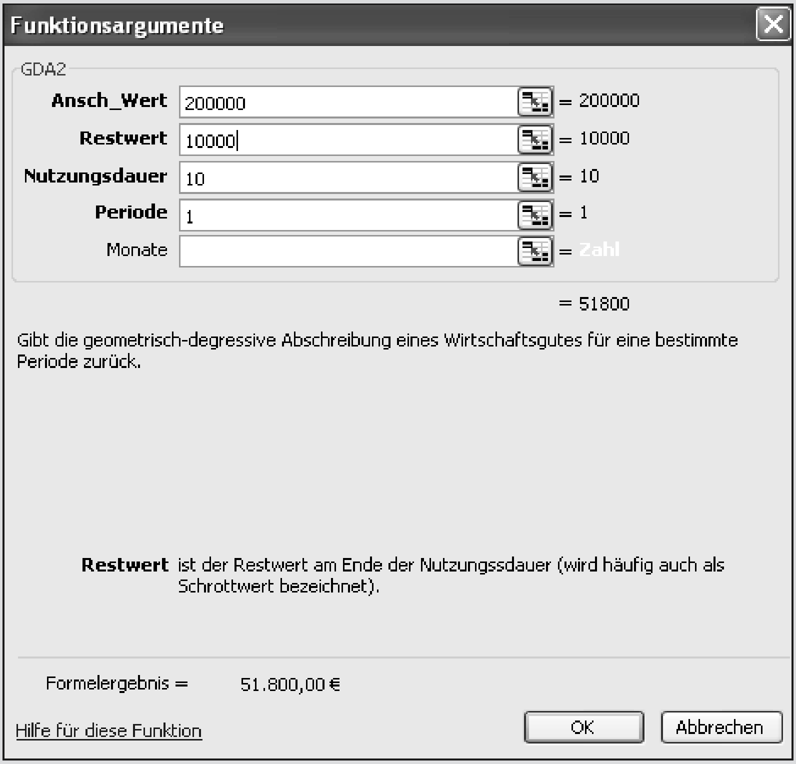
von EXCEL zur *Abschreibungsrechnung* an:

- **GDA2** kann die *geometrisch-degressive Abschreibung* bei gegebenen Anschaffungswert, Restwert, Nutzungsdauer und Periode berechnen.
- Geben wir eine Illustration, indem wir die Aufgabe aus Beisp.13.1a lösen:
  * Es ist die *Abschreibung* einer Maschine mit Ansch_Wert = 200 000 Euro, Restwert = 10 000 Euro, Nutzungsdauer = 10 Jahre nach dem ersten Jahr (Periode = 1 Jahr) zu berechnen.
  * EXCEL liefert mittels **GDA2** (200000 **;** 10000 **;** 10 **;** 1) den *Abschreibungsbetrag* im ersten Jahr von 51 800 Euro, wie aus folgendem Dialogfeld **Funktionsargumente** des Funktions-Assistenten ersichtlich ist:

13.2.3 Rentenrechnung

Die *Rentenrechnung* ist in der Finanzmathematik folgendermaßen charakterisiert:

- Als *Rente* bezeichnet man *regelmäßig wiederkehrende* (d.h. periodisch erfolgende) *Zahlungen* eines (konstanten) Geldbetrages. Die Rente stellt die Gesamtheit aller Zahlungen dar, während einzelne Zahlungen als Raten bezeichnet werden.
- Typische Beispiele für Renten sind Mieten, Löhne und Gehälter, Versicherungsbeiträge, Mitgliedsbeiträge in Vereinen, Altersrenten, Kreditrückzahlungen, regelmäßige Einzahlungen auf ein Sparkonto, d.h. es werden nicht nur *regelmäßige Auszahlungen*, wie z.B. Altersrenten, sondern auch *regelmäßige Einzahlungen* (z.B. auf ein Konto) als Renten bezeichnet.
- Man spricht von
  - *vorschüssiger Rente*, wenn die Zahlung zu Beginn einer Periode (z.B. eines Monats oder Jahres) vorgenommen wird.
  - *nachschüssiger Rente*, wenn die Zahlung zum Ende einer Periode vorgenommen wird.
  - *endlicher Rente*, wenn nur für eine begrenzte Zeit gezahlt wird.
  - *unendlicher Rente*, wenn die Laufzeit einer Rente nicht beschränkt ist.
- Folgende *Grundgrößen* werden bei der Rentenrechnung benötigt:
  Rentenbarwert R_0, Rentenendwert R_T, Rentenrate R, Zinsfaktor $q = 1+i = 1+p/100$ und Laufzeit T.
- Typische Fragestellungen der Rentenrechnung sind:
  - Frage nach dem *Rentenendwert* (Rentengesamtwert) R_T:
    * Wieviel Geld sammelt sich in T Jahren bei einer festen periodischen Zahlung R (Rentenrate) an, wenn das jeweils vorhandene Geld jährlich mit Zinsfuß p% verzinst wird.
    * Der Rentenendwert ist damit das gesamte angesammelte Geldkapital am Ende der Laufzeit einer Rente und wird bei vorschüssiger Zahlung mit R_{Tv} und bei nachschüssiger mit R_{Tn} bezeichnet.
    * Der Rentenendwert bildet die Grundlage für alle Problemlösungen in der Rentenrechnung.
  - Frage nach dem *Rentenbarwert* R_0:
    * Wie groß muss ein eingezahlter Geldbetrag bei jährlicher Verzinsung mit Zinsfuß p% sein, wenn hiervon periodische Auszahlungen R (Rentenrate) für T Jahre durchgeführt werden sollen.
    * Der Rentenbarwert stellt den Geldwert einer Rente dar, deren Auszahlung, Laufzeit, Zins und Zahlungsperioden bekannt sind:
      – Er stellt den Wert der gesamten Rente am Anfang der Rentenlaufzeit dar.
      – Er ist der Betrag, der einmalig zu Beginn der Laufzeit angelegt, nach T Jahren den Rentenendwert ergibt, d.h. es gilt $R_0 \cdot q^T = R_T$.



∗ Durch Eingabe weiterer Perioden 2,..,10 kann man hiermit den Abschreibungsplan aus Beisp.13.1a berechnen.

Beispiel 13.7:

Wenden wir die finanzmathematische Funktion **ZW** (Zins **;** Zzr **;** Rmz **;** Bw **;** F) von EXCEL zur *Zinseszinsrechnung* (siehe Abschn.13.2.2) an:

- **ZW** kann das *Endkapital* bei gegebenen Zins, Laufzeit (Zzr) und Anfangskapital (Bw) berechnen, d.h. es wird die Zinseszinsformel eingesetzt:
- Geben wir eine Illustration, indem wir die Aufgabe aus Beisp.13.2a2 lösen:
  - Es ist das *Endkapital* zu berechnen, dass ein Sparer erhält, der einen Geldbetrag (*Anfangskapital*) von 20000 Euro bei einem Zinsfuß von 5% für 7 Jahre mit Zinseszins bei einer Bank anlegt.
  - EXCEL liefert mittels **ZW** (5% **;** 7 **; ;** –20000) das *Endkapital* von 28142,01 Euro, wie aus dem abgebildeten Dialogfeld **Funktionsargumente** des Funktions-Assistenten ersichtlich ist.
- Bei der Anwendung von **ZW** ist Folgendes zu beachten:
  - Das Anfangskapital muss bei Bw mit negativem Vorzeichen eingegeben werden, um die Zahlungsrichtung anzuzeigen. Gibt man es mit positivem Vorzeichen ein, so gibt EXCEL das Ergebnis (Endkapital) negativ an.

- Frage nach der *Rentenrate* R:
  Wieviel kann bei jährlicher Verzinsung mit Zinsfuß p% pro Jahr abgehoben werden, damit ein zur Verfügung stehender Geldbetrag (Rentenbarwert) R_0 eine gegebene Anzahl T von Jahren reicht.

- Die *Grundgrößen* der Rentenrechnung bestimmen sich unter Anwendung geometrischer Reihen (siehe Abschn.2.7.6 und Beisp.2.11c) folgendermaßen:
  - Der *Rentenendwert* (Rentengesamtwert) R_T berechnet sich für die Laufzeit T unter der Voraussetzung q>1 (d.h. i>0):
    - ∗ bei *vorschüssiger Rente* aus $$R_{Tv} = R \cdot q \cdot \frac{1-q^T}{1-q}$$
    - ∗ bei *nachschüssiger Rente* aus $$R_{Tn} = R \cdot \frac{1-q^T}{1-q}$$
  - Der *Rentenbarwert* R_0 für die Laufzeit T berechnet sich mittels $R_0 \cdot q^T = R_T$, so dass sich folgende Formeln ergeben:
    - ∗ Bei *vorschüssiger Rente* $$R_0 = \frac{R_{Tv}}{q^T} = R \cdot \frac{1-q^T}{q^{T-1} \cdot (1-q)}$$
    - ∗ Bei *nachschüssiger Rente* $$R_0 = \frac{R_{Tn}}{q^T} = R \cdot \frac{1-q^T}{q^T \cdot (1-q)}$$
  - Die *Rentenrate* R bei einer Laufzeit T

    berechnet sich aus $$R = R_0 \cdot q^T \cdot \frac{1-q}{1-q^T}$$

    Diese Formel erhält man, wenn man die gegebene Formel für den Rentenbarwert bei nachschüssiger Rente nach R auflöst.
  - Die *Laufzeit* T berechnet sich aus $$T = \ln\left(\frac{1}{1+\frac{R_0}{R}\cdot(1-q)}\right) / \ln(q)$$

    Diese Formel erhält man, wenn man die gegebene Formel für den Rentenbarwert bei nachschüssiger Rente nach T auflöst.

- Die Formeln für die Rentenrechnung liefern einen *Zusammenhang* zwischen den vier Größen R_T bzw. R_0, R, q und T, so dass bei Vorgabe von drei die vierte berechenbar ist, wie die gegebenen Formeln zeigen.

13.2.4 Tilgungsrechnung

Tilgungs- und Rentenrechnung sind miteinander verwandt. In der *Tilgungsrechnung* geht es um *Rückzahlung* (*Tilgung*) von Darlehen, Krediten, Hypotheken usw., d.h. um Rückzahlung von *Schulden* einschließlich der berechneten Zinsen:

- Bei der Zinsangabe ist sowohl der *Zinsfuß* (mit Prozentzeichen) als auch der *Zinssatz* möglich.
- Die Argumente Rmz und F werden für diese Rechnung nicht benötigt.

Beispiel 13.8:

Wenden wir die finanzmathematische Funktion **BW** (Zins **;** Zzr **;** Rmz **;** Zw **;** F) von EXCEL zur *Rentenrechnung* (siehe Abschn.13.2.3) an:

- **BW** kann den *Barwert* einer *Rente* bei gegebenen Zins, Laufzeit (Zzr), Zahlungsbetrag (Rmz) und Zahlungsart (F = 0 nachschüssig, F = 1 vorschüssig) berechnen.
- Geben wir eine Illustration, indem wir die Aufgabe aus Beisp.13.3e lösen:
  - Es ist der *Rentenbarwert* einer Rente zu berechnen, bei der in den kommenden 10 Jahren monatlich (am Monatsende, d.h. nachschüssig) 1000 Euro gezahlt werden. Für diese Rente wird eine Einzahlung von 100 000 Euro verlangt, wobei eine Verzinsung von 5 % zugrundeliegt.

- Der Schuldner kann zwischen verschiedenen *Rückzahlungsarten* (*Tilgungsarten*) wählen:
  - Rückzahlung des gesamten Betrages am Fälligkeitstag.
  - Rückzahlung in mehreren Teilbeträgen in regelmäßigen (konstanten) oder unregelmäßigen Zeitabständen (Perioden). Man spricht von
    * *vorschüssiger Tilgung*, wenn die Rückzahlung zu Beginn,
    * *nachschüssiger Tilgung*, wenn die Rückzahlung zum Ende

    einer Periode (z.B. eines Monats oder eines Jahres) vorgenommen wird.
- Die Tilgung in konstanten Zeitabständen (z.B. in Jahren) wird in der Praxis am häufigsten angewandt:
  - Sie bildet einen *Spezialfall* der *Rentenrechnung*.
  - Hierfür lassen sich Fragestellungen der Rentenrechnung auf die Tilgungsrechnung übertragen.
- Neben der Entscheidung über die Tilgungsart kann zusätzlich noch die Anzahl der tilgungsfreien Jahre festgelegt werden.
- Folgende *Grundgrößen* werden bei der Tilgungsrechnung benötigt:
  - *Gesamtschuld* S_0
  - *Restschuld* S_t

    wenn nach t Jahren nur ein Teil der Schuld getilgt ist.
  - *Tilgungsrate* R

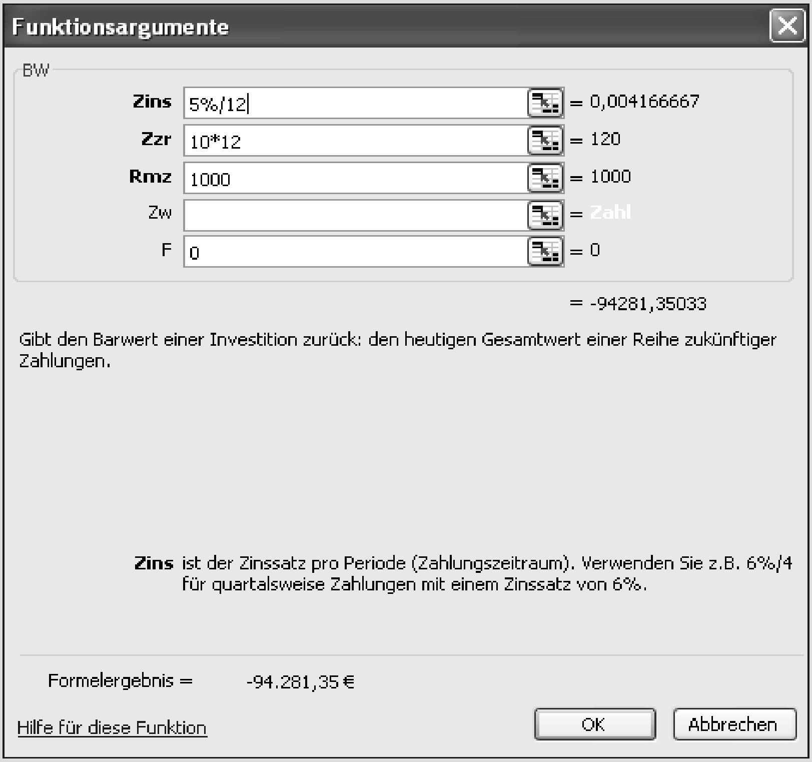
    die den Betrag bezeichnet, der am Ende eines Zeitabschnitts zur Abzahlung der Gesamtschuld zu zahlen ist.
  - *Tilgungszeit* T (Jahre)
  - *Zinsen* Z

    die für die jeweilige Restschuld nachschüssig zu zahlen sind. *Zinsfuß* und *Zinssatz* werden wie üblich mit p bzw. i und der *Zinsfaktor* i + 1 mit q bezeichnet.
  - *Annuität* A bzw. *Rückzahlungsbetrag* R_t

    bezeichnet die Summe aus Tilgungsrate R und Zinsen Z. Dabei verwendet man meistens bei der *Ratentilgung* die Bezeichnung *Rückzahlungsbetrag* und bei der *Annuitätentilgung* die Bezeichnung *Annuität*.
- Man unterscheidet folgende *Tilgungsarten*:
  - *Ratentilgung:*

    Für diese Tilgungsart ist das geliehene Kapital nach Ablauf der vereinbarten tilgungsfreien Zeit in *konstanten Tilgungsraten* R zurückzuzahlen:
    * Der Rückzahlungsbetrag R_t muss die berechneten Zinsen mit enthalten.
    * Die Zinsen nehmen im Laufe der Tilgung ab, da die Restschuld S_t kleiner wird.
    * Damit ist der *Rückzahlungsbetrag* R_t, der sich aus konstanter Tilgungsrate R und variablen (abnehmenden) Zinsen zusammensetzt, bei der Ratentilgung nicht konstant und lässt sich einfach herleiten:

- Durch die Berechnung des Rentenbarwertes lässt sich nachprüfen, ob diese Rente vorteilhaft ist.
- EXCEL liefert mittels **BW** (5%/12 ; 10·12 ; 1000 ; ; 0) den Wert –94 281,35 Euro, wie aus folgendem Dialogfeld **Funktionsargumente** des Funktions-Assistenten ersichtlich ist:



- Damit zeigt sich, dass die angebotene Rente nicht günstig ist, da 100000 Euro verlangt werden, obwohl schon 94281,35 Euro reichen.

- Bei der Anwendung von **BW** ist Folgendes zu beachten:
  - Bei der Zinsangabe ist sowohl der *Zinsfuß* (mit Prozentzeichen) als auch der *Zinssatz* möglich. Weiterhin ist zu beachten, dass der Zins durch 12 zu teilen ist, da pro Monat gerechnet wird, während sich der Zins auf das Jahr bezieht.
  - EXCEL zeigt das *Ergebnis negativ* an, da es sich um eine *Auszahlung* handelt. Das Argument Zw wird nicht benötigt.

Beispiel 13.9:

Wenden wir die finanzmathematische Funktion **ZW** (Zins **;** Zzr **;** Rmz **;** Bw **;** F) von EXCEL zur *Rentenrechnung* (siehe Abschn.13.2.3) an:

- **ZW** kann den *Rentenendwert* bei gegebenen Zins, Laufzeit (Zzr), Rentenrate (Rmz) und F (nachschüssig = 0, vorschüssig = 1) berechnen:

– In der tilgungsfreien Zeit ($t = 0, 1, 2, ..., t_f$) ist nur der Zinsbetrag $i \cdot S_0$ pro Jahr zu zahlen.
– In den restlichen Jahren $t = t_f + 1, ..., T$ berechnet sich der Rückzahlungsbetrag R_t im Rückzahlungsjahr t aus

$$R_t = i \cdot (S_0 - (t - (t_f + 1)) \cdot R) + R$$

wobei sich die Tilgungsrate R bei gleichmäßiger Ratentilgung aus

$$R = \frac{S_0}{T - t_f}$$

ermittelt, wenn zur Rückzahlungszeit T die Gesamtschuld S_0 getilgt sein soll.

- *Annuitätentilgung:*
  Bei dieser Tilgungsart bleibt die *Annuität* (Rückzahlungsbetrag) A während der gesamten Rückzahlungszeit *konstant:*
  * Da die Zinsen kleiner werden, nehmen die Tilgungsraten folglich um den gleichen Betrag zu.
  * Man erhält folgende Formeln mit dem Zinsfaktor $q = 1+i$:
    – *Restschuld:*

$$S_t = S_0 \cdot q^t - A \cdot \frac{1-q^t}{1-q}$$

Sie ergibt sich als Lösung der Differenzengleichung $S_t = q \cdot S_{t-1} - A$ mit Anfangswert S_0 (Gesamtschuld).

– *Annuität* (konstanter Rückzahlungsbetrag) A :

$$A = S_0 \cdot q^T \cdot \frac{1-q}{1-q^T}$$

Sie ergibt sich bei einer Tilgungszeit von T aus

$$0 = S_T = S_0 \cdot q^T - A \cdot \frac{1-q^T}{1-q}$$

* *Tilgungszeit*

$$T = \frac{\ln A - \ln(A - S_0 \cdot (q-1))}{\ln q} = \frac{\ln A - \ln(A - S_0 \cdot i)}{\ln(1+i)}$$

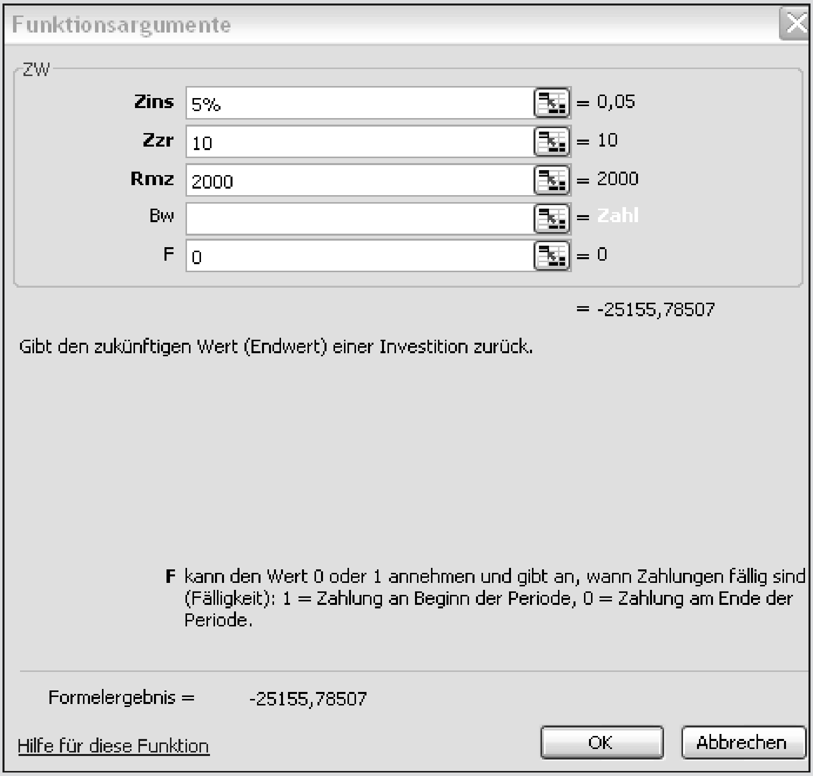
Diese Formel erhält man aus der Formel für die Restschuld, da die Restschuld für $t = T$ gleich Null ist, d.h. $S_T = 0$.

13.3 Einsatz von EXCEL

Mit EXCEL lassen sich zahlreiche finanzmathematische Aufgaben einfach lösen, ohne tiefer in die Theorie der Finanzmathematik eindringen zu müssen:

- EXCEL stellt über 50 Funktionen zur Finanzmathematik zur Verfügung und gibt in den Hilfen ausführliche Erklärungen mit Beispielen, so dass die finanzmathematischen Funktionen ohne große Schwierigkeiten einsetzbar sind:

- Geben wir eine Illustration, indem wir die Aufgabe aus Beisp.13.3a lösen:
  - Es ist der *Kontostand* zu berechnen, wenn für 10 Jahre jährlich-nachschüssig 2000 Euro auf ein Konto mit Zinseszins eingezahlt werden, auf das es 5% Zinsen gibt.
  - EXCEL liefert mittels **ZW** (5% **;** 10 **;** 2000 **;** **;** 1) den *Rentenendwert* von –25155,79 Euro, wie aus folgendem Dialogfeld **Funktionsargumente** des Funktions-Assistenten ersichtlich ist:



- Bei der Anwendung von **ZW** ist folgendes zu beachten:
  - EXCEL zeigt das *Ergebnis negativ* an, da es sich um eine Auszahlung handelt.
  - Bei der Zinsangabe ist sowohl der *Zinsfuß* (mit Prozentzeichen) als auch der *Zinssatz* möglich.
  - Das Argument Bw wird für diese Rechnung nicht benötigt.

Beispiel 13.10:

Wenden wir die finanzmathematische Funktion **RMZ** (Zins **;** Zzr **;** Bw **;** Zw **;** F) von EXCEL zur *Tilgungsrechnung* (siehe Abschn.13.2.4) an:

- **RMZ** kann die *Annuität* (Rückzahlungsbetrag) eines Kredits bei konstantem Zinssatz berechnen.
- Geben wir eine Illustration, indem wir die Aufgabe aus Beisp.13.4a lösen:

   - Deshalb brauchen wir die finanzmathematischen Funktionen nicht im Einzelnen zu erklären, sondern geben nur Hinweise zum konkreten Einsatz und einige Illustrationen (siehe Beisp.13.5-13.10).
   - Zusätzlich existiert eine Reihe von Büchern zur Finanzmathematik, in denen die Anwendung von EXCEL ausführlich erklärt wird.
- Die Anwendung finanzmathematischer Funktionen geschieht analog zur Anwendung aller EXCEL-Funktionen folgendermaßen:
   - Durch Aufruf des Funktions-Assistenten (siehe Abschn.2.2) erscheint das Dialogfeld **Funktion einfügen**, in dem man bei *Kategorie auswählen* die *Finanzmathematik* anklickt. Hier kann man auch die Hilfe aufrufen.
   - Die benötigten Argumente werden im Dialogfeld **Funktionsargumente** des Funktions-Assistenten erklärt, so dass wir im Folgenden nur einige öfters benötigte vorstellen:
      - ∗ Bw
        bezeichnet den *Barwert*.
      - ∗ F
        legt die *Fälligkeit* der *Zahlungen* (Zahlungsart) fest. Wird eine 0 oder nichts angegeben, so erfolgt die Zahlung *nachschüssig*. Bei Eingabe einer 1 wird *vorschüssig* gezahlt.
      - ∗ Rmz
        steht für *regelmäßige Zahlung* und gibt den Betrag (Zahlungsbetrag) an, der pro Periode bezahlt wird.
      - ∗ Zins
        bezeichnet den *Zinsfuß* bzw. *Zinssatz.*
      - ∗ Zzr
        gibt die Anzahl der *Zahlungszeiträume* an.
      - ∗ Zw
        steht für *zukünftiger Wert* (Endwert), der nach der letzten Zahlung erreicht werden soll. Bei einem Kredit ist er 0 und bei einem Sparvertrag gleich der abgeschlossenen Endsumme. Falls hier kein Wert eingetragen ist, wird er 0 gesetzt.

     Möchte man für ein Argument keinen Wert eingeben (falls dies zulässig ist), so muss ein *Leerzeichen* getippt werden, wenn das Argument nicht am Ende der Argumentenliste der Funktion steht. Dies ist erforderlich, da EXCEL die Zuordnung nach der Reihenfolge der Argumente trifft.

Bemerkung

Falls man für eine zu lösende Aufgabe der Finanzmathematik keine passende EXCEL-Funktion findet, kann man mittels der integrierten Programmiersprache VBA ein Programm erstellen. Dazu sind jedoch Programmierkenntnisse und die vollständige Beherrschung der zugrundeliegenden mathematischen Theorie (Formeln) erforderlich.

♦

- Es ist ein Kredit von 60 000 Euro in 60 Monaten bei einem Zinsfuß von 6,2% abzuzahlen.
- EXCEL berechnet für die konkreten Werte mittels
  RMZ (6,2%/12 **;** 60 **;** 60000)
  die *Annuität* von –1165,56 Euro, wie aus folgendem Dialogfeld des Funktions-Assistenten ersichtlich ist:

- Folglich sind 1165,56 Euro pro Monat zurückzuzahlen.
- Bei der Anwendung von **RMZ** ist Folgendes zu beachten:
  - ∗ EXCEL zeigt das *Ergebnis negativ* an, da es sich um eine Auszahlung (für den Kreditschuldner) handelt.
  - ∗ Bei der Zinsangabe ist sowohl der *Zinsfuß* (mit Prozentzeichen) als auch der *Zinssatz* möglich. Weiterhin ist zu beachten, dass der Zins durch 12 zu teilen ist, da pro Monat gerechnet wird, während sich der Zins auf das Jahr bezieht.

14 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

14.1 Einführung

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik werden in der Mathematik unter dem Oberbegriff *Stochastik* zusammengefasst:

- Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (siehe Abschn.14.4) befasst sich mit der Untersuchung von Zufallsereignissen (zufälligen Ereignissen).
- Die *Statistik* (siehe Abschn.14.5) kann in einer groben Charakterisierung als Wissenschaft von der Gewinnung, Aufbereitung und Auswertung von Daten bezeichnet werden und spielt die dominierende Rolle bei der Untersuchung von Massenerscheinungen (großen Mengen).
- Da in der Wirtschaft häufig zufällige Ereignisse und Massenerscheinungen auftreten, besitzen *Wahrscheinlichkeitsrechnung* und *Statistik* für mathematische Modelle große Bedeutung:
  - Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik haben sich in den letzten 50 Jahren zu umfangreichen und eigenständigen Gebieten der Mathematik und damit auch der Wirtschaftsmathematik entwickelt. Deshalb können sie im Buch nur kurz vorgestellt werden.
  - Da EXCEL eine Reihe von Grundaufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik lösen kann, erklären wir in diesem Kapitel oft benötigte Grundbegriffe und illustrieren den Einsatz in EXCEL integrierter Statistikfunktionen.

14.2 Anwendungsmöglichkeiten von EXCEL

Es gibt *spezielle Programmsysteme* zur Lösung von Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wie SAS, STATGRAPHICS, SYSTAT, STATISTICA, SPSS, die umfangreiche Möglichkeiten bieten.
Dies bedeutet jedoch nicht, dass EXCEL zur Lösung von Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik untauglich ist:

- In EXCEL sind zahlreiche Funktionen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik integriert (siehe Abschn.14.2.1). Im Folgenden werden wir sehen, dass EXCEL damit eine Reihe von Standardaufgaben erfolgreich lösen kann, wobei allerdings der Umfang der auszuwertenden Daten gewisse Größenordnungen nicht überschreiten darf.
- Des Weiteren werden für EXCEL von einigen Softwarefirmen sogenannte Add Ins (Zusatzprogramme) zur Statistik angeboten, die die Möglichkeiten von EXCEL wesentlich vergrößern (siehe Abschn.14.2.2).

14.2.1 Statistikfunktionen

EXCEL stellt über 70 Funktionen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zur Verfügung, die als *Statistikfunktionen* bezeichnet werden. Diese sind wie alle EXCEL-Funktionen mittels des *Funktions-Assistenten* einsetzbar:

Beispiel 14.1:
Da in EXCEL keine Funktion zur Berechnung beliebiger *Binomialkoeffizienten* gefunden wurde, stellen wir ein VBA-Funktionsprogramm BINOMIAL vor, mit dessen Hilfe der Binomialkoeffizient

$$\binom{a}{m} = \begin{cases} \dfrac{a\cdot(a-1)\cdots(a-m+1)}{m!} & \text{falls} \quad m>0 \\ 1 & \text{falls} \quad m=0 \end{cases}$$

berechnet werden kann, in dem a für beliebige reelle und m für beliebige natürliche Zahlen steht. Die folgende VBA-Programmvariante verwendet die VBA-Funktion **Fakultät** zur Berechnung der Fakultät m! für positive ganze Zahlen m:

Function BINOMIAL (a **As Double**, m **As Integer**) **As Double**

' Berechnung des Binomialkoeffizienten

Dim k **As Integer**

BINOMIAL=a

For k = 1 **To** m–1

BINOMIAL = BINOMIAL * (a – k)

Next k

BINOMIAL = BINOMIAL / **Fakultät** (m)

End Function

Im folgenden Tabellenausschnitt wird zur Berechnung des Binomialkoeffizienten

$$\binom{12}{3} = 220$$

die mit VBA programmierte Funktion BINOMIAL angewandt:

Z1S1	fx =BINOMIAL(12;3)		
	1	2	3	4
1	220			
2				

Da a=12 eine natürliche Zahl ist, kann dieser Binomialkoeffizient mit der EXCEL-Funktion **KOMBINATIONEN** (12**;**3) berechnet werden, wie folgender Tabellenausschnitt zeigt:

Z1S1	fx =KOMBINATIONEN(12;3)		
	1	2	3	4
1	220			
2				

Beispiel 14.2:
Lösen wir zwei Aufgaben aus der *Kombinatorik:*

- Durch Aufruf des Funktions-Assistenten und Auswahl der Kategorie *Statistik* im erscheinenden Dialogfeld **Funktion einfügen** werden alle in EXCEL anwendbaren Statistikfunktionen angezeigt.
- Durch Markieren der gewünschten Funktion kann man sich diese durch Anklicken von *Hilfe für diese Funktion* erklären lassen bzw. durch Anklicken von OK und Eingabe der benötigten Argumente im erscheinenden Dialogfeld **Funktionsargumente** die Berechnung auslösen.
- Illustrationen zur Anwendung von Statistikfunktionen findet man in den Beisp.14.4, 14.5, 14.7, 14.8. Eine ausführlichere Behandlung aller Anwendungsmöglichkeiten von EXCEL können wir im Rahmen des Buches nicht liefern, sondern müssen auf Bücher über Anwendung von EXCEL in der Statistik verweisen, die wir im Literaturverzeichnis zusammenstellen.

14.2.2 Add Ins

Stellen wir zwei für EXCEL angebotene Add Ins (Zusatzprogramme) zur Statistik vor:

- WINSTAT
  Dieses Add In wird von der Softwarefirma Fitch erstellt und vertrieben. WINSTAT ist als ein Einstieg in die Arbeit mit Statistiksoftware für EXCEL geeignet, da es relativ preiswert ist. Man kann sich eine kostenlose Demoversion aus dem Internet unter der Adresse **www.winstat.de** herunterladen.
- UNISTAT
  Dieses Add In besitzt einen großen Leistungsumfang, ist übersichtlich und individuell einsetzbar. Es gibt auch eine Minimalversion mit der Bezeichnung UNISTAT LIGHT. Kostenlose Demoversionen lassen sich aus dem Internet unter der Adresse **www.additive-net.de/software/unistat** herunterladen.

Bemerkung

Die Add Ins WINSTAT und UNISTAT besitzen eine einfache Benutzerführung und erweitern EXCEL wesentlich für den Einsatz zur Lösung von Aufgaben der Statistik. Wir empfehlen Anwendern, sich vor dem Kauf eines dieser Add Ins ausführlicher über das Internet zu Einsatzmöglichkeiten zu informieren, indem man in eine Suchmaschine die Begriffe WINSTAT bzw. UNISTAT eingibt und zusätzlich kostenlose Demoversionen herunterlädt und ausführlich testet.

♦

14.3 Kombinatorik

Zur Berechnung *klassischer* Wahrscheinlichkeiten benötigt man die *Kombinatorik,* die sich damit befasst, auf welche Art man eine vorgegebene Anzahl von Elementen anordnen bzw. wie man aus einer vorgegebenen Anzahl von Elementen gewisse Gruppen von Elementen auswählen kann.

Im Folgenden stellen wir Formeln der Kombinatorik vor, so dass sie problemlos einsetzbar sind (siehe auch Beisp.14.2).

a) Betrachten wir das *Werfen* mit *zwei idealen Würfeln*, wobei diese als unterscheidbar angesehen werden (z.B. unterschiedliche Farbe):
   - Es gibt hier folgende 36 mögliche Fälle (Würfe):
     (1,1) , (1,2) , ... , (1,6) , (2,1) , ... , (2,6) , (3,1) , ... , (3,6) , (4,1) , ... , (4,6) , (5,1) , ... , (5,6) , (6,1) , ... , (6,6)
   - Da die Würfel unterscheidbar sind, ist bei den möglichen Fällen (Würfen) die Reihenfolge der zwei gewürfelten Zahlen zu berücksichtigen.
   - Damit kann man die Anzahl der möglichen Fälle (Würfe) mittels der Formel
     n^k
     für *Variationen mit Wiederholung* (siehe Abschn.14.3.2) berechnen, die die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten von k = 2 Zahlen aus n = 6 Zahlen mit Berücksichtigung der Reihenfolge und Wiederholung liefert. Man erhält folgendes Ergebnis
     $6^2 = 36$ d.h. es gibt 36 mögliche Würfe.

b) Als Modell für die Ziehung der Zahlen beim Lotto 6 aus 49 kann man einen Behälter verwenden, der 49 durchnummerierte Kugeln enthält. Die Ziehung der 6 Lottozahlen geschieht durch zufällige Auswahl von 6 Kugeln aus diesem Behälter ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln:
   - Deshalb kann man die Anzahl der möglichen Fälle für die gezogenen Zahlen mittels der Formel
     $$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,! \cdot (n-k)\,!}$$
     für *Kombinationen ohne Wiederholung* (siehe Abschn.14.3.2) berechnen, d.h. als Auswahl von k aus n Zahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Wiederholung.
   - Für k = 6 und n = 49 erhält man aus der gegebenen Formel folgende Anzahl von Möglichkeiten für die Ziehung der Lottozahlen
     $$\binom{49}{6} = 13\,983\,816$$
     die man mit der EXCEL-Funktion **KOMBINATIONEN** (49 **;** 6) berechnen kann.

Beispiel 14.3:

Berechnen wir *klassische Wahrscheinlichkeiten:*

a) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass beim Werfen mit zwei unterscheidbaren Würfeln die Augenzahl bei einem Wurf größer oder gleich 10 ist, ergibt sich folgendermaßen:
   - Da die Würfel unterscheidbar sind gibt es 6 *günstige Fälle,* die aus folgenden Elementarereignissen gebildet werden:
     (4,6) , (5,5) , (5,6) , (6,4) , (6,5) , (6,6)

14.3.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Zur Berechnung der Formeln der *Kombinatorik* benötigt man

- *Fakultät* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ einer natürlichen Zahl n
- *Binomialkoeffizient*

  $$\binom{a}{m} = \frac{a \cdot (a-1) \cdots (a-m+1)}{m!}$$

  in dem a eine reelle und m eine natürliche (positive ganze) Zahl darstellen. Im Falle, dass $a = n$ ($\geq m$) eine natürliche Zahl ist, lässt sich die Berechnungsformel für Binomialkoeffizienten in folgender Form schreiben:

  $$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

14.3.2 Permutationen, Variationen und Kombinationen

Zur Berechnung klassischer Wahrscheinlichkeiten benötigt man folgende Gebiete der Kombinatorik (siehe auch Beisp.14.2 und 14.3):

- *Permutationen*
  berechnen die Anzahl der *Anordnungen* von n verschiedenen Elementen mit Berücksichtigung der Reihenfolge, wofür es n! Möglichkeiten gibt.
- *Variationen*
  berechnen die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k ($\leq$n) Elementen aus n gegebenen Elementen *mit Berücksichtigung* der *Reihenfolge:*
  - $\frac{n!}{(n-k)!}$ ohne Wiederholung
  - n^k mit Wiederholung
- *Kombinationen*
  berechnen die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl von k Elementen aus n gegebenen Elementen *ohne Berücksichtigung* der *Reihenfolge:*
  - $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ ohne Wiederholung
  - $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}$ mit Wiederholung

14.3.3 Einsatz von EXCEL

EXCEL besitzt folgende integrierte Funktionen zur *Kombinatorik:*

- **FAKULTÄT** (n) berechnet n!
- **KOMBINATIONEN** (n **;** k) berechnet *Kombinationen ohne Wiederholung:*

- Die Anzahl 36 der *möglichen Fälle* (d.h. alle Elementarereignisse) haben wir im Beisp.14.2a mittels Kombinatorik berechnet.
- Damit ergibt sich aus der Formel der *klassischen Wahrscheinlichkeit* P(A)=6/36=1/6 der Wert 1/6 für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.
- Als Zufallsgröße X kann man für diese Aufgabe des Werfens mit zwei Würfeln diejenige Funktion verwenden, die jedem Elementarereignis die Summe der beiden geworfenen Zahlen zuordnet, d.h. die Wahrscheinlichkeit P(A) berechnet sich durch $P(X \geq 10)$.

b) Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, beim Lotto 6 aus 49 alle 6 Zahlen richtig getippt zu haben, ergibt sich aus der Formel der klassischen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen:
- Bei 6 richtig getippten Zahlen gibt es nur einen *günstigen Fall*.
- Die Anzahl 13 983 816 der *möglichen Fälle* haben wir im Beisp.14.2b mittels Kombinatorik berechnet.
- Damit ergibt sich aus der Formel der klassischen Wahrscheinlichkeit

  P(A) = 1/13 983 816 = 0,00000007151123842

  der Wert 0,00000007151123842 für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A:
  * Da die Wahrscheinlichkeit von Null verschieden ist, liegt kein unmögliches Ereignis vor.
  * Weil die Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, spricht man jedoch von einem *seltenen Ereignis*.

Beispiel 14.4:
Illustrieren wir *diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen* (siehe Abschn.14.4.3):

a) Beim Herstellungsprozess einer Ware ist bekannt, dass 80% fehlerfrei, 15% mit leichten (vernachlässigbaren) Fehlern und 5% mit *großen Fehlern* hergestellt werden:
- Es ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass von 100 hergestellten Exemplaren der Ware a1) höchstens 3 , a2) genau 10 , a3) mindestens 4 große Fehler besitzen.
- Das in der vorliegenden Grundgesamtheit (in einem bestimmten Zeitraum hergestellte Warenmenge) betrachtete Merkmal ist die Anzahl der Exemplare mit großen Fehlern, für das wir die Zufallsgröße X verwenden, die einer *Binomialverteilung* B(n, p) mit n = 100 und Wahrscheinlichkeit p = 0,05 genügt..
- Mittels der Funktion **BINOMVERT** für die Binomialverteilung kann EXCEL die Werte für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten berechnen, wie im Folgenden zu sehen ist.

a1) $P (X \leq 3)$ = **BINOMVERT** (3 **;** 100 **;** 0,05 **;** WAHR) = 0,2578

d.h. die *Wahrscheinlichkeit* beträgt 0,2578, dass höchstens 3 der 100 entnommenen Exemplare große Fehler besitzen.

a2) $P (X=10)$ = **BINOMVERT** (10 **;** 100 **;** 0,05 **;** FALSCH) = 0,0167

d.h. die *Wahrscheinlichkeit* beträgt 0,0167, dass genau 10 der 100 entnommenen Exemplare große Fehler besitzen.

- ∗ Da der Binomialkoeffizient von n über k die zugrundeliegende Formel ist, kann diese Funktion auch zur Berechnung von *Binomialkoeffizienten* verwendet werden, wenn n eine natürliche Zahl ist (siehe Beisp.14.2b).
- ∗ Man kann diese Funktion in der Form **KOMBINATIONEN** (n+k−1 **;** k) auch zur Berechnung von *Kombinationen mit Wiederholung* einsetzen.

- **VARIATIONEN** (n **;** k) berechnet *Variationen ohne Wiederholung*.

Bemerkung

Die nicht zur Verfügung gestellte Funktion für *Variationen mit Wiederholung* bedeutet keine Einschränkung, da die zugrundeliegende Formel n^k in EXCEL unmittelbar berechenbar ist.

♦

14.4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden *zufällige Ereignisse,* die man mit großen Buchstaben A , B , ... bezeichnet:

- Unter zufälligen Ereignissen (Zufallsereignissen) versteht man mögliche Ergebnisse (Realisierungen) von Experimenten (Versuchen), bei denen das Eintreffen oder Nichteintreffen eines Ergebnisses nicht sicher vorausgesagt werden kann, d.h. zufällig ist:
  - Derartige Experimente heißen *Zufallsexperimente* oder zufällige Versuche.
  - Im Unterschied zu *deterministischen Experimenten*, bei denen der Ausgang eindeutig bestimmt ist, hängt der Ausgang von *Zufallsexperimenten* vom Zufall ab, d.h. er ist unbestimmt (zufällig).
  - Beispiele für Zufallsexperimente sind Werfen einer Münze, Würfeln mit einem Würfel, Ziehen von Lottozahlen, Untersuchung der Lebensdauer technischer Geräte.
- Unter zufälligen Ereignissen bilden *Elementarereignisse* die Basis. Anschaulich sind es diejenigen Ereignisse (siehe auch Beisp.14.3a),
  - die als mögliche einander ausschließende Ereignisse (Ergebnisse) eines Zufallsexperiments auftreten und meistens mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet werden.
  - aus denen sich beliebige Ereignisse eines Zufallsexperiment zusammensetzen.
  - die nicht in weitere Ereignisse zerlegbar sind.
- Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gewinnt unter Verwendung der Begriffe *Wahrscheinlichkeit*, *Zufallsgröße* und *Verteilungsfunktion* (siehe Abschn.14.4.1-14.4.3) quantitative Aussagen über zufällige Ereignisse.

14.4.1 Wahrscheinlichkeit

Da bei Zufallsexperimenten ungewiss ist, welches der möglichen Ereignisse eintritt, reicht es nicht aus, wenn man alle möglichen Ereignisse angibt:

a3) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) =$
$= 1 -$ **BINOMVERT** (3 **;** 100 **;** 0,05 **;** WAHR) = 0,7422
d.h. die *Wahrscheinlichkeit* beträgt 0,7422, dass mindestens 4 der 100 entnommenen Exemplare große Fehler besitzen.

b) Betrachten wir die *hypergeometrische Verteilung* beim Lotto 6 aus 49:
- Dieses Beispiel haben wir bereits bei Anwendung der klassischen Wahrscheinlichkeit kennengelernt (siehe Beisp.14.3b).
- Man kann ein *Urnenmodell* erfolgreich heranziehen, um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, dass k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Zahlen richtig getippt wurden:
  - Beispielsweise kann man für die gezogenen 6 Zahlen 6 schwarze und für alle anderen Zahlen 43 rote Kugeln verwenden.
  - Das Tippen der 6 Zahlen auf dem Lottoschein lässt sich als *Entnahme* von 6 Kugeln *ohne Zurücklegen* auffassen. Damit ergeben sich k richtig getippte Zahlen, wenn man k schwarze Kugeln entnommen hat.
  - Als Zufallsgröße X verwenden wir die Anzahl der richtig getippten Zahlen, die einer *hypergeometrischen Verteilung* (siehe Abschn.14.4.3)
    H (N , M , n) mit N = 49, M = 6 und n = 6 genügt.
  - Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$ für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 richtig getippte Zahlen mittels der Formeln für die hypergeometrische Verteilung

$$P(X=k) = \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{49-6}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

liefert EXCEL mittels der Funktion **HYPGEOMVERT**(k **;** 6 **;** 6 **;** 49)
folgende Werte:

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	0,436	0,413	0,132	0,018	0,00097	1,84E-05	7,15E-08

Beispiel 14.5:

Lösen wir mittels EXCEL einige Aufgaben zur *Normalverteilung:*

a) Die Lebensdauer eines Computertyps genüge einer *Normalverteilung* N (μ,σ) mit Erwartungswert $\mu = 10000$ Stunden und Standardabweichung $\sigma = 1000$ Stunden:
- Gesucht ist die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein zufällig der Produktion entnommener Computer eine vorgegebene Lebensdauer hat.
- Die vorliegende *Grundgesamtheit* besteht hier aus allen Computern eines bestimmten Produktionszeitraums.
- Das in der Grundgesamtheit betrachtete Merkmal ist die Lebensdauer (in Stunden), für das eine *normalverteilte Zufallsgröße* X eingesetzt wird.
- Für Normalverteilungen kann man die EXCEL-Funktion **NORMVERT** verwenden.

- Um anwendbare Aussagen zu erhalten, muss man die Zufälligkeit des Eintretens eines Ereignisses quantifizieren, d.h. durch Zahlen charakterisieren.
- Man führt für zufällige Ereignisse A als Maßzahl die *Wahrscheinlichkeit* P(A) ein, die die Chance für das Eintreten von A beschreibt:
  - Praktischerweise bietet sich für die Wahrscheinlichkeit eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 an, d.h. P(A) ist eine Funktion, die jedem zufälligen Ereignis A eine reelle Zahl aus dem Intervall [0,1] zuordnet.
  - Die Wahrscheinlichkeit $P(\varnothing)=0$ wird dem *unmöglichen Ereignis* $\varnothing$ und $P(\Omega)=1$ dem *sicheren Ereignis* Ω zugeordnet.
- Die Zuordnung einer Wahrscheinlichkeit kann für zufällige Ereignisse nicht willkürlich geschehen, wenn man ein Maß für das Eintreten erhalten möchte. Für eine *Definition* der *Wahrscheinlichkeit* gibt es mehrere Möglichkeiten:
  - Folgende Definitionen sind anschaulich, unmittelbar verständlich, aber nur bedingt einsetzbar:
    * *Klassische Definition* der *Wahrscheinlichkeit:*
      Wenn als Ergebnis eines Zufallsexperiments n gleichmögliche Ereignisse (mögliche Fälle) auftreten können, wovon m (<n) das Eintreten des Ereignisses A zur Folge haben (günstige Fälle), so definiert sich die Wahrscheinlichkeit P(A) des Ereignisses A als *Quotient* aus Anzahl m der *günstigen Fälle* und Anzahl n der *möglichen Fälle,* d.h.

      $$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

    * *Statistische Definition* der *Wahrscheinlichkeit:*
      Wenn die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nicht anwendbar ist, bietet sich für Praktiker folgende Möglichkeit an, um auf experimentellem Wege zu einem Wert für die *Wahrscheinlichkeit* P(A) eines zufälligen Ereignisses A zu gelangen:
      - Man führt das zugrundeliegende Zufallsexperiment n mal durch und beobachtet hierbei, wie oft das Ereignis A auftritt, so z.B. $m \le n$ mal.
      - Als *Näherung* für die *Wahrscheinlichkeit* P(A) kann bei einer hinreichend großen Anzahl von Experimenten der Quotient

        $$H_n(A) = \frac{m}{n}$$

        verwendet werden, der als *relative Häufigkeit* bezeichnet wird. Man spricht bei dieser Vorgehensweise von *statistischer Definition* der *Wahrscheinlichkeit*.
  - Klassische und statistische Definition der Wahrscheinlichkeit sind in ihren Anwendungen auf einfache Fälle beschränkt. Für eine aussagekräftige Theorie und effektive Anwendung benötigt man eine *axiomatische Definition* der Wahrscheinlichkeit, die in allen Lehrbüchern zu finden ist.

Berechnen wir mittels **NORMVERT** die Wahrscheinlichkeit für folgende Lebensdauern:

a1) Lebensdauer von mindestens 12000 Stunden:

$P (X \geq 12000) = 1 - P (X < 12000) =$

$= 1-$ **NORMVERT** (12000 **;** 10000 **;** 1000 **;** WAHR) = 1–0,977 = 0,023

a2) Lebensdauer von höchstens 6500 Stunden:

$P (X \leq 6500) =$ **NORMVERT** (6500 **;** 10000 **;** 1000 **;** WAHR) = 0,000233

a3) Lebensdauer zwischen 7500 und 10500 Stunden:

$P (7500 \leq X \leq 10500) = P (X \leq 10500) - P (X < 7500) =$

NORMVERT (10500 **;** 10000 **;** 1000 **;** WAHR) –

NORMVERT (7500 **;** 10000 **;** 1000 **;** WAHR) = 0,685

b) Eine Zulieferfirma stellt Schrauben auf ihren Maschinen her:

- Aufgrund der Einstellung und Beschaffenheit der Maschinen nimmt man an, dass die *Länge* einer Schraube einer *Normalverteilung* N (50 **,** 0,2) mit Erwartungswert $\mu = 50$ mm und Standardabweichung $\sigma = 0{,}2$ mm genügt.
- Die Schrauben sind nicht verwendbar (d.h. defekt), wenn ihre Länge um mehr als 0,25 mm vom Sollwert (Erwartungswert) 50 mm abweicht.
- Deshalb ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür interessant, dass eine der Produktion zufällig entnommene Schraube defekt ist:
  - Wenn man in der betrachteten *Grundgesamtheit* (siehe Abschn.14.5.1) der Schrauben das Merkmal der Länge (in mm) als normalverteilte *Zufallsgröße* X verwendet, erhält man mittels der Verteilungsfunktion Φ(x) der *standardisierten Normalverteilung:*

$$P(|X-50|>0{,}25)=1-P(|X-50|\leq 0{,}25)=1-P(50-0{,}25\leq X\leq 50+0{,}25)$$

$$=1-P\left(\frac{50-0{,}25-50}{0{,}2}\leq\frac{X-50}{0{,}2}\leq\frac{50+0{,}25-50}{0{,}2}\right)=1-(\Phi(1{,}25)-\Phi(-1{,}25))$$

$$=1-(2\cdot\Phi(1{,}25)-1)=2-2\cdot\Phi(1{,}25)=2\cdot(1-\Phi(1{,}25))$$

  - EXCEL berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels der Funktion **STANDNORMVERT** für die standardisierte Normalverteilung:

    2 * (1 – **STANDNORMVERT** (1,25)) = 0,211

    d.h. eine entnommene Schraube ist mit Wahrscheinlichkeit 0,211 defekt.
  - Man muss nicht unbedingt die standardisierte Normalverteilung heranziehen, sondern kann auch die EXCEL-Funktion **NORMVERT** anwenden: Aus $1-P(50-0{,}25\leq X\leq 50+0{,}25)$ folgt $1-(P(X\leq 50{,}25)-P(X<49{,}75))$,
    d.h. 1–**NORMVERT**(50,25;50;0,2)+**NORMVERT**(49,75;50;0,2)= 0,211

c) Betrachten wir eine Aufgabe für die praktische Anwendung der *inversen Verteilungsfunktion* der Normalverteilung, d.h. für die Berechnung von *Quantilen:*

- Das Gewicht (in kg) von 50kg-Zuckersäcken genüge einer *Normalverteilung* N(μ,σ) mit Erwartungswert $\mu = 50$kg und Standardabweichung $\sigma = 1$kg.

14.4.2 Zufallsgrößen

Der Begriff *Zufallsgröße* (*Zufallsvariable*) spielt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine grundlegende Rolle. Er wird benötigt, um mit zufälligen Ereignissen rechnen zu können:

- Die exakte Definition einer Zufallsgröße ist mathematisch anspruchsvoll.
- Für Anwendungen genügt es zu wissen, dass *Zufallsgrößen* als Funktionen definiert sind, die den Ereignissen eines Zufallsexperiments gewisse Werte (reelle Zahlen) zuordnen. Sie werden mit großen Buchstaben X, Y, ... bezeichnet.
- Können *Zufallsgrößen* nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen, so spricht man von *diskreten Zufallsgrößen* andernfalls (d.h. Annahme beliebig vieler Werte) von *stetigen Zufallsgrößen*.

14.4.3 Verteilungsfunktionen

Für Zufallsgrößen X stellt sich die Frage, mit welchen Wahrscheinlichkeiten ihre Werte realisiert werden. Diese Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den Werten einer Zufallsgröße nennt man *Wahrscheinlichkeitsverteilung* der Zufallsgröße. Sie wird durch eine *Verteilungsfunktion* gegeben:

- Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Zufallsgröße X ist durch

  $$F(x) = P(X \le x)$$

  definiert, wobei $P(X \le x)$ die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass die Zufallsgröße X einen Wert kleiner oder gleich x (reelle Zahl) annimmt:

  - Mit Hilfe der Verteilungsfunktion erhält man folgende Wahrscheinlichkeiten:
    - ∗ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße X Werte aus einem vorgegebenen halboffenen Intervall (a,b] annimmt, berechnet sich aus

      $$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

    - ∗ Es gilt $P(X>x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$
  - Für *diskrete Zufallsgrößen* X mit Werten $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ergibt sich die Verteilungsfunktion in der Form

    $$F(x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

    wobei über alle k zu summieren ist, für die $x_k \le x$ gilt und $p_k = P(X = x_k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass X den Wert x_k annimmt. Man spricht hier von *diskreten Verteilungsfunktionen*.
  - Für *stetige Zufallsgrößen* X ergibt sich die Verteilungsfunktion in der Form

    $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

    wobei $f(t)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte bezeichnet. Man spricht hier von *stetigen Verteilungsfunktionen.*

- In der *Grundgesamtheit* der Zuckersäcke betrachtet man als Merkmal das Gewicht, das durch eine normalverteilte *Zufallsgröße* X beschreibbar ist.
- Gesucht ist das Gewicht, das ein zufällig entnommener Zuckersack mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 (90%) höchstens wiegt.
- Damit ist die Gleichung $F(x) = 0{,}9$ nach x aufzulösen:
  - Folglich ist für die Verteilungsfunktion $F(x)=P(X\leq x)$ der Normalverteilung N(50,1) das zu s = 0,9 gehörige Quantil x_s zu berechnen.
  - Man kann die EXCEL-Funktion **NORMINV** für die inverse Verteilungsfunktion der Normalverteilung zur Berechnung des Quantils verwenden:
    NORMINV (0,9 **;** 50 **;** 1) = 51,282
    d.h. das Gewicht eines zufällig entnommenen Zuckersacks beträgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 höchstens 51,282 kg.

Beispiel 14.6:

Geben wir zwei konkrete Beispiele für *Stichproben*, die wir in den folgenden Beispielen zur Lösung von Aufgaben der beschreibenden Statistik heranziehen:

a) Um Aussagen über die Größe von Neugeborenen zu erhalten, werden über einen gewissen Zeitraum 10 zufällige Messungen durchgeführt und folgende *eindimensionale Stichprobe* (Stichprobenwerte in cm) vom Umfang 10 erhalten:

   50 , 49 , 59 , 61 , 48 , 54 , 59 , 53 , 45 , 51

   Als Merkmal X in der *Grundgesamtheit* der Neugeborenen wird die Größe verwendet. Im Beisp.14.7a berechnen wir für diese Stichprobe statistische Maßzahlen und stellen sie im Beisp.14.7b1 grafisch dar.

b) Für die Merkmale X (*Preis*) und Y (*Nachfrage*) wurde für eine Ware folgende *zweidimensionale Stichprobe* vom Umfang 5 ermittelt:

Preis	2	3	4	5	8
Nachfrage	95	96	92	89	83

   Diese Stichprobe wird im Beisp.14.7b2 grafisch dargestellt und im Beisp.14.7c dazu benutzt, um für den vermuteten *funktionalen Zusammenhang* (Preis-Nachfrage-Funktion) zwischen Preis und Nachfrage einer Ware eine empirische Regressionsgerade zu berechnen.

Beispiel 14.7:

Illustrieren wir die Lösung von Aufgaben der beschreibenden Statistik mittels EXCEL, indem wir für konkrete ein- und zweidimensionale Stichproben statistische Maßzahlen berechnen, Stichprobenpunkte grafisch darstellen bzw. empirischen Korrelationskoeffizient und Regressionsgerade berechnen:

a) EXCEL stellt Funktionen zur Berechnung *statistischer Maßzahlen* (siehe Abschn. 14.5.2) für eindimensionale Stichproben vom Umfang n ($n\leq 30$) zur Verfügung:

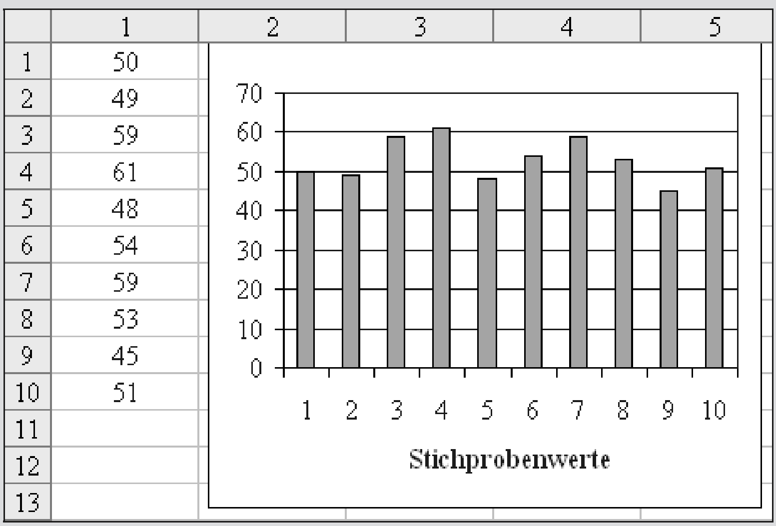
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X ist durch Kenntnis ihrer Verteilungsfunktion bestimmt.
- In Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik spielen Quantile eine große Rolle:
  - Man bezeichnet den Wert x_s als *s-Quantil*, für den gilt
    $F(x_s) = P(X \le x_s) = s$
  - Das s-Quantil x_s ermittelt sich für eine gegebene Zahl s aus dem Intervall [0,1] mittels $x_s = F^{-1}(s)$ falls die inverse Verteilungsfunktionen F^{-1} existiert.
- Verteilungsfunktionen sind eindeutig bestimmt, wenn für diskrete Zufallsgrößen die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(X = x_k)$ bzw. für stetige Zufallsgrößen die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t)$ bekannt sind.
- Für konkrete Zufallsgrößen X besteht die Aufgabe darin, zugehörige Wahrscheinlichkeiten p_k bzw. Dichtefunktion $f(t)$ zu ermitteln:
  - Da p_k bzw. $f(t)$ i.Allg. nicht einfach zu bestimmen sind, liefert die Wahrscheinlichkeitstheorie hierfür Formeln für konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen, von denen wir im Folgenden wichtige vorstellen.
  - Wichtige *diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen* sind:
    * *Binomialverteilung* B (n , p) mit den Wahrscheinlichkeiten
      $$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$
      Sie ist folgendermaßen charakterisiert:
      – Bei n unabhängigen Zufallsexperimenten, die nur das Ereignis (Ergebnis) A (mit Wahrscheinlichkeit p) oder das komplementäre Ereignis $\overline{A}$ (mit Wahrscheinlichkeit 1–p) liefern können, ordnet die Zufallsgröße X dem Ereignis k-maliges Auftreten von A die Zahl k zu.
      – $P(X=k)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Ereignis A k-mal auftritt (siehe Beisp.14.4a).
      – Bei Experimenten der zufälligen Entnahme von Elementen bedeutet die Unabhängigkeit, dass die Elemente wieder *zurückgelegt* werden müssen. Dies ist der grundlegende Unterschied zur folgenden hypergeometrischen Verteilung.
    * *Hypergeometrische Verteilung* H (N , M , n) mit den Wahrscheinlichkeiten
      $$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \min(n,M)\,,\ 1 \le M < N)$$
      die dafür stehen, dass bei n (≤N) Experimenten der zufälligen Entnahme eines Elements *ohne Zurücklegen* aus einer Gesamtheit von N Elementen, von denen M eine gewünschte Eigenschaft E haben, k Elemente mit der Eigenschaft E auftreten (siehe Beisp.14.4b).

- Als Argument dieser Funktionen sind entweder die Zahlen der Stichprobe (durch Semikolon getrennt) oder einen Bereichsbezug bzw. einen Namen für die in der EXCEL-Tabelle enthaltenen Stichprobenzahlen möglich.
- Für die konkrete Stichprobe 50 , 49 , 59 , 61 , 48 , 54 , 59 , 53 , 45 , 51 aus Beisp.14.6a, die sich in der ersten Spalte der Tabelle (Zellen Z1S1**:**Z10S1) befinde, d.h. die Bereichsadresse Z1S1**:**Z10S1 besitzt, illustrieren wir im Folgenden die Anwendung dieser EXCEL-Funktionen, die in Formelschreibweise (d.h. mit vorangestelltem =) in eine aktive Zelle einzugeben sind:
  - =**MITTELWERT**(Z1S1**:**Z10S1)
    berechnet den empirischen Mittelwert 52,9.
  - =**GEOMITTEL**(Z1S1**:** Z10S1)
    berechnet das empirische geometrische Mittel 52,66.
  - =**MEDIAN**(45 **;** 48 **;** 49 **;** 50 **;** 51 **;** 53 **;** 54 **;** 59 **;** 59 **;** 61)
    berechnet den empirischen Median 52, wenn man die Stichprobenwerte der Größe nach geordnet eingibt.
  - =**STABWN**(Z1S1**:** Z10S1)
    berechnet die empirische Standardabweichung 5,05.

b) Stellen wir die Punkte beider Stichproben aus Beisp.14.6 mittels EXCEL grafisch dar:

b1) Für die eindimensionale Stichprobe mit den Stichprobenwerten
50, 49, 59, 61, 48, 54, 59, 53, 45, 51
können z.B. folgende grafischen Darstellungen gewählt werden:

- Diagrammtyp *Säule:*



- *Poisson-Verteilung* $P(\lambda)$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

in denen λ für den Erwartungswert steht. Diese Verteilung kann als gute Näherung für die Binomialverteilung verwendet werden, wenn n groß und p klein sind und λ gleich n· p gesetzt wird.

- Bei *stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen* spielt die *Normalverteilung* $N(\mu,\sigma)$ die dominierende Rolle, in der μ *Erwartungswert* und σ *Standardabweichung* (siehe Abschn.14.4.4) darstellen. Sie ist folgendermaßen charakterisiert:

∗ Dichtefunktion
$$f(t) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

∗ Verteilungsfunktion
$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

∗ Fehlerintegral
$$Fi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{x}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

∗ Gelten $\mu = 0$ und $\sigma = 1$, so spricht man von *standardisierter* (oder normierter) *Normalverteilung* N(0,1), deren Verteilungsfunktion mit Φ(x) bezeichnet wird und für die gilt: $\Phi(0)=1/2$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

∗ Viele stetige Zufallsgrößen können näherungsweise als normalverteilt angesehen werden, da sie sich als Überlagerung (Summe) einer größeren Anzahl einwirkender Einflüsse (unabhängiger Zufallsgrößen) ergeben.
Diese Aussage des *zentralen Grenzwertsatzes* der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass unter bestimmten Bedingungen jede Summe (unabhängiger Zufallsgrößen) näherungsweise normalverteilt ist, liefert die Begründung für die dominierende Rolle der Normalverteilung in praktischen Anwendungen.

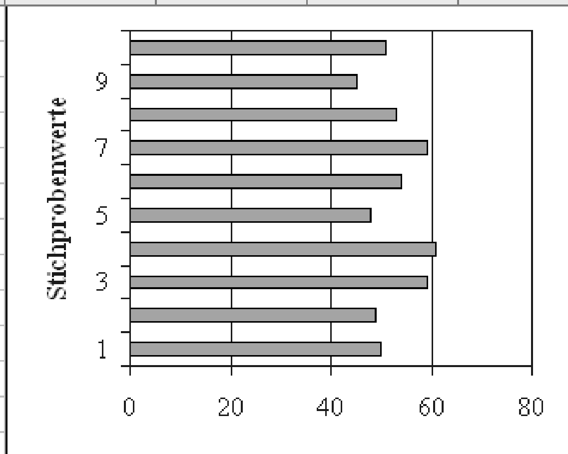
14.4.4 Erwartungswert und Streuung

Wichtige Informationen über eine Wahrscheinlichkeitsverteilung geben die *Momente*, von denen wir zwei wesentliche betrachten:

- Der *Erwartungswert* $\mu = E(X)$ einer Zufallsgröße X als wichtigstes Moment gibt an, welchen Wert X im Mittel (Durchschnitt) realisiert:
  - Für den Erwartungswert von
    ∗ *diskreten Zufallsgrößen* X mit Werten x_k und Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(X=x_k)$ erhält man

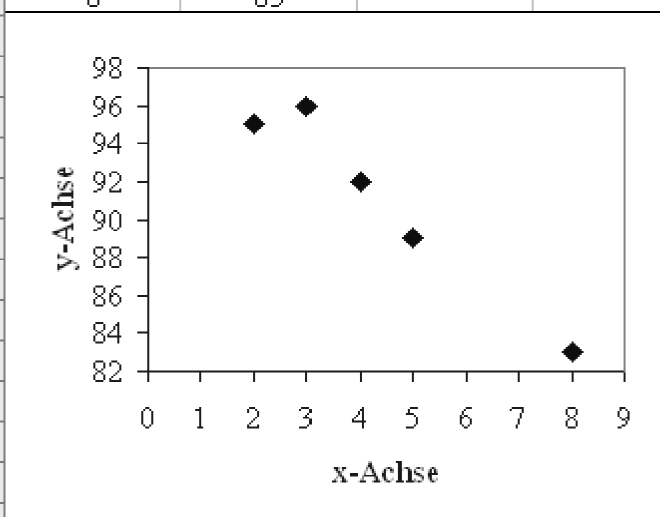
- Diagrammtyp *Balken:*

	1	2	3	4	5
1	50				
2	49				
3	59				
4	61				
5	48				
6	54				
7	59				
8	53				
9	45				
10	51				
11					
12					
13					



b2) Für die zweidimensionalen Stichprobe mit den Stichprobenpunkten (2,95) , (3,96) , (4,92) , (5,89) , (8,83)

	1	2	3	4
1	2	95		
2	3	96		
3	4	92		
4	5	89		
5	8	83		
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				



$$\mu = E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k$$

∗ *stetigen Zufallsgrößen* X mit Dichtefunktion $f(t)$ erhält man

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\ dt$$

wobei die Konvergenz der unendlichen Reihe bzw. des uneigentlichen Integrals vorauszusetzen ist.

- Die *Streuung/Varianz* σ^2 einer Zufallsgröße X als weiteres wichtiges Moment gibt die durchschnittliche Abweichung der Werte von X vom Erwartungswert E(X) an und berechnet sich aus

  $$\sigma^2 = E(X - E(X))^2$$

  wobei σ (als Wurzel aus Streuung/Varianz) als *Standardabweichung* bezeichnet wird.

14.4.5 Einsatz von EXCEL

In EXCEL sind zahlreiche *Verteilungsfunktionen* integriert:

- Man findet sie im Dialogfeld des Funktions-Assistenten unter der Kategorie *Statistik.*
- Im Folgenden stellen wir häufig benötigte vor:
  - *Diskrete Verteilungsfunktionen:*
    ∗ **BINOMVERT** (k **;** n **;** p **;** FALSCH)
    berechnet die *Wahrscheinlichkeit* $P(X = k)$ für die *Binomialverteilung* B(n,p).

    ∗ **BINOMVERT** (x **;** n **;** p **;** WAHR)
    berechnet den Wert $F(x)$ der *Verteilungsfunktion* der *Binomialverteilung* B(n,p) an der Stelle x.

    ∗ **HYPGEOMVERT** (k **;** n **;** M **;** N)
    berechnet die *Wahrscheinlichkeit* $P(X = k)$ für die *hypergeometrische Verteilung* H (N , M , n).

    ∗ **POISSON** (k **;** q **;** FALSCH)
    berechnet die *Wahrscheinlichkeit* $P(X = k)$ für die *Poisson-Verteilung* mit λ=q.

    ∗ **POISSON** (x **;** q **;** WAHR)
    berechnet den Wertes $F(x)$ der *Verteilungsfunktion* der *Poisson-Verteilung* mit λ=q an der Stelle x.
  - *Stetige Verteilungsfunktionen*
    ∗ **NORMVERT** (t **;** m **;** s **;** FALSCH)
    berechnet den Wert $f(t)$ der *Dichtefunktion* der *Normalverteilung* N(m,s).

wählen wir als *grafische Darstellung* die *Punktform* (siehe auch Beisp.7.5):

- Die Vorgehensweise ist analog wie im Beisp.7.5.
- Nachdem man z.B. die x-Werte der Stichprobenpunkte in Spalte 1 und y-Werte in Spalte 2 eingegeben und den gesamten Bereich Z1S1**:**Z5S2 markiert hat, muss man beim Durchlauf des Diagramm-Assistenten im *Schritt 1 von 4* den Diagrammuntertyp *Punkte.Vergleicht Werte paarweise* wählen.

c) Berechnen wir mittels EXCEL für die im Beisp.b2 grafisch dargestellten Stichprobenpunkte aus Beisp.14.6b die *empirische Regressionsgerade* und stellen sie grafisch dar:

- Zuerst werden x- und y-Werte der 5 Stichprobenpunkte in zusammenhängende Zellen der Tabelle eingegeben und hierfür die Namen x bzw. y erstellt, wie im Abschn. 2.5 erläutert ist.
- Nach Eingabe der Stichprobenpunkte kann mittels der EXCEL-Funktion
  KORREL (x **;** y)
  der empirische Korrelationskoeffizient berechnet werden, wobei das Ergebnis im folgenden Tabellenausschnitt zu sehen ist:

Z1S3		=KORREL(x;y)		
	1	2	3	4
1	x	y	-0,9732706	
2	2	95		
3	3	96		
4	4	92		
5	5	89		
6	8	83		

- Der *empirische Korrelationskoeffizient* ist folgendermaßen *charakterisiert:*
  - Seine Werte können zwischen −1 und +1 liegen. Er ist genau dann gleich ±1, wenn alle Stichprobenpunkte auf einer Geraden liegen:
  - Man kann ohne statistische Tests bei hinreichend großer Stichprobe die *empirische Regressionsgerade* $y = f(x) = a \cdot x + b$ konstruieren, d.h. einen linearen Zusammenhang annehmen, wenn der empirische Korrelationskoeffizient dem Betrage nach in der Nähe von 1 liegt.
- Da der mit EXCEL für den Korrelationskoeffizienten der gegebenen Stichprobenpunkte berechnete Wert von –0,97 dem Betrage nach in der Nähe von 1 liegt, nehmen wir näherungsweise einen linearen Zusammenhang zwischen den Merkmalen X (*Preis*) und Y (*Nachfrage*) an:
  - Deshalb kann man hierfür die *empirische Regressionsgerade* (d.h. eine lineare Preis-Nachfrage-Funktion) $y = f(x) = a \cdot x + b$ berechnen.
  - Die *empirische Regressionsgerade* ist für eine zweidimensionale Stichprobe folgendermaßen *charakterisiert:*

* **NORMVERT** (x **;** m **;** s **;** WAHR)
  berechnet den Wert $F(x)$ der *Verteilungsfunktion* der *Normalverteilung* N(m,s) an der Stelle x.
* **STANDNORMVERT** (x)
  berechnet den Wert $\Phi(x)$ der *Verteilungsfunktion* der *standardisierten Normalverteilung* N(0,1) an der Stelle x.
* *Weitere* wichtige *Verteilungen* (vor allem für die Statistik) sind die *Chi-Quadrat-* ,*Student-* und *F-Verteilung*, für die EXCEL die Funktionen **CHIVERT**, **TVERT** bzw. **FVERT** zur Verfügung stellt.

Illustrationen zur Anwendung dieser EXCEL-Funktionen zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen findet man in den Beisp.14.4 und 14.5.

14.5 Statistik

Statistik lässt sich anschaulich folgendermaßen charakterisieren:

- Man kann die Statistik als Wissenschaft der Gewinnung, Aufbereitung und Auswertung von *Daten* bezeichnen.
- In der Statistik werden Daten in Form von Zahlen gewonnen. Deshalb bezeichnet man vorliegendes Datenmaterial meistens als *Zahlenmaterial*.
- Eine Hauptaufgabe der Statistik besteht in der *Untersuchung* von *Massenerscheinungen* bzw. großer *Mengen* in Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften:
  - Massenerscheinungen (große Mengen) sind dadurch charakterisiert, dass sie nicht in ihrer Gesamtheit erfassbar sind:
    * Sie können nur durch entnommene *Stichproben* untersucht werden.
    * Ein typisches Beispiel hierfür liefert die *Qualitätskontrolle* bei Massenproduktionen.
  - Die Statistik liefert Methoden, um Massenerscheinungen (große Mengen) beschreiben, beurteilen und quantitativ erfassen zu können. Hierfür wird der Begriff der *Grundgesamtheit* eingeführt, die wir im Abschn.14.5.1 zusammen mit *Stichproben* vorstellen.
- Die Statistik hat sich zu einem umfangreichen und wichtigen Gebiet der Mathematik (Wirtschaftsmathematik) entwickelt, wie sich in der zahlreichen Literatur widerspiegelt. Wir können deshalb keine ausführliche Behandlung geben, sondern nur Grundbegriffe vorstellen, die für den Einsatz von EXCEL erforderlich sind.

14.5.1 Grundgesamtheit und Stichproben

Grundgesamtheit und *Stichproben* sind für statistische Untersuchungen von fundamentaler Bedeutung, da sie die Grundlage für statistische Aussagen über *Massenerscheinungen* (große *Mengen*) bilden:

- Bei einer betrachteten *Massenerscheinung/Menge* werden ein Merkmal X oder mehrere Merkmale X,Y,... untersucht, wobei diese Merkmale durch *Zufallsgrößen* X bzw. X,Y,... beschrieben sind:

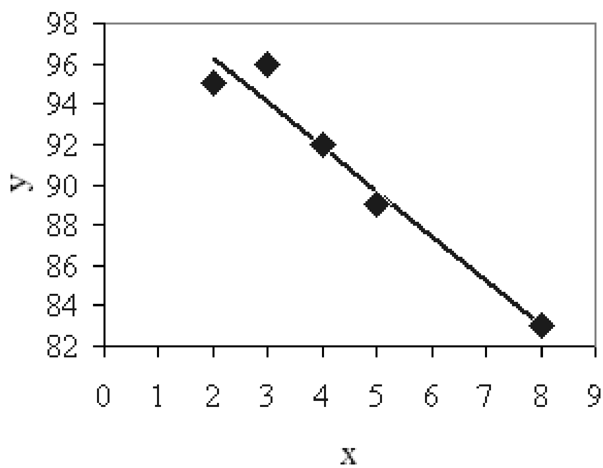
∗ Die Summe der Quadrate der Abstände der n Stichprobenpunkte (x_k, y_k) zur Regressionsgeraden ist minimal, d.h. es muss gelten

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - a \cdot x_k - b)^2 = \underset{a,b}{\text{Minimum}}$$

∗ Aus dieser Minimierungsaufgabe berechnen sich Steigung a und Achsenabschnitt b der Regressionsgeraden für eine konkrete Stichprobe, wofür man die entsprechenden Formeln in den Lehrbüchern findet. EXCEL wendet diese Formeln in seinen Funktionen **STEIGUNG** und **ACHSENABSCHNITT** an, so dass wir auf ihre Vorstellung verzichten.

Z2S3 =-2,22*x+100,75

	1	2	3	4
1	x	y	Regressionsgerade	
2	2	95	96,31	
3	3	96	94,09	
4	4	92	91,87	
5	5	89	89,65	
6	8	83	82,99	



- Berechnen wir Steigung a und Achsenabschnitt b der empirischen Regressionsgeraden $y = f(x) = a \cdot x + b$ mittels der EXCEL-Funktionen **STEIGUNG** und **ACHSENABSCHNITT** für die betrachtete Stichprobe. Bei diesen Funktionen ist im Unterschied zur Funktion **KORREL** im Argument zuerst der y-Bereich und danach der x-Bereich der Stichprobenpunkte anzugeben:

- Man bezeichnet eine Massenerscheinung/Menge als *Grundgesamtheit* oder *Population* einer Zufallsgröße X bzw. mehrerer Zufallsgrößen X, Y, ... (siehe Beisp.14.4-14.6).
- Wird nur ein Merkmal (Zufallsgröße) X betrachtet, so charakterisiert X mit zugehöriger Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsverteilung) F(x) die Grundgesamtheit.

- Beim Sammeln von *Daten* (*Zahlen*), die Eigenschaften (Merkmale) von *Massenerscheinungen/Mengen* betreffen, ist es meistens unmöglich oder ökonomisch nicht vertretbar, die gesamte *Grundgesamtheit* heranzuziehen:
  - Deshalb betrachtet man hieraus nur einen kleinen zufälligen entnommenen Teil, der *zufällige Stichprobe* oder *Zufallsstichprobe* (kurz *Stichprobe*) heißt.
  - In der Praxis werden *Stichproben* durch eine der folgenden Aktivitäten gewonnen:
    * Beobachtungen (Zählungen, Messungen)
    * Befragungen (von Personen)
    * Experimente
    * zufällige Entnahme einer Teilmenge
  - Im übertragenden Sinne spricht man davon, dass aus der Grundgesamtheit eine *Stichprobe entnommen* wird:
    * Eine Stichprobe vom Umfang n für eine Grundgesamtheit mit einer Zufallsgröße X heißt *eindimensional* und besteht aus n Zahlenwerten (*Stichprobenwerten*)
      $x_1 \, , \, x_2 \, , \, \ldots \, , \, x_n$
    * Eine Stichprobe vom Umfang n für eine Grundgesamtheit mit zwei Zufallsgrößen X, Y heißt *zweidimensional* und besteht aus n Zahlenpaaren (*Stichprobenpunkten*)
      $(x_1, y_1) \, , \, (x_2, y_2) \, , \, \ldots \, , \, (x_n, y_n)$

14.5.2 Beschreibende Statistik

In der *beschreibenden* (deskriptiven) *Statistik* wird vorliegendes Zahlenmaterial (z.B. aus einer Stichprobe) aufbereitet und verdichtet (siehe Beisp.14.7):

- Zur *Veranschaulichung* werden grafische Darstellungen wie Punktgrafiken, Diagramme, Histogramme eingesetzt.
- Zur Charakterisierung werden *statistische Maßzahlen* berechnet, wie z.B. für eindimensionale Stichproben mit Stichprobenwerten $x_1 \, , \, x_2 \, , \, \ldots \, , \, x_n$:
  - empirischer *Mittelwert* (arithmetisches Mittel) m

    $$m = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k$$

  - empirisches *geometrisches Mittel* g

    $$g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

  - empirischer *Median* med

  * Mittels =**STEIGUNG** (y **;** x) wird für die *Steigung* a = –2,22 berechnet.
  * Mittels =**ACHSENABSCHNITT** (y **;** x) wird für den *Achsenabschnitt* b = 100,75 berechnet.

- Die grafische Darstellung der von EXCEL berechneten Regressionsgeraden $y = f(x) = -2{,}22 \cdot x + 100{,}75$ und der gegebenen Stichprobenpunkte ist im obigen Tabellenausschnitt zu sehen:
  * Man vergleiche die so konstruierte Regressionsgerade mit der im Beisp.7.5 für die gleichen Stichprobenpunkte konstruierten Interpolationskurve (Polygonzug).
  * Während Interpolationskurven durch alle Stichprobenpunkte gehen müssen, ist dies für Regressionsgeraden nur der Fall, wenn der Korrelationskoeffizient gleich ±1 ist.

Beispiel 14.8:

Betrachten wir zwei EXCEL-Funktionen zur Erzeugung von *Zufallszahlen*. Dabei ist zu beachten, dass die Schreibweise dieser Funktionen in der integrierten Programmiersprache VBA anders ist (siehe Beisp.14.10):

a) EXCEL kann mittels der Funktion **ZUFALLSZAHL** eine gleichmäßig verteilte *Zufallszahl* aus dem Intervall (0,1) erzeugen, wie aus folgendem Dialogfeld **Funktion einfügen** des Funktions-Assistenten ersichtlich ist:

$$\text{med} = \begin{cases} x_{k+1} & \text{falls} \quad n = 2 \cdot k + 1 \text{ (ungerade)} \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} & \text{falls} \quad n = 2 \cdot k \text{ (gerade)} \end{cases}$$

für dessen Berechnung die Stichprobenwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Größe nach geordnet sein müssen.

- *empirische Standardabweichung* s

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2}{n-1}} \quad \text{(m - Mittelwert der Stichprobenwerte } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{)}$$

- Im Unterschied zur schließenden Statistik (siehe Abschn.14.5.3) werden nur *Aussagen* über *vorliegendes Zahlenmaterial* (z.B. einer Stichprobe) getroffen:
  - Aussagen der beschreibenden Statistik sind sicher, können aber nicht auf die Grundgesamtheit übertragen werden, aus der die Stichprobe stammt. Sie gelten nur für die betrachtete Stichprobe.
  - Es werden keine Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung benötigt.

14.5.3 Schließende Statistik

Die Aufgabe der *schließenden* (induktiven) *Statistik* besteht darin, anhand vorliegenden Datenmaterials (Stichprobe) unter Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung allgemeine *Aussagen* über *Massenerscheinungen/Mengen* (d.h. eine Grundgesamtheit) zu erhalten, die man in ihrer Gesamtheit nicht untersuchen kann:

- Hier liegt der wesentliche *Unterschied* zur *beschreibenden Statistik*, die nur Aussagen über die entnommene Stichprobe liefert.
- Die Grundidee der schließenden Statistik besteht kurz gesagt im *Schluss* vom *Teil* aufs *Ganze*, wobei die erhaltenen Schlüsse nie sicher sind, sondern nur mit gewisser Wahrscheinlichkeit gelten.
- Die schließende Statistik, die man auch als mathematische Statistik bezeichnet, hat sich zu einem eigenständigen Gebiet der Mathematik entwickelt:
  - Es existiert eine umfangreiche Literatur, auf die wir verweisen.
  - Im Literaturverzeichnis findet man eine Reihe deutschsprachiger Bücher.
- Wichtige Gebiete der schließenden Statistik sind Schätz- und Testtheorie, Korrelation- und Regressionsanalyse, Zeitreihenanalyse, für die Aufgaben mittels EXCEL lösbar sind (siehe Literaturverzeichnis [164-174]).

- Diese Funktion benötigt keine Argumente und wird durch Eingabe der Formel =**ZUFALLSZAHL**() oder Anklicken von OK in den aufeinanderfolgenden Dialogfeldern **Funktion einfügen** und **Funktionsargumente** aufgerufen und liefert die erzeugte Zufallszahl in der aktiven Zelle der Tabelle.
- Im folgenden Tabellenausschnitt ist in der Zelle Z1S1 eine durch die Funktion **ZUFALLSZAHL** () im Intervall (0,1) erzeugte Zufallszahl zu sehen:

Z1S1		fx	=ZUFALLSZAHL()	
	1	2	3	4
1	0,81908941			

b) EXCEL kann mittels der Funktion =**ZUFALLSBEREICH** (a **;** b) gleichmäßig verteilte *ganze Zufallszahlen* aus dem Intervall (a , b) erzeugen:

- Diese Funktion steht im Dialogfeld **Funktion einfügen** des Funktions-Assistenten, das im Beisp.14.8a abgebildet ist.
- Im folgenden Tabellenausschnitt ist in Zelle Z1S1 eine im Intervall (1,17) erzeugte Zufallszahl zu sehen:

Z1S1		fx	=ZUFALLSBEREICH(1;17)		
	1	2	3	4	5
1	4				

Beispiel 14.9:

Illustrieren wir eine Vorgehensweise bei *Monte-Carlo-Simulationen*, indem wir sie zur Berechnung von Integralen heranziehen:

- Da EXCEL keine Funktionen zur Integralberechnung bereitstellt, liefern Monte-Carlo-Methoden neben numerischen Methoden (siehe Abschn.9.3.3) eine weitere Möglichkeit, bestimmte Integrale zu berechnen.
- Bestimmte Integrale $\int_a^b f(x)\,dx$

  lassen sich mittels Monte-Carlo-Simulation folgendermaßen näherungsweise berechnen:
  - Für eine einfache Anwendung der Monte-Carlo-Simulation ist es erforderlich, das Integral in eine Form zu transformieren, in der das Integrationsintervall durch [0,1] gegeben ist und die Funktionswerte des Integranden zwischen 0 und 1 liegen.
  - Man benötigt folglich zu berechnende Integrale in der Form

    $$\int_0^1 h(x)\,dx \quad \text{mit} \quad 0 \le h(x) \le 1$$

  - Unter der Voraussetzung, dass der Integrand $f(x)$ auf dem Intervall [a,b] stetig ist, kann man durch Berechnung von

14.5.4 Einsatz von EXCEL

EXCEL kann neben Aufgaben der beschreibenden Statistik auch zahlreiche Aufgaben der schließenden Statistik lösen:

- Die benötigten Verteilungsfunktionen zur *Chi-Quadrat-*, *Student-* und *F-Verteilung* werden zur Verfügung gestellt, so dass u.a. Schätzungen und Tests durchführbar sind.
- Vorhandene Add Ins zur Statistik (siehe Abschn.14.2.2) leisten eine wesentliche Hilfe.
- Wir können nicht auf diese umfangreiche Problematik eingehen und verweisen auf die Literatur, die wir im Literaturverzeichnis zusammenstellen.

14.6 Simulation

Unter *Simulation* versteht man die Untersuchung von Vorgängen/Prozessen/Systemen in Technik, Natur- und Wirtschaftswissenschaften mit Hilfe von *Ersatzsystemen:*

- Als Ersatzsysteme verwendet die Simulation häufig *mathematische Modelle*.
  - Man spricht von einer *Nachbildung* mittels *Modell.*
  - Wenn benutzte mathematische Modelle auf Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie beruhen, spricht man von *stochastischen Simulationen,* die man meistens als *Monte-Carlo-Simulationen* oder *Monte-Carlo-Methoden* bezeichnet.
- Simulationen auf Grundlage mathematischer Modelle sind nur mittels Computer effektiv durchführbar, so dass man auch von digitaler Simulation spricht.
- Simulationen sind für Anwendungen von großem Nutzen, da sie
  - meistens kostengünstiger sind,
  - häufig schnellere Ergebnisse liefern,
  - in einer Reihe von Fällen erst die Untersuchung eines realen Vorgangs/Prozesses/ Systems ermöglichen, weil direkte Untersuchungen zu kostspielig oder nicht möglich sind.

Bemerkung

Wir können im Rahmen des Buches nicht ausführlich auf das komplexe Gebiet der Simulation eingehen und müssen auf die Literatur verweisen (siehe [153 , 156 , 157]):

- Wir stellen in den folgenden Abschn.14.6.1 und 14.6.2 die Problematik kurz vor, um einen ersten Eindruck zu vermitteln und darauf hinzuweisen, dass mit EXCEL Monte-Carlo-Simulationen durchführbar sind.
- Um den Leser anzuregen, sich intensiver mit Simulationen zu beschäftigen, führen wir zur Illustration eine einfache Monte-Carlo-Simulation mittels EXCEL durch (siehe Abschn.14.6.4 und Beisp.14.9-14.11).

  ♦

14.6.1 Zufallszahlen

Für Monte-Carlo-Simulationen benötigt man *Zufallszahlen*, die sich folgendermaßen *charakterisieren* lassen:

$$U = \underset{x \in [a,b]}{\text{Minimum}}\, f(x) \qquad \text{und} \qquad O = \underset{x \in [a,b]}{\text{Maximum}}\, f(x)$$

das zu berechnende Integral in folgende Form transformieren:

$$I = (O - U) \cdot (b - a) \cdot \int_0^1 h(x)\,dx + (b - a) \cdot U = (b - a) \cdot ((O - U) \cdot \int_0^1 h(x)\,dx + U)$$

wobei der entstandene Integrand $h(x) = \dfrac{f(a + (b-a) \cdot x) - U}{O - U}$

die geforderte Bedingung $0 \leq h(x) \leq 1$ erfüllt.

- Das nach Transformation erhaltene Integral für h(x) bestimmt geometrisch die Fläche unterhalb der Funktionskurve von h(x) im Einheitsquadrat $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$:
  * Dieser geometrische Sachverhalt lässt sich zur näherungsweisen Berechnung des Integrals heranziehen, indem man eine *Simulation* mit *gleichverteilten Zufallszahlen* durchführt.
  * Man erzeugt n Zahlenpaare (x_i, y_i) von im Intervall [0,1] gleichverteilten Zufallszahlen und zählt nach, welche Anzahl z(n) der Zahlenpaare davon in die durch $h(x)$ bestimmte Fläche fallen, d.h. für die $y_i \leq h(x_i)$ gilt.
  * Unter Verwendung der *relativen Häufigkeit* (siehe Abschn.14.4.1) liefert der Quotient z(n)/n eine *Näherung* für das Integral, d.h.

$$\int_0^1 h(x)\,dx \approx \frac{z(n)}{n}$$

Beispiel 14.10:

Schreiben wir ein VBA-Funktionsprogramm MC_INT für den im Beisp.14.9 gegebenen Algorithmus zur Integralberechnung mittels *Monte-Carlo-Simulation:*

- Wir stellen eine mögliche Variante des Funktionsprogramms vor, in dem wir die VBA-Funktion **Rnd** zur Erzeugung von im Intervall (0,1) gleichmäßig verteilter Zufallszahlen einsetzen:

```
Function MC_INT(a As Double, b As Double, U As Double, O As Double,
                    n As Integer) As Double
MC_INT = 0
For k = 1 To n
x = Rnd
y = Rnd
If y <= (INTEGR(a + (b - a) * x) - U) / (O - U) Then
MC_INT = MC_INT + 1
End If
Next k
MC_INT = (b - a) * ((O - U) * MC_INT / n + U)
End Function
```

- Unter Zufallszahlen versteht man von einer Zufallsgröße (siehe Abschn.14.4.2) angenommene Zahlenwerte.
- Da Zufallsgrößen gewissen Wahrscheinlichkeitsverteilungen genügen, unterliegen Zufallszahlen ebenfalls diesen Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
- Zufallszahlen lassen sich auf *Computern* mittels *Zufallszahlengeneratoren* erzeugen:
  - Diese sind i.Allg. keine wirklich auf Basis zufälliger Prozesse arbeitende Erzeuger von Zufallszahlen:
    * Sie wenden verschiedene mathematische Methoden an (so z.B. Rekursionsformeln).
    * Deshalb werden von Computern erzeugte Zufallszahlen als *Pseudozufallszahlen* bezeichnet.
  - Am einfachsten gelingt die Erzeugung von Zufallszahlen, die auf dem Intervall [0,1] *gleichmäßig verteilt* sind, d.h. alle Zahlenwerte zwischen 0 und 1 treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.
  - Aus gleichmäßig verteilten Zufallszahlen kann man durch Transformation Zufallszahlen gewinnen, die einer *beliebig vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung* genügen.
  - EXCEL stellt zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen zwei Funktionen zur Verfügung, die wir im Beisp.14.8 vorstellen.

14.6.2 Monte-Carlo-Simulationen

Monte-Carlo-Simulationen (*Monte-Carlo-Methoden*), d.h. *stochastische Simulationen*, beruhen auf Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und lassen sich folgendermaßen *charakterisieren:*

- Zu untersuchende deterministische oder stochastische Vorgänge/Prozesse/Systeme werden durch formale *stochastische mathematische Modelle* ersetzt, d.h. angenähert.
- Das charakteristische Merkmal für Monte-Carlo-Simulationen ist die Verwendung von *Zufallszahlen:*
  - Anhand des aufgestellten stochastischen Modells werden unter Verwendung von Zufallszahlen zufällige *Experimente* mittels Computer durchgeführt.
  - In Auswertung der Ergebnisse dieser zufälligen Experimente erhält man *Näherungslösungen* für die zu untersuchende Aufgabe.
- Monte-Carlo-Simulationen finden ein breites Anwendungsspektrum sowohl in Technik und Naturwissenschaften als auch Wirtschaftswissenschaften (siehe Abschn.14.6.3):
  - Zur Untersuchung komplexer Vorgänge/Prozesse/Systeme, bei der nur eine Computersimulation unter Anwendung von Zufallszahlen mit vertretbarem Aufwand möglich ist, während sich die Anwendung deterministischer Methoden zu aufwendig gestaltet.
  - Zur Untersuchung von Vorgängen/Prozessen/Systemen, in denen gewisse Größen zufallsbedingt sind.
  - Sie lassen sich auch zur Lösung deterministischer mathematischer Aufgaben einsetzen. Wir geben hierfür eine Illustration zur Integralberechnung (Beisp.14.9-14.11).

- Im vorgestellten VBA-Funktionsprogramm MC_INT (a , b , U , O , n) bedeuten die Argumente Folgendes:
  - a und b untere bzw. obere Integrationsgrenze.
  - U und O Minimum bzw. Maximum des Integranden $f(x)$ auf dem Intervall [a,b].
  - n die vorgegebene Zahl der von VBA zu erzeugenden Zufallszahlen.
- Das Funktionsprogramm MC_INT ist so angelegt, dass die zu integrierende Funktion (Integrand) als VBA-Funktionsprogramm INTEGR benötigt wird, das sich im gleichen Modul wie MC_INT befinden muss:

```
Function INTEGR (x As Double) As Double
' In der folgenden Zuweisung INTEGR = ist der für die Anwendung des
' Programms MC_INT benötigte konkrete
' Integrand f (x) anstatt der Punkte ...... einzugeben:
INTEGR = .........
End Function
```

- Das Funktionsprogramm MC_INT kann zur näherungsweisen Berechnung beliebiger bestimmter Integrale benutzt werden (siehe Beisp.14.11). Man muss vor Aufruf des Programms
  - dem Integranden $f(x)$ in einem VBA-Funktionsprogramm INTEGR die konkrete Funktion zuweisen,
  - Minimum U und Maximum O des Integranden $f(x)$ auf dem Intervall [a,b] bestimmen,
  - die Anzahl n zu erzeugender Zufallszahlen festlegen.

  Diese erforderliche Vorgehensweise illustrieren wir im folgenden Beisp.14.11.

Beispiel 14.11:

Berechnen wir Näherungswerte für das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t \cdot e^{-t}\, dt = -2 \cdot e^{-1} + 1 = 0{,}2642411176571153.....$$

aus Beisp.9.3, indem wir das im Beisp.14.10 vorgestellte VBA-Programm MC_INT zur Integralberechnung mittels Monte-Carlo-Simulation heranziehen, wobei folgendermaßen vorzugehen ist:

- Zur Anwendung des Programms MC_INT benötigt man Minimum U und Maximum O des Integranden $t \cdot e^{-t}$ im Integrationsintervall [0,1]:
  - Der Integrand ist hier eine monoton wachsende Funktion, wie sich leicht durch grafische Darstellung mittels EXCEL veranschaulichen lässt.
  - Damit werden Minimum U = 0 und Maximum O = 1/e = 0,368 am linken bzw. rechten Ende des Integrationsintervalls [0,1] angenommen.
- Bevor man MC_INT aufrufen kann, ist im gleichen Modul des VBA-Editors, in dem sich das Programm MC_INT befindet, folgendes Funktionsprogramm zu erstellen:

Bemerkung

Bei der Anwendung von Monte-Carlo-Simulationen ist zu beachten, dass bei jeder Durchführung mit gleicher Anzahl von Zufallszahlen i.Allg. ein anderes Ergebnis auftritt, da andere Zufallszahlen berechnet werden (siehe Beisp.14.11).

♦

14.6.3 Anwendungen in der Wirtschaft

Simulationen spielen in ökonomischen Untersuchungen eine große Rolle, da betrachtete Vorgänge/Prozesse/Systeme oft so komplex sind, dass sie nicht mehr direkt untersucht werden können:

- In der Wirtschaft werden Simulationen u.a. zur Untersuchung von Lagerhaltungsproblemen, Verkehrsabläufen, Bedienungs- und Reihenfolgeproblemen, Warteschlangenproblemen, Gewinnschätzungen, Instandhaltungsstrategien, Planung von Investitionen eingesetzt
- Ausführlichere Informationen zu diesen Anwendungen findet man in der Literatur (siehe [153, 156, 157]).

14.6.4 Einsatz von EXCEL

Mittels EXCEL lassen sich einfache Monte-Carlo-Simulationen durchführen:

- In EXCEL gibt es zwei integrierte Funktionen zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen:
  - Wir stellen sie im Beisp.14.8 vor.
  - Benötigt man anders verteilte Zufallszahlen, so lassen sich diese durch einfache Transformationen aus gleichverteilten gewinnen.
- Da man mittels EXCEL und der integrierten Programmiersprache VBA Zufallszahlen erzeugen kann, bieten sich folgende Möglichkeiten zur Durchführung von Monte-Carlo-Simulationen an:
  - Man kann VBA-Programme erstellen:
    Wir illustrieren im Beisp.14.10 für die Integralberechnung, wie man unter Verwendung der Programmiersprache VBA problemlos Algorithmen zur Monte-Carlo-Simulation realisieren kann.
  - Man kann für EXCEL bereitgestellte Add-Ins zur Simulation anwenden, von denen wir zwei nennen, die von USA-Softwarefirmen angeboten werden:
    * RISK: von der Softwarefirma PALISADE CORPORATION mit der Internetadresse
      http://www.palisade-europe.com
    * XLSIM: von der Softwarefirma ANALYCORP mit der Internetadresse
      http://www.analycorp.com

    Auf Add-Ins können wir im Rahmen des Buches nicht eingehen und verweisen auf die angegebenen Internetadressen, unter den sich auch kostenlose Probeversionen herunterladen lassen.

```
Function INTEGR (t As Double) As Double
INTEGR = t*EXP(–t)
End Function
```

- Abschließend kann man für verschiedene Werte von n das Programm folgendermaßen aufrufen: =MC_INT (0 **;** 1 **;** 0 **;** 0,368 **;** n)
- In folgender Tabelle sind Ergebnisse der Berechnung des gegebenen Integrals mittels MC_INT für verschiedene Anzahlen n von erzeugten Zufallszahlen zusammengestellt:

n	Wert des Integrals
100	0,258
1000	0,258
10000	0,266
20000	0,265
30000	0,264

- Berechnen wir das gegebene Integral I mittels MC_INT für n = 10000 durch mehrmaliges Erzeugen von 10000 Zufallszahlen:

Versuch	Wert des Integrals
1.	0,262
2.	0,261
3.	0,267
4.	0,265
5.	0,264
6.	0,266

Man sieht, dass bei jedem Programmaufruf ein anderes Ergebnis auftreten kann, da andere Zufallszahlen erzeugt werden.

- Das gegebene Beispiel lässt erkennen, dass die Monte-Carlo-Simulation zur Berechnung einfacher Integrale keine Vorteile gegenüber den im Abschn.9.3.3 vorgestellten deterministischen numerischen Methoden bringt:
  - Simulationen besitzen zur Lösung mathematischer Aufgaben erst Vorteile bei höherdimensionalen Aufgaben.
  - Die vorgestellte Monte-Carlo-Simulation kann unmittelbar auf mehrfache Integrale übertragen werden, für deren Berechnung sie eine effektivere Methode liefert.

Literaturverzeichnis

1. Wirtschaftsmathematik

[1] Auer, Seitz: Grundkurs Wirtschaftsmathematik, Verlag Gabler 2006,

[2] Bosch: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 1991,

[3] Bosch: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 1996,

[4] Breitung, Filip: Einführung in die Mathematik für Ökonomen, Oldenburg Verlag 1989,

[5] Bücker: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenburg Verlag 2003,

[6] Büning, Naeve, Trenkler, Waldmann: Mathematik für Ökonomen im Hauptstudium, Oldenbourg Verlag 2000,

[7] Clausen, Kerber: Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler, BI Wissenschaftsverlag 1991,

[8] Dietmaier: Mathematik für Wirtschaftsingenieure, Fachbuchverlag 2005,

[9] Dorninger, Karigl: Mathematik für Wirtschaftsinformatiker, Springer Verlag 1996,

[10] Dörsam: Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften, PD-Verlag 2004,

[11] Dörsam: Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften-Aufgabensammlung mit Lösungen, PD-Verlag 2005,

[12] Dück, Körth, Runge, Wunderlich: Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik, Verlag Harry Deutsch 1983,

[13] Eichholz, Vilkner: Taschenbuch der Wirtschaftsmathematik, Carl Hanser Verlag 1997,

[14] Gal u.a.: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Verlag 1991,

[15] Goldberg: Differenzengleichungen und ihre Anwendung in Wirtschaftswissenschaft, Psychologie und Soziologie, Oldenbourg Verlag 1968,

[16] Grosser u.a.: Wirtschaftsmathematik für Fachhochschulen, Verlag Harri Deutsch 1983,

[17] Hauptmann: Mathematik für Betriebs- und Volkswirte, Oldenburg Verlag 1991,

[18] Heinrich: Grundlagen der Mathematik, der Statistik und des Operations Research für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 1994,

[19] Hoffmann: Mathematische Grundlagen für Betriebswirtschaftler, Verlag Neue Wirtschaftsbriefe Herne 1991,

[20] Huang, Schulz: Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenburg Verlag 1993,

[21] Hülsmann u.a.: Einführung in die Wirtschaftsmathematik, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 2005,

[22] Kallischnigg, Kockelkorn: Mathematik für Volks- und Betriebswirte, Oldenbourg Verlag 1995,

[23] Karmann: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 2003,

[24] Kemeny, Schleifer, Snell, Thompson: Mathematik für die Wirtschaftspraxis, De Gruyter 1972,

[25] König, Neumann: Mathematische Wirtschaftstheorie, Hain Verlag 1986,

[26] König u.a.: Taschenbuch der Wirtschaftsinformatik und Wirtschaftsmathematik, Verlag Harry Deutsch 2003,

[27] Kolberg: Betriebswirtschaftliche Formeln und Verfahren, Verlag Markt + Technik 1995,

[28] Lohse, Wille: Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, Binomi Verlag 2003,

[29] Luderer, Würker: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik, Teubner Verlag 2001,

[30] Luderer, Paape, Würker: Arbeits- und Übungsbuch Wirtschaftsmathematik, Teubner Verlag 2001,

[31] Luh, Stadtmüller: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 1989,

[32] Marinell: Mathematik für Sozial- und Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 1979,

[33] Mayer, Weber: Lineare Algebra für Wirtschaftswissenschaftler, Verlag Gabler 2004,

[34] Mühlbach: Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften, Binomi Verlag 2000,

[35] Nollau: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Teubner Verlag 2003,

[36] Ohse: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, II, Verlag Vahlen 1994,

[37] Opitz: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenburg Verlag 2004,

[38] Pfuff: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, II, III, Vieweg Verlag 1989,

[39] Rödder, Zörnig: Wirtschaftsmathematik für Studium und Praxis 1-3, Springer Verlag 1997,

[40] Rommelfanger: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I, II, Spektrum Akademischer Verlag 2004,

[41] Rommelfanger: Übungsbuch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Spektrum Akademischer Verlag 2004,

[42] Schmidt: Mathematik-Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler, Springer Verlag 2000,

[43] Schüffler: Mathematik in der Wirtschaftswissenschaft, Carl Hanser Verlag 1991,

[44] Senger: Mathematik - Grundlagen für Ökonomen, Oldenbourg Verlag 2004,

[45] Sydsaeter, Hammond: Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Pearson Studium 2004,

[46] Tallig: Anwendungsmathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 2006,

[47] Terveer, BWL-Crash-Kurs Mathematik, UVK Verlagsgesellschaft 2005,

[48] Tietze: Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik, Vieweg Verlag 2003,

[49] Unsin: Wirtschaftsmathematik, expert-Verlag 1991,

[50] Vogt: Einführung in die Wirtschaftsmathematik, Physica Verlag 1988,

[51] Volkmann: Grundlagen der Wirtschaftsmathematik, Springer Verlag 1989,

[52] Zehfuß: Wirtschaftsmathematik, Oldenbourg Verlag 1987,

2. Finanzmathematik

[53] Adelmeyer, Warmuth: Finanzmathematik für Einsteiger, Vieweg Verlag 2005,

[54] Alt: Finanzmathematik, Vieweg Verlag 1986,

[55] Ayres: Finanzmathematik, Mc Graw-Hill 1979,

[56] Berliner, Bühlmann: Einführung in die Finanzmathematik, Verlag Paul Haupt 1992,

[57] Bosch: Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag 1994,

[58] Bühlmann, Berliner: Einführung in die Finanzmathematik, Verlag Paul Haupt 1992,

[59] Franke, Härdle, Hafner: Einführung in die Statistik der Finanzmärkte, Springer Verlag 2001,

[60] Grob, Everding: Finanzmathematik mit dem PC, Verlag Gabler 1992,

[61] Grundmann: Finanz- und Versicherungsmathematik, Teubner Verlag 1996,

[62] Grundmann: Finanzmathematik mit MATLAB, Teubner Verlag 2004,

[63] Grundmann, Luderer: Formelsammlung Finanzmathematik, Versicherungsmathematik, Wertpapieranalyse, Teubner Verlag 2001,

[64] Hass: Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag 1995,

[65] Herzberger: Einführung in die Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag 1999,

[66] Herzberger: Übungsbuch zur Finanzmathematik, Vieweg Verlag 1999,

[67] Irle: Finanzmathematik, Teubner Verlag 1998,

[68] Ihrig, Pflaumer: Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag 1995,

[69] Kobelt, Schulte: Finanzmathematik, Verlag Neue Wirtschafts-Briefe Herne 1991,

[70] Köhler: Finanzmathematik, Carl Hanser Verlag 1987,

[71] Korn: Optionsbewertung und Portfolio,Vieweg Verlag 1999,

[72] Kremer: Einführung in die Diskrete Finanzmathematik, Springer Verlag 2006,

[73] Kruschwitz: Finanzmathematik, Verlag Vahlen 1995,

[74] Locarek: Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag 1992,

[75] Luderer: Starthilfe Finanzmathematik, Teubner Verlag 2003,

[76] Martin: Finanzmathematik, Fachbuchverlag 2003,

[77] Pfeifer: Praktische Finanzmathematik, Verlag Harry Deutsch 2004,

[78] Reitz, Schwarz, Martin: Zinsderivate, Vieweg Verlag 2004,

[79] Sandmann: Einführung in die Stochastik der Finanzmärkte, Springer Verlag 1999,

[80] Schmid, Trede: Finanzmarktstistik, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 2006,

[81] Seydel: Tools for Computational Finance, Springer Verlag 2002,

[82] Tietze: Einführung in die Finanzmathematik, Vieweg Verlag 1996,

[83] Tietze: Übungsbuch zur Finanzmathematik, Vieweg Verlag 2000,

[84] Ziethen: Finanzmathematik, Oldenbourg Verlag 1992,

3. Operationsforschung - Operations Research

[85] Domschke, Drexl: Einführung in Operations Research, Springer Verlag 1998,

[86] Domschke, Drexl, Klein, Scholl, Voß: Übungen und Fallbeispiele zum Operations Research, Springer Verlag 2000,

[87] Ellinger, Beuermann, Leisten: Operations Research, Springer Verlag 2001,

[88] Feichtinger, Hartl: Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse, Walter de Gruyter 1986,

[89] Hillier, Lieberman: Einführung in Operations Research, Oldenbourg Verlag 1995,

[90] Kathöfer, Müller-Funk: BWL-Crash-Kurs Operations Research, UVK Verlagsgesellschaft 2005,

[91] Suhl, Mellouli: Optimierungssysteme, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 2006,

[92] Werners: Grundlagen des Operations Research, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 2006,

[93] Zimmermann: Operations Research, Oldenburg Verlag 1995,

4. Simulation

[94] Liebl: Simulation, Oldenbourg Verlag 1995,

5. Statistik

[95] Bosch: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vieweg Verlag Braunschweig, Wiesbaden 1986,

[96] Bosch: Elementare Einführung in die angewandte Statistik, Vieweg Verlag Braunschweig, Wiesbaden 1987,

[97] Bosch: Statistik-Taschenbuch, Oldenbourg Verlag München 1993,

[98] Brandt: Datenanalyse, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin 1999,

[99] Bücker: Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenburg Verlag 1994,

[100] Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz: Statistik, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1999,

[101] Fahrmeir, Künstler, Pigeot, Tutz, Caputo, Lang: Arbeitsbuch Statistik, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1999,

[102] Fischer: Stochastik einmal anders, Vieweg Verlag Braunschweig, Wiesbaden 2005,

[103] Hafner: Statistik für Sozial- und Wirtschaftswissenschaftler, Band 1 und 2, Springer Verlag 2001,

[104] Hansen: Methodenlehre der Statistik, Verlag Franz Vahlen München 1985,

[105] Henze: Stochastik für Einsteiger, Vieweg Verlag Braunschweig, Wiesbaden 1997,

[106] Mühlbach: Repetitorium der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Binomi Verlag 2002,

[107] Storm: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Statistische Qualitätskontrolle, Fachbuchverlag Leipzig-Köln 1995,

[108] Unger, Stier: Statistik, Repetitorium Wirtschaftswissenschaften, Gabler 1999,

6. Versicherungsmathematik

[109] Schmidt: Versicherungsmathematik, Springer Verlag 2002,

[110] Wolfsdorf: Versicherungsmathematik, Teil 1 und 2, Teubner Verlag 1986/88,

7. EXCEL

[111] Barkow: EXCEL 2003, Verlag KnowWare 2004,

[112] de Levie: Advanced EXCEL for scientific data analysis, Oxford University Press 2004,

[113] Gäßner: EXCEL GE-PACKT, mitp-Verlag 2003,

[114] Halfmann, Bauer: Das große Buch EXCEL 2003, 2000, XP, Data Becker 2003,

[115] Hanke: EXCEL 2002-2003, Verlag KnowWare 2005,

[116] Held, Schels: EXCEL- Geheime Tricks, Markt + Technik 2004,

[117] Held: EXCEL 2003-Formeln und Funktionen, bhv 2004,

[118] Held: EXCEL 2003-Formeln und Funktionen Band II, bhv 2006,

[119] Holland, Bracke: EXCEL für Techniker und Ingenieure, Vieweg Verlag 1996,

[120] Hunger: Professional EXCEL 2003, Specteia Lehrbuch Verlag 2005,

[121] Jarai: EXCEL echt einfach, Franzis Verlag 2004,

[122] Königs: Microsoft EXCEL 2003, bhv 2004,

[123] Kowalski: EXCEL, Data Becker 2006,

[124] Kronast: Excel 95 Lösungen für Naturwissenschaftler, Econ-Verlag 1996,

[125] Mewes: EXCEL für Controller, Addison-Wesley 2005,

[126] Nicol: Microsoft EXCEL für Fortgeschrittene, Microsoft Press 2004,

[127] Peyton: EXCEL 2003 - zum Nachschlagen, Sybex 2003,

[128] Ravens: Wissenschaftlich mit EXCEL arbeiten, Pearson Studium 2003,

[129] Reinke Solution Team: Microsoft EXCEL 2002-Das Handbuch, Microsoft Press 2001,

[130] Scheck: EXCEL professionell einsetzen, Franzis Verlag 2005,

[131] Schels: Microsoft Office EXCEL 2003, Markt + Technik 2004,

[132] Schwabe: EXCEL 2003, Markt + Technik 2004,

[133] Schwenk, Schuster, Schieke, Pfeifer: Microsoft Office EXCEL 2003 - Das Handbuch, Microsoft Press 2005,

[134] Vonhoegen: EXCEL 2003 professionell anwenden, Galileo Press 2004,

[135] Weber: Schnellübersicht EXCEL - Die praktische Referenz, Markt + Technik 2005,

8. Funktionen in EXCEL

[136] Held: Microsoft EXCEL 2003- Formeln und Funktionen, bhv Verlag 2004,

[137] Jeschke, Pfeifer, Reinke, Unverhau: Microsoft EXCEL-Funktionsverzeichnis, Microsoft Press 2006,

[138] Reinke, Jeschke: Microsoft EXCEL-Funktionsverzeichnis, Microsoft Press 2005,

[139] Schels: EXCEL- Formeln und Funktionen, Markt + Technik 2005,

9. Kaufmännisches Rechnen-Wirtschaftsrechnen mit EXCEL

[140] Braun: Lösung kaufmännischer Probleme mit MS-EXCEL unter Office 2000, Winklers Verlag 2001,

[141] Pannenberg: Die besten EXCEL-Lösungen fürs Büro, bhv 2006,

[142] Pannenberg: Kaufmännisches Rechnen mit EXCEL, bhv 2006,

[143] Schuster: Einführung in EXCEL mit Grundlagen des Wirtschaftsrechnens, Merkur Verlag 2005,

10. Mathematik mit EXCEL

[144] Bloch: EXCEL for Engineers and Scientists, Wiley 2003,

[145] Fleischhauer: EXCEL in Naturwissenschaft und Technik, Addison-Wesley 1998,

[146] Gäng: EXCEL 5 für Wissenschaft und Technik, Data Becker 1994,

[147] Groß: 100 EXCEL-Tabellen Mathematik, Franzis Verlag 2000,

[148] Kolberg: Betriebswirtschaftliche Formeln und Verfahren, Markt + Technik 1995,

[149] Martin: Berechnungen in EXCEL, Carl Hanser Verlag 2001,

[150] Metzger, Niedermair, Schmidt-Kemmeter: Mathe mit EXCEL - Für die Sekundarstufe I, Franzis Verlag 2004,

[151] Metzger, Niedermair, Schmidt-Kemmeter: Mathe mit EXCEL - Für die Sekundarstufe II, Franzis Verlag 2004,

[152] Metzger, Niedermair: Mathe-Abitur mit EXCEL, Franzis Verlag 2004,

11. Wirtschaftsmathematik mit EXCEL

[153] Barreto, Howland: Introductory Econometrics-Using Monte Carlo Simulation with Microsoft EXCEL, Cambridge University Press 2006,

[154] Auer, Seitz: Grundkurs Wirtschaftsmathematik, Verlag Gabler 2006,

[155] Benker: Wirtschaftsmathematik mit dem Computer, Vieweg Verlag 1997,

[156] Leiser: Angewandte Wirtschaftsmathematik - Modellierung und Bearbeitung von Fallstudien mit EXCEL, Schäffer-Poeschel Verlag 2000,

[157] Savage: Decision Making with Insight, Thomson Learning 2003,

12. Finanzmathematik mit EXCEL

[158] Fehrenbach, Albrecht: EXCEL: Geldanlagen und Kredite, Addison-Wesley 1995,

[159] Pfeifer: Praktische Finanzmathematik (CD-ROM für EXCEL), Verlag Harri Deutsch 2004,

[160] Renger: Finanzmathematik mit EXCEL, Gabler 2003,

13. Numerische Mathematik mit EXCEL

[161] Mesina: Numerische Mathematik mit EXCEL, Franzis Verlag 2001,

[162] Nandy: Practical numerical analysis using Microsoft EXCEL, Alpha Science International 2004,

14. Optimierung mit EXCEL

[163] Benker: Mathematische Optimierung mit Computeralgebrasystemen, Springer Verlag 2003,

15. Statistik mit EXCEL

[164] Duller: Einführung in die Statistik mit EXCEL und SPSS, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 2006,

[165] Erben: Statistik mit EXCEL 5, Oldenbourg 1995,

[166] Hafner, Waldl: Statistik für Sozial- und Wirtschaftswissenschaftler, Band 2 - Arbeitsbuch für SPSS und Microsoft EXCEL, Springer Verlag 2001,

[167] Matthäus: Lösungen für die Statistik mit EXCEL 97, Thomson Publishing 1998,

[168] Matthäus, Schulze: Statistik mit EXCEL, Teubner Verlag 2003,

[169] Monka, Voß: Statistik am PC-Lösungen mit EXCEL, Carl Hanser Verlag 1996,

[170] Nakanishi, Gießen: Statistik mit EXCEL fürs Büro, Franzis Verlag 2005,

[171] Radke: Statistik mit EXCEL, Markt + Technik 2005,

[172] Schweitzer: Statistik mit EXCEL, Franzis Verlag 2003,

[173] Zwerenz: Statistik - Datenanalyse mit EXCEL und SPSS, Oldenbourg Verlag 2001,

[174] Zwerenz: Statistik verstehen mit EXCEL, Oldenbourg Verlag 2001,

16. VBA-Programmierung mit EXCEL

[175] Baloui: VBA mit EXCEL, Markt + Technik 2004,

[176] Bayer: Programmierung, Addison-Wesley 2001,

[177] Baumeister, Petrowski:VBA, dtv 2002,

[178] Friedrich: VBA mit EXCEL - das umfassende Handbuch, Galileo Press 2005,

[179] Friedrich: Einstieg in VBA mit EXCEL, Galileo Press 2005,

[180] Frommhold: VBA programmieren in EXCEL & WORD 2003, Teia Lehrbuch Verlag 2004,

[181] Halvorson: Microsoft Visual Basic 2005, Microsoft Press 2006,

[182] Held: Schnellübersicht EXCEL-VBA - Die praktische Referenz, Markt + Technik 2004,

[183] Held: VBA mit EXCEL, Markt + Technik 2005,

[184] Held: EXCEL - VBA , Markt + Technik 2005,

[185] Jacobsen: Microsoft EXCEL 2000 Visual Basic Schritt für Schritt, Microsoft Press 1999,

[186] Kofler: EXCEL-VBA programmieren, Addison-Wesley 2005,

[187] Kofler: Visual Basic 2005, Addison-Wesley 2006,

[188] Löffelmann: Microsoft Visual Basic 2005, Microsoft Press 2006,

[189] Matthäus: Programmierung für Wirtschaftsinformatiker - Vorlesungen über Basic, Visual Basic und VBA, Teubner Verlag 2005,

[190] Merziger, Wirth: Basic Programme zur Höheren Mathematik, Binomi Verlag 1991,

[191] Mewes, Pfeifer, Spona: Microsoft EXCEL–Programmier-Rezepte, Microsoft Press 2005,

[192] Nicol, Albrecht: EXCEL 2002 programmieren, Franzis Verlag 2002,

[193] Nicol: EXCEL 2002/2003 programmieren, Franzis Verlag 2005,

[194] Perry: Jetzt lerne ich programmieren, Markt + Technik 1999,

[195] Reinke, Held, Schwenk, Gramm: Microsoft EXCEL 2000 Programmierung, Microsoft Press 2001,

[196] Schwimmer: EXCEL VBA, Pearson Studium 2005,

[197] Spona: VBA mit EXCEL, Verlag KnowWare 2005,

[198] Spona: VBA-Programmierung mit Microsoft Office 2003, bhv 2005,

[199] Weber, Breden: Das EXCEL-VBA Codebook, Addison-Wesley 2002,

[200] Weber: VBA-Programmierung mit Microsoft EXCEL - Das Profibuch, Microsoft Press 2004,

[201] Weber: Microsoft EXCEL VBA, Microsoft Press 2005,

[202] Weber, Schwimmer: EXCEL Programmierung, Microsoft Press 2005,

17. Grafik mit EXCEL

[203] Barkow: Diagramme mit EXCEL 2003, Verlag KnowWare 2005,

[204] Rehn-Göstenmeier: EXCEL 2003 Diagramme und Charts, bhv 2005,
[205] Scheck: Microsoft EXCEL Diagramme, Microsoft Press 2005,
[206] Schels: Tabellen und Diagramme, Markt + Technik 2006,
[207] Voß, Schönbeck: Statistische Grafiken mit EXCEL, Carl Hanser Verlag 2003.

Sachwortverzeichnis

(Dialogfelder, Funktionen und Menüs von EXCEL und Funktionen und Schlüsselwörter der in EXCEL integrierten Programmiersprache VBA sind im Fettdruck geschrieben)

—B—

—C—

—D—

—E—

—F—

—N—

—O—

—P—

—T—