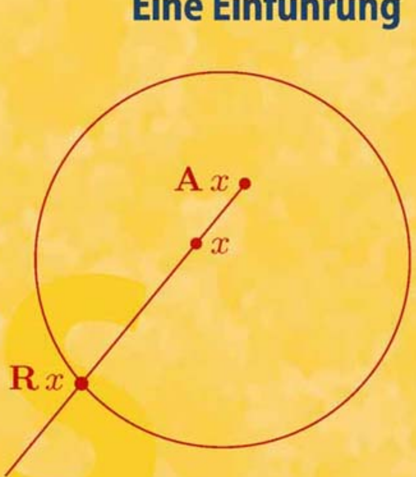
Michael Růžička

Nichtlineare Funktionalanalysis

Eine Einführung



$$\mathbf{R}\,x = x \quad \forall x \in \partial B_1(0)$$

Springer

Růžička
Nichtlineare Funktionalanalysis

Springer
Berlin
Heidelberg
New York
Hongkong
London
Mailand
Paris
Tokio

Michael Růžička

Nichtlineare Funktionalanalysis

Eine Einführung

Springer

Prof. Dr. Michael Růžička
Universität Freiburg
Mathematisches Institut
Abteilung für Angewandte Mathematik
Eckerstraße 1
79104 Freiburg, Deutschland
e-mail: rose@mathematik.uni-freiburg.de

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internetüber <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 46-01, 46T, 47H, 47J, 35J, 35K

ISBN 3-540-20066-5 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

springer.de

Einbandgestaltung: *design & production,* Heidelberg
Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines Springer LaTeX- Makropakets
Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3142CK-5 4 3 2 1 0

für Susanne,
Martin und Felix

Vorwort

Das Buch ist entstanden aus einsemestrigen Vorlesungen, die ich im SS 1999 an der Universität Bonn und in den SS 2002, 2003 an der Universität Freiburg für Studierende ab dem 6. Semester gehalten habe. Ziel war es, aus dem großen Gebiet der *nichtlinearen Funktionalanalysis* solche Methoden und Techniken auszuwählen, die von allgemeinem Interesse sind und eine zentrale Rolle bei der Untersuchung von nichtlinearen elliptischen und parabolischen partiellen Differentialgleichungen spielen.

Bei der Auswahl und der Darstellung des Stoffes habe ich das Zusammenspiel und die gegenseitige Beeinflussung von Theorie und Anwendungen in den Vordergrund gestellt. Zugleich sollte der Stoff in einer einsemestrigen Vorlesung darstellbar und in sich geschlossen sein. Es ist klar, dass dabei viele interessante und wichtige Themenkomplexe nicht berücksichtigt werden können, wie schon allein aus dem Umfang des enzyklopädischen Werkes von E. Zeidler „Nonlinear functional analysis and its application. I – IV“ [23], [24], [25], [26], [27] ersichtlich ist. Für das Verständnis des Buches ist natürlich die Grundausbildung in Analysis und Linearer Algebra Voraussetzung. Darüber hinaus sind Kenntnisse in linearer Funktionalanalysis und Lebesguescher Maß– und Integrationstheorie notwendig. Alle Resultate aus den beiden letztgenannten Gebieten, die im vorliegenden Buch benutzt werden, sind im Appendix zusammengestellt.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei all jenen bedanken, die zur Entstehung des Buches beigetragen haben. Ich möchte mich bei J. Frehse für viele inhaltliche Diskussionen bedanken und dafür, dass er mich darin bestärkt hat, dieses Buch zu schreiben. Eine erste Mitschrift der Vorlesung, die auch die Grundlage dieses Buches ist, wurde von S. Goj und K. Lorenz geTEXt und ausgearbeitet. Ich möchte mich auch bei L. Diening und S. Knies bedanken, die das gesamte Buch gelesen und viele Verbesserungen eingebracht haben. Und nicht zuletzt bin ich den Studenten meiner Vorlesungen, insbesondere C. Diehl, F. Ettwein, A. Huber, H. Junginger und B. Münstermann, dankbar für die vielen Fragen und Anregungen, die hoffentlich dem Buch zugute gekommen sind.

Freiburg, November 2003 M. Růžička

Notation

In jedem Abschnitt der einzelnen Kapitel sind Sätze, Lemmata, Definitionen und Formeln fortlaufend gemeinsam durchnummeriert. Hierfür wird die Abschnittsnummer und die laufende Nummer benutzt. Bei Verweisen innerhalb eines Kapitels, werden nur diese Nummern angegeben. Wird in ein anderes Kapitel verwiesen, so wird zusätzlich die Kapitelnummer vorangestellt, z.B. wird auf Satz 2.17 bzw. Formel (2.24) des Kapitels 1 innerhalb von Kapitel 1 durch Satz 2.17 bzw. (2.24) verwiesen und von allen anderen Kapitels aus durch Satz 1.2.17 bzw. (1.2.24). Auf Abschnitte bzw. Formeln im Appendix wird z.B. durch Abschnitt A.12.2 bzw. Formel (A.12.26) verwiesen.

In diesem Buch wird die allgemein übliche Notation verwendet. Vektoren $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, und vektorwertige Funktionen $\mathbf{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, $d, n \in \mathbb{N}$, werden im Fettdruck notiert. Eine Ausnahme bilden Punkte $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, wenn Ω der Definitionsbereich einer Funktion ist. In den Rechnungen auftretende Konstanten sind immer positiv und werden mit $c, C, C_1, \ldots$ bezeichnet. Sie können sich von Zeile zu Zeile verändern. Durch $c(\alpha)$ wird angegeben, dass die Konstante c von der Größe α abhängt.

Inhaltsverzeichnis

1 Fixpunktsätze

Eines der wichtigsten Instrumente bei der Behandlung nichtlinearer Probleme mit Methoden der Funktionalanalysis sind *Fixpunktsätze*. Für eine gegebene Abbildung $T\colon A \to B$ bezeichnet man jede Lösung der Gleichung

$$Tx = x$$

als **Fixpunkt**. Fixpunktsätze garantieren, unter bestimmten Bedingungen an die Abbildung $T\colon A \to B$ und die Mengen A und B, die Existenz von Fixpunkten. Ein einfaches Beispiel für eine Abbildung, die keinen Fixpunkt besitzt, ist die Translation

$$Tx = x + x_0 \qquad\qquad x_0 \in X,\ x_0 \neq 0\,.$$

Die folgenden Beispiele illustrieren, wie die Behandlung nichtlinearer Probleme auf die Lösung von Fixpunktproblemen zurückgeführt werden kann:

- Nullstellenbestimmung von nichtlinearen Funktionen:

  $$F(x) = 0\,.$$

  Diese Gleichung kann auf verschiedene Weisen in ein Fixpunktproblem für einen Operator T umgeschrieben werden:

  $$\begin{aligned} &Tx = x - F(x) && \text{(einfachste Möglichkeit)}\,,\\ &Tx = x - \omega F(x) && \text{(lineare Relaxation mit } \omega > 0)\,,\\ &Tx = x - \big(F'(x)\big)^{-1} F(x) && \text{(Newtonverfahren)}\,. \end{aligned}$$

- Gewöhnliche Differentialgleichungen:

  $$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t))\,,\\ x(0) &= p_0\,. \end{aligned}$$

  Für eine gegebene stetige Funktion $f : Q \subseteq \mathbb{R} \times X \to X$, wobei X ein Banachraum sein kann, ist dieses Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung

  $$x(t) = p_0 + \int_0^t f\big(s, x(s)\big)\, ds\,.$$

  Wenn man die rechte Seite dieser Gleichung mit $T_{p_0}x$ bezeichnet, ist die

Integralgleichung äquivalent zum Fixpunktproblem $T_{p_0}x = x$, wobei der Operator T_{p_0} auf einem geeigneten Funktionenraum definiert ist.

- Nichtlineare partielle Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \qquad && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

wobei f eine gegebene nichtlineare Funktion ist und die Funktion u gesucht wird. Dieses Problem kann man mithilfe von

$$Tu = (-\Delta)^{-1}\big(f(u)\big)$$

in ein Fixpunktproblem umschreiben.

1.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Wir wählen einen konstruktiven Zugang zur Lösung des Fixpunktproblems

$$Tx = x\,, \qquad\qquad x \in M\,, \tag{1.1}$$

wobei im Allgemeinen T eine nichtlineare Abbildung ist, die auf einer Menge M definiert ist. Wir betrachten die *iterative Folge*

$$x_0 \in M\,, \qquad x_{n+1} := Tx_n\,, \qquad n = 0, 1, 2\ldots\,, \tag{1.2}$$

die unter bestimmten Bedingungen gegen einen Fixpunkt von T konvergiert.

1.3 Definition. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Ein Operator $T\colon M \to X$ heißt* ***k−kontraktiv*** *genau dann, wenn es ein $k \in (0, 1)$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ gilt:*

$$d(Tx, Ty) \le k\, d(x, y)\,. \tag{1.4}$$

T heißt ***kontraktiv****, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt:*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)\,.$$

Der folgende Satz ist von grundlegender Bedeutung für iterative Verfahren, die sowohl zum theoretischen Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und deren Stabilität, als auch zur numerischen Berechnung von approximativen Lösungen und dazugehörigen apriori und aposteriori Fehlerabschätzungen benutzt werden.

1.5 Satz (Banach 1922). *Sei $M \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene Menge eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) und sei*

$$T\colon M \subseteq X \to M \tag{1.6}$$

ein gegebener k–kontraktiver Operator. Dann gilt:

(i) *Die Gleichung* (1.1) *hat genau eine Lösung* $x \in M$*, d.h.* T *hat genau einen Fixpunkt in* M*.*

(ii) *Die durch* (1.2) *definierte iterative Folge* (x_n) *konvergiert gegen die Lösung* x *für alle Anfangswerte* $x_0 \in M$*.*

Der Banachsche Fixpunktsatz sagt bildlich gesprochen aus, dass der Graph des Operators T über der Menge M einen eindeutig bestimmten Schnittpunkt mit der Diagonale, d.h. der Identitätsabbildung I, besitzt.

Beweis (Satz 1.5). Sei $x_0 \in M$ beliebig. Aufgrund der Definition der Folge (x_n) und wegen der k–Kontraktivität des Operators T gilt:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \le k\, d(x_{n-1}, x_n) \le \dots \le k^n\, d(x_0, x_1)\,.$$

Dies und die Dreiecksungleichung liefern

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\le (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m-1})\, d(x_0, x_1) \\ &= k^n(1 + k + k^2 + \dots + k^{m-1})\, d(x_0, x_1) \\ &\le \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1)\,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

wobei die Summenformel für die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{m-1} k^n \le \sum\limits_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$ benutzt wurde. Da $k < 1$ vorausgesetzt wurde, haben wir gezeigt, dass (x_n) eine Cauchy–Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von X folgt daraus, dass es ein Element $x \in X$ gibt mit

$$d(x_n, x) \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Da T nach Voraussetzung (1.6) eine Selbstabbildung der Menge M ist, liegen aufgrund der Konstruktion (1.2) alle Folgenglieder in M. Die Menge M ist abgeschlossen und somit liegt auch der Grenzwert x der Folge (x_n) in M. Der Operator T ist k–kontraktiv, also insbesondere stetig, und demzufolge kann man in der Gleichung (1.2) den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen und erhält

$$x = Tx\,, \tag{1.8}$$

und damit die Existenz einer Lösung des Problems (1.1).

Es bleibt die Eindeutigkeit der Lösung zu zeigen. Angenommen, x und y seien zwei Lösungen von (1.1), d.h. $Tx = x$ und $Ty = y$. Aufgrund der k–Kontraktivität des Operators T folgt dann

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \le k\, d(x, y)\,.$$

Wegen $k < 1$ muss also $d(x, y) = 0$ gelten, d.h. $x = y$. ■

Bemerkungen. (i) Die folgenden Gegenbeispiele zeigen, dass keine der Voraussetzungen des Satzes 1.5 weggelassen werden kann:

(a) $M = \emptyset$, T beliebig
Dann kann T natürlich keinen Fixpunkt haben.

(b) $M = [0, 1]$, $\quad N = [2, 3]$, $\quad T\colon M \to N$
T bildet M nicht in sich selbst ab und hat deshalb natürlich keinen Fixpunkt.

(c) $M = (0, 1)$, $\quad Tx = \frac{x}{2}$
M ist nicht abgeschlossen, die Abbildung besitzt keinen Fixpunkt in M.

(d) $M = \mathbb{R}$, $\quad Tx = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arc\,tan} x$
Für die Ableitung gilt $T'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ und somit folgt nach dem Mittelwertsatz $|Tx - Ty| = |1 - \frac{1}{1+\zeta^2}||x - y| < |x-y|$, d.h. T ist kontraktiv, aber nicht k–kontraktiv; T hat in $\mathbb{R}$ keinen Fixpunkt.

(ii) Für die durch (1.2) definierte iterative Folge kann man weiterhin beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq \frac{k^n}{1-k}\, d(x_1, x_0)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\leq \frac{k}{1-k}\, d(x_{n+1}, x_n)\,, \\ d(x_{n+1}, x) &\leq k\, d(x_n, x)\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Ungleichung $(1.9)_1$ nennt man *apriori Fehlerabschätzung*, während $(1.9)_2$ eine *aposteriori Fehlerabschätzung* ist. Ungleichung $(1.9)_3$ zeigt, dass die Methode (1.2) eine *lineare Konvergenzgeschwindigkeit* besitzt.

(iii) Ein Beispiel für ein iteratives Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit ist das *Newtonverfahren*. Hierbei wird die Gleichung

$$F(x) = 0\,, \tag{1.10}$$

wobei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Lipschitz–stetiger Ableitung ist, in das äquivalente Fixpunktproblem

$$Tx = x\,, \qquad \text{mit} \quad Tx := x - \big(F'(x)\big)^{-1} F(x)$$

umgeschrieben. Falls $x^\star$ eine Lösung von (1.10) mit $F'(x^\star) \neq 0$ ist, kann man mit Hilfe der Taylorentwicklung zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass das iterative Verfahren (1.2) für alle Startwerte x_0 mit $|x_0 - x^\star| \leq \delta$ konvergiert und eine quadratische Konvergenzgeschwindigkeit besitzt, d.h. es gibt eine Konstante c mit

$$|x_{n+1} - x^\star| \leq c\, |x_n - x^\star|^2\,.$$

Diese Aussagen kann man auch auf Operatoren $F\colon X \to X$, wobei X ein Banachraum ist, verallgemeinern.

In vielen Anwendungen hängt T zusätzlich noch von einem Parameter $p \in P$ ab. Dabei ist P ein metrischer Raum, der so genannte *Parameterraum*. In diesem Fall betrachtet man das von $p \in P$ abhängige Fixpunktproblem:

$$T_p x_p = x_p\,, \qquad x_p \in M\,,\; p \in P\,. \tag{1.11}$$

1.12 Folgerung. *Es gelte:*

(i) *Die Operatoren $T_p \colon M \subset X \to X$ erfüllen für alle $p \in P$ die Voraussetzungen von Satz 1.5, wobei k von p unabhängig ist.*

(ii) *Es existiert ein $p_0 \in P$, so dass für alle $x \in M$ gilt: $T_p x \to T_{p_0} x$ in X $(p \to p_0)$.*

Dann existiert für alle $p \in P$ eine eindeutige Lösung x_p von (1.11) *und es gilt:*

$$x_p \to x_{p_0} \quad \textit{in } X \quad (p \to p_0)\,.$$

Beweis. Sei x_p die eindeutig bestimmte Lösung des Problems (1.11), die nach Satz 1.5 existiert. Für diese Lösungen gilt, aufgrund der gleichmäßigen k–Kontraktivität von T_p:

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p_0}) &= d(T_p x_p, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\le d(T_p x_p, T_p x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \\ &\le k\, d(x_p, x_{p_0}) + d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \end{aligned}$$

und somit folgt:

$$d(x_p, x_{p_0}) \le \frac{1}{1-k}\, d(T_p x_{p_0}, T_{p_0} x_{p_0}) \to 0 \qquad (p \to p_0)$$

nach Voraussetzung (ii), d.h. x_p konvergiert gegen x_{p_0} für $p \to p_0$. ∎

1.1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Als Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes betrachten wir folgendes Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t)\big)\,, \\ x(t_0) &= p_0\,, \end{aligned} \tag{1.13}$$

für eine *gewöhnliche Differentialgleichung* auf dem Intervall $[t_0 - c,\ t_0 + c]$. Wenn f in einer geeigneten Umgebung von (t_0, p_0) stetig ist, dann ist obiges Anfangswertproblem äquivalent zu folgender Integralgleichung

$$x(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\,, \qquad t \in [t_0 - c,\ t_0 + c]\,, \tag{1.14}$$

wovon man sich leicht durch Integration von (1.13) bzw. Differentiation von (1.14) überzeugt.

Betrachten wir allerdings nicht nur reellwertige Funktionen, sondern auch Funktionen mit Werten in einem Banachraum X, d.h.

$$f\colon D(f) \subseteq \mathbb{R} \times X \to X\,,$$

dann ist insbesondere auch die Lösung $x\colon \mathbb{R} \to X$ von (1.13) eine Funktion mit Werten im Banachraum X. Dadurch ergibt sich ein Problem, da bisher weder die Ableitung $x'(t)$ noch das Integral $\int f(s)\,ds$ für Funktionen mit Werten in Banachräumen definiert sind. Im Prinzip sind diese Begriffe analog zu den entsprechenden Begriffen aus der Theorie reellwertiger Funktionen definiert und wir werden uns im Kapitel 2 damit beschäftigen. Der folgende Beweis des Satzes von Picard, Lindelöf benutzt die Struktur von $\mathbb{R}$ nicht und ist deshalb wortwörtlich auf Banachräume X übertragbar. Zunächst kann man sich $X = \mathbb{R}$ in den Rechnungen vorstellen.

Die Beweisidee besteht darin, die Integralgleichung (1.14) als äquivalente Operatorgleichung

$$T_{p_0}\,x = x \tag{1.15}$$

zu schreiben. Hierbei ist T_{p_0} ein Operator auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $I = [t_0 - c, t_0 + c]$ mit Werten im Banachraum X, den wir mit $C(I;X)$ bezeichnen und mit der kanonischen Norm

$$\|f\|_0 := \sup_{t \in I} \|f(t)\|_X \tag{1.16}$$

versehen. Der Raum $C(I;X)$ mit der Norm $\|\cdot\|_0$ ist ein Banachraum, was man analog zum Fall reellwertiger Funktionen beweist. Die Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n) \subset C(I;X)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_0$ ist nichts anderes als die auf I gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f im Banachraum X.

1.17 Satz (Picard 1890, Lindelöf 1894). *Sei X ein Banachraum und sei $Q \subseteq \mathbb{R} \times X$ für gegebene $t_0 \in \mathbb{R}$ und $p_0 \in X$, sowie $a, b > 0$, definiert durch*

$$Q := \big\{(t,y) \in \mathbb{R} \times X \,\big|\, |t - t_0| \le a\,, \|y - p_0\|_X \le b\big\}\,.$$

Ferner sei die stetige Funktion $f\colon Q \to X$ Lipschitz–stetig bzgl. der zweiten Variablen, d.h. es gibt Konstanten $K\,, L > 0$, so dass für alle $(t,y_1), (t,y_2) \in Q$ gilt:

$$\begin{aligned} \|f(t,y_1)\|_X &\le K\,, \\ \|f(t,y_1) - f(t,y_2)\|_X &\le L\,\|y_1 - y_2\|_X\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i) *Es existiert eine eindeutige stetige Lösung $x(\cdot)$ von* (1.14) *im Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$, mit $c = \min(a, \frac{b}{K})$, die auch die eindeutige Lösung von* (1.13) *ist.*

(ii) *Die Folge von Approximationen* $\big(x_n(\cdot)\big)$, *gegeben durch* $x_0(t) := p_0$ *und*

$$x_{n+1}(t) := p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x_n(s)\big)\, ds\,, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

konvergiert gleichmäßig auf $[t_0 - c, t_0 + c]$ *gegen die Lösung* $x(\cdot)$.

(iii) *Sei* $0 < d < c$ *gegeben. Dann besitzt* (1.14) *für alle* p *aus einer genügend kleinen Umgebung von* p_0 *genau eine Lösung* $x_p(\cdot)$, *die auf dem Intervall* $[t_0 - d, t_0 + d]$ *definiert ist. Für* $p \to p_0$ *in* X *konvergiert* $x_p(\cdot)$ *gleichmäßig gegen* $x_{p_0}(\cdot)$ *auf dem Intervall* $[t_0 - d, t_0 + d]$.

1.19 Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1.17 setzen wir* $k := 1 - \exp(-Lc)$ *und definieren*

$$\|x\|_1 := \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \exp\big(-L|t - t_0|\big)\|x(t)\|_X \tag{1.20}$$

für $x(\cdot) \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$. *Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_1 &\le \frac{k^n}{1-k}\, \|x_1 - x_0\|_1\,, \\ \|x_{n+1} - x\|_1 &\le \frac{k}{1-k}\, \|x_{n+1} - x_n\|_1\,, \\ \|x_{n+1} - x\|_1 &\le k\, \|x_n - x\|_1\,. \end{aligned}$$

Beweis (Satz 1.17, Folgerung 1.19). 1. Wir wollen die Integralgleichung (1.14) in eine Operatorgleichung in $C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$ umschreiben. Um allerdings das im Satz behauptete Existenzintervall zu erhalten, müssen wir den Raum $C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$ mit einer äquivalenten Norm versehen. Offensichtlich ist durch (1.20) eine weitere Norm auf $C([t_0 - c, t_0 + c]; X)$ gegeben, die aufgrund der Ungleichungen

$$\exp(-Lc)\, \|f\|_0 \le \|f\|_1 \le \|f\|_0\,,$$

äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_0$ ist. Somit ist auch $\big(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1\big)$ ein Banachraum.

2. Wir setzen $M := \{g \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X) \mid \|g - p_0\|_0 \le b\}$ und definieren den Operator T_{p_0} durch

$$T_{p_0} \colon M \to \big(C([t_0 - c, t_0 + c]; X), \|\cdot\|_1\big) : x(\cdot) \mapsto y(\cdot)\,, \tag{1.21}$$

wobei

$$y(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\,.$$

Um Satz 1.5 anwenden zu können, überprüfen wir dessen Voraussetzungen:

(a) Für eine Folge $(x_n) \subseteq M$ mit $x_n \to x$ in $\big(C([t_0-c,t_0+c];X), \|\cdot\|_1\big)$ gilt auch $x_n \to x$ in $\big(C([t_0-c,t_0+c];X), \|\cdot\|_1\big)$ $(n\to\infty)$, da die beiden Normen äquivalent sind. Aufgrund der Definition der Menge M haben wir

$$\|x_n - p_0\|_0 \leq b\,.$$

Der Grenzübergang $n\to\infty$ liefert sofort $x\in M$ und somit ist M auch bzgl. $\big(C([t_0-c,t_0+c];X), \|\cdot\|_1\big)$ abgeschlossen.

(b) Nach Definition von M gilt $\|x(t)-p_0\|_X \leq b$ für alle $t\in[t_0-c,t_0+c]$, d.h. $x(t)\in Q$ für alle $t\in[t_0-c,t_0+c]$. Also liefern $(1.18)_1$ und die Eigenschaften des Integrals (cf. Folgerung 2.1.14)

$$\begin{aligned}\|T_{p_0}x - p_0\|_0 &= \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} \Big\| \int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)\,ds\Big\|_X \\ &\leq \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} \int_{t_0}^{t} K\,ds \leq c\,K \leq b\,,\end{aligned}$$

aufgrund der Definition von c. Also bildet der Operator T_{p_0} die Menge M in sich selbst ab, d.h. $T_{p_0}: M\to M$.

(c) Für $x,z\in M$ gilt aufgrund von $(1.18)_2$ und der Definition der Norm $\|\cdot\|_1$:

$$\begin{aligned}&\|T_{p_0}x - T_{p_0}z\|_1 \\ &= \max_{t\in[t_0-c,t_0+c]} \exp\big(-L|t-t_0|\big)\,\Big\|\int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big) - f\big(s,z(s)\big)\,ds\Big\|_X \\ &\leq \max_t \exp\big(-L|t-t_0|\big)\int_{t_0}^{t} L\,\|x(s)-z(s)\|_X \exp\big(-L|s-t_0|\big)\times \\ &\qquad\qquad \times \exp\big(L|s-t_0|\big)\,ds \\ &\leq L\,\|x-z\|_1 \max_t \int_{t_0}^{t} \exp\big(L|s-t_0| - L|t-t_0|\big)\,ds \\ &= \|x-z\|_1 \max_t \big(1-\exp(-L|t-t_0|)\big) \\ &\leq k\,\|x-z\|_1\,,\end{aligned}$$

wobei das letzte Integral separat für $t\geq t_0$ und $t\leq t_0$ berechnet wurde und die Definition von $k = 1-\exp(-Lc) < 1$ benutzt wurde. Somit ist der Operator T_{p_0} k–kontraktiv auf M bzgl. $\big(C([t_0-c,t_0+c];X), \|\cdot\|_1\big)$.

Aufgrund von Satz 1.5 folgt dann, dass genau ein Fixpunkt $x\in M$ existiert, d.h. $x = T_{p_0}x$. Somit ist Teil (i) des Satzes bewiesen.

3. Die Abschätzungen der Folgerung 1.19 folgen unmittelbar aus (1.9). Insbesondere gilt:

$$\|x_n - x\|_1 \le \frac{k^n}{1-k}\|x_0 - x_1\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty)\,,$$

da $k < 1$. Somit erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz $x_n \rightrightarrows x$ $(n \to \infty)$, da die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_0$ äquivalent sind, und Konvergenz bezüglich der Maximumsnorm gleichmäßige Konvergenz bedeutet. Damit ist auch Behauptung (ii) bewiesen.

4. Zum Beweis von (iii) gehen wir wie in den Schritten $1-3$ vor, wobei wir das Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$ durch das kleinere Intervall $[t_0 - d, t_0 + d]$ ersetzen, d.h. wir arbeiten mit dem Raum $\big(C([t_0 - d, t_0 + d]; X), \|\cdot\|_1\big)$. Für $x \in C([t_0 - d, t_0 + d]; X)$ und $p \in X$ betrachten wir den Operator T_p, definiert durch

$$T_p\, x := p + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\,,$$

auf der Menge $M = \{g \in C([t_0 - d, t_0 + d]; X) \,\big|\, \|g - p_0\|_0 \le b\}$. Wie in den Schritten $1-3$ erhalten wir dann, dass für p in einer kleinen Umgebung von p_0 eine eindeutige Lösung x_p der Gleichungen

$$T_p x_p = x_p$$

existiert. Für jede Folge $(p_n) \subset X$ mit $p_n \to p_0$ in X $(n \to \infty)$ erhalten wir aufgrund der Definition der Operatoren T_{p_0} bzw. T_{p_n}, dass für alle $x \in C([t_0 - d, t_0 + d]; X)$ gilt:

$$\|T_{p_n}x - T_{p_0}x\|_1 \le \|T_{p_n}x - T_{p_0}x\|_0 = \|p_n - p_0\|_X \to 0 \qquad (n \to \infty)\,,$$

wobei wir die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_0$ benutzt haben. Aufgrund von Folgerung 1.12 gilt dann $\|x_{p_n} - x_{p_0}\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$, und somit auch die gleichmäßige Konvergenz $x_{p_n} \rightrightarrows x_{p_0}$ $(n \to \infty)$.

Damit sind der Satz und die Folgerung bewiesen. ■

1.2 Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder

Der Banachschen Fixpunktsatz stellt nur geringe Anforderungen an den zugrundeliegenden Raum, es genügt ein vollständiger, metrischer Raum, aber es werden relativ starke Anforderungen an den Operator gestellt, nämlich dessen k–Kontraktivität. In den Sätzen von Brouwer (im $\mathbb{R}^n$) und Schauder (in unendlich–dimensionalen Banachräumen) werden nur geringe Anforderungen an die Operatoren, dafür aber stärkere Anforderungen an den zugrundeliegenden Raum gestellt. Beide benutzen ein Analogon des folgenden tiefliegenden topologischen Resultats:

*Sei $\overline{B_1(0)}$ der abgeschlossene Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$. Es gibt keine stetige Abbildung (**Retraktion**)*

$$\mathbf{R} \colon \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \to \partial B_1(0)\,,$$

so dass für alle Randpunkte $x \in \partial B_1(0)$ gilt:

$$\mathbf{R}\, x = x\,.$$

Man kann sich z.B. vorstellen, man versuchte, eine Gummimembran, die den ganzen Kreis bedeckt, an den Rand zu ziehen; sie muss auf jeden Fall zerreißen. Dieses Resultat ist anschaulich klar, aber keineswegs trivial! Wenn man das obige Resultat als gegeben hinnimmt, kann man sich intuitiv klarmachen:

Eine stetige Abbildung $\mathbf{A} \colon \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{B_1(0)}$ besitzt einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in \overline{B_1(0)}$ mit $\mathbf{A}\, x = x$.

„*Beweis:*“ Nehmen wir an, dass für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gilt $\mathbf{A}\, x \neq x$.

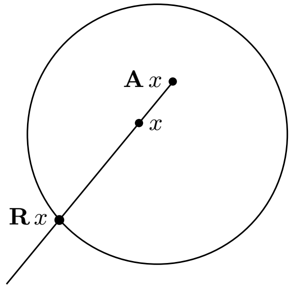


Abb. 1

Mithilfe von Abbildung 1 sieht man sofort, dass es dann eine Retraktion

$$\mathbf{R} \colon \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0) \colon x \mapsto \mathbf{R}\, x$$

mit $\mathbf{R}\, x = x$ für alle $x \in \partial B_1(0)$ gibt, die aufgrund der Stetigkeit von $\mathbf{A}$ selbst stetig ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu obiger Aussage (cf. Beweis von Satz 2.17). ■

Die analoge Aussage in $\mathbb{R}$ ist einfach zu beweisen.

2.1 Lemma. *Sei $f \colon [a,b] \to [a,b]$ stetig. Dann besitzt f in $[a,b]$ einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir setzen

$$g(x) = f(x) - x\,.$$

Da f das Intervall $[a,b]$ auf sich selbst abbildet, gilt:

$$f(a) \geq a\,, \qquad \text{und} \qquad f(b) \leq b\,,$$

was übertragen auf g bedeutet:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0\,, \qquad \text{und} \qquad g(b) = f(b) - b \leq 0\,.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt dann, dass ein $x_0 \in [a, b]$ existiert mit

$$g(x_0) = 0 = f(x_0) - x_0\,,$$

also ist x_0 der gesuchte Fixpunkt. ∎

1.2.1 Der Satz von Brouwer

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, den Satz von Brouwer (cf. Satz 2.17) zu beweisen. Durch einen kurzen Ausflug in die *Variationsrechnung*, die sich unter anderem mit dem Auffinden von Minima von Energiefunktionalen beschäftigt, erhält man einen einfachen analytischen Beweis.

Sei $E(\cdot)$ ein **Energiefunktional** der Form[1]

$$E(\mathbf{w}) := \int_{\Omega} L\big(\nabla\mathbf{w}(x), \mathbf{w}(x), x\big)\, dx\,, \tag{2.2}$$

wobei Ω ein glattes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ ist und

$$L : \mathbb{R}^{m\times d} \times \mathbb{R}^m \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

eine gegebene glatte Funktion. Man nennt L die **Lagrangefunktion** des Energiefunktionals $E(\cdot)$. Wir werden im Folgenden die Bezeichnung

$$L = L(\mathsf{P}, \mathbf{z}, x) = L(p_1^1, \ldots, p_d^m, z^1, \ldots, z^m, x_1, \ldots, x_d)$$

für Matrizen[2] $\mathsf{P} = (p_j^i) \in \mathbb{R}^{m\times d}$, Vektoren $\mathbf{z} = (z^i) \in \mathbb{R}^m$ und Punkte $x = (x_j) \in \Omega$ benutzen.

Sei $\mathbf{g} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$ eine gegebene glatte Funktion. Man sucht nun das **Minimum** des Energiefunktionals (2.2) unter allen glatten Funktionen $\mathbf{w}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w} = (w^1, \ldots, w^m)$, die auf dem Rand $\partial\Omega$ mit der Funktion $\mathbf{g}$ übereinstimmen, d.h.

$$\mathbf{w} = \mathbf{g} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,. \tag{2.3}$$

[1] Der Gradient einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{w} = (w^1, \ldots, w^m)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ ist gegeben durch $\nabla\mathbf{w} = (\partial_j w^i)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,d}}$ (cf. (A.12.5)).

[2] Obere Indizes bezeichnen Zeilenindizes. Desweiteren benutzen wir für die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion L nach den einzelnen Komponenten der Matrizen bzw. Vektoren die Notation $D_{\mathsf{P}}L = (L_{p_1^1}, \ldots, L_{p_d^m})$ bzw. $D_{\mathbf{z}}L = (L_{z^1}, \ldots, L_{z^m})$.

Sei nun $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ ein *glattes Minimum* von (2.2) unter allen glatten Funktionen, die (2.3) erfüllen. Dann ist $\mathbf{u}$ notwendigerweise die Lösung eines Systems von partiellen Differentialgleichungen, den so genannten *Euler–Lagrange–Gleichungen* .

Um dies zu beweisen, betrachten wir für $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^m) \in C_0^\infty(\Omega)$ die reellwertige Funktion

$$i(\tau) := E(\mathbf{u} + \tau\,\mathbf{v})\,, \qquad \tau \in \mathbb{R}\,.$$

Da auch $\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}$ die Randbedingungen (2.3) erfüllt und $\mathbf{u}$ ein Minimum von (2.2) ist, muss i im Punkt 0 ein Minimum haben, d.h. $i'(0) = 0$. Die Ableitung $i'(\tau)$, die man **erste Variation** nennt, kann man explizit berechnen. Es gilt:

$$i(\tau) = \int\limits_\Omega L(\nabla\mathbf{u} + \tau\nabla\mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, x)\,dx \tag{2.4}$$

und somit

$$\begin{aligned} i'(\tau) = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^m \; & L_{p_j^k}(\nabla\mathbf{u} + \tau\nabla\mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, x)\,\partial_j v^k \\ & + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\nabla\mathbf{u} + \tau\nabla\mathbf{v}, \mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, x)\, v^k\,dx\,. \end{aligned}$$

Aus $i'(0) = 0$ erhalten wir

$$0 = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^m L_{p_j^k}(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x)\,\partial_j v^k + \sum_{k=1}^m L_{z^k}(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x)\,v^k\,dx\,.$$

Da diese Identität für alle $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt, erhalten wir nach partieller Integration, dass ein glattes Minimum $\mathbf{u}$ des Energiefunktionals $E(\cdot)$ folgendes nichtlineare System von partiellen Differentialgleichungen erfüllen muss:

$$-\sum_{j=1}^d \partial_j\big(L_{p_j^k}(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x)\big) + L_{z^k}(\nabla\mathbf{u}, \mathbf{u}, x) = 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \quad k = 1, \dots, m\,, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \tag{2.6}$$

Das System (2.5) nennt man die dem Energiefunktionals $I(\cdot)$ zugehörigen **Euler–Lagrange–Gleichungen**.

Überraschenderweise ist es interessant, Lagrangefunktionen L zu betrachten, für die *alle* glatten Funktionen eine Lösung von (2.5) sind.

2.7 Definition. *Die Funktion L heißt **Null–Lagrangefunktion**, wenn die zugehörigen Euler–Lagrange–Gleichungen* (2.5) *für alle glatten Funktionen erfüllt sind.*

Null–Lagrangefunktionen spielen eine entscheidende Rolle in der *nichtlinearen Elastizitätstheorie* und bei der Charakterisierung von schwach folgenstetigen Energiefunktionalen E für Lagrangefunktionen der Form $L(\nabla \mathbf{u})$. Für unsere Zwecke besteht die Bedeutung von Null–Lagrangefunktionen darin, dass der Wert des zugehörigen Energiefunktionals $E(\mathbf{w})$ nur von den Randwerten der Funktion $\mathbf{w}$ abhängt.

2.8 Satz. *Sei L eine Null–Lagrangefunktion und seien $\mathbf{u}, \widetilde{\mathbf{u}}$ zwei glatte Funktionen mit*

$$\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} \qquad \textit{auf } \partial\Omega\,. \tag{2.9}$$

Dann gilt

$$E(\mathbf{u}) = E(\widetilde{\mathbf{u}})\,. \tag{2.10}$$

Beweis. Wir definieren $j : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$j(\tau) := E\big(\tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}\big)\,,$$

und erhalten für $\tau \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
j'(\tau) = \int\limits_{\Omega} \; & \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{m} L_{p_i^k}\big(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x\big)(\partial_i u^k - \partial_i \widetilde{u}^k) \\
& + \sum_{k=1}^{m} L_{z^k}\big(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x\big)(u^k - \widetilde{u}^k)\,dx \\
= \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega} \Big(& -\sum_{i=1}^{d} \partial_i\big(L_{p_i^k}(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x)\big) \\
& + L_{z^k}\big(\tau\nabla\mathbf{u} + (1-\tau)\nabla\widetilde{\mathbf{u}}, \tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}, x\big)\Big)(u^k - \widetilde{u}^k)\,dx = 0\,,
\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Integral partiell integriert haben, sowie (2.9) und den Fakt, dass $\tau\mathbf{u} + (1-\tau)\widetilde{\mathbf{u}}$ eine Lösung der Euler–Lagrange–Gleichungen ist, benutzt haben. Somit ist j auf $[0,1]$ konstant und (2.10) folgt sofort. ■

Wir benötigen noch folgenden Begriff. Sei $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine Matrix. Mit

$$\operatorname{cof} \mathsf{A}$$

bezeichnen wir die **Kofaktormatrix**, deren (k,i)–ter Eintrag aus der Determinante der $(d-1)\times(d-1)$ Matrix A_i^k besteht, die man durch Streichen der k–ten Zeile und der i–ten Spalte erhält, d.h.

$$(\operatorname{cof} \mathsf{A})_i^k := (-1)^{i+k} \det \mathsf{A}_i^k\,.$$

2.11 Lemma. *Sei* $\mathbf{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *eine glatte Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^d \partial_i (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_i^k = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, d\,. \tag{2.12}$$

Beweis. Aus der linearen Algebra wissen wir, dass für Matrizen $\mathsf{P} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt:

$$(\det \mathsf{P})\, \mathsf{I}_d = \mathsf{P}^\top (\operatorname{cof} \mathsf{P})\,,$$

wobei I_d die d–dimensionale Einheitsmatrix ist, d.h. wir haben für $i, j = 1, \ldots, d$

$$(\det \mathsf{P})\, \delta_{ij} = \sum_{k=1}^d p_i^k (\operatorname{cof} \mathsf{P})_j^k\,. \tag{2.13}$$

Daraus folgt für $r, s = 1, \ldots, d$ (man wähle $j = i = s$ und nutze die Definition von $\operatorname{cof} \mathsf{P}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \det \mathsf{P}}{\partial p_s^r} &= \sum_{k=1}^d \delta_{kr} (\operatorname{cof} \mathsf{P})_s^k + p_s^k \frac{\partial (\operatorname{cof} \mathsf{P})_s^k}{\partial p_s^r} \\ &= (\operatorname{cof} \mathsf{P})_s^r\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Wenn man $\mathsf{P} = \nabla \mathbf{u} = \big(\partial_s u^r\big)_{r,s=1,\ldots,d}$ in (2.13) einsetzt, nach x_j differenziert und dann das Ergebnis über $j = 1, \ldots, d$ aufsummiert, erhält man unter Benutzung von (2.14) für $i = 1, \ldots, d$

$$\sum_{j,r,s=1}^d \delta_{ij} (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_s^r\, \partial_j \partial_s u^r = \sum_{k,j=1}^d \partial_j \partial_i u^k\, (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^k + \partial_i u^k\, \partial_j (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^k\,.$$

Dies kann man aber auch als

$$\sum_{k=1}^d \partial_i u^k \Big(\sum_{j=1}^d \partial_j (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^k \Big) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, d\,, \tag{2.15}$$

schreiben, d.h. der Vektor $\big(\sum_{j=1}^d \partial_j (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_j^k\big)_{k=1,\ldots,d}$ ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathsf{A}^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$, mit $\mathsf{A} = \nabla \mathbf{u}$. In einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$, für den $\det \nabla \mathbf{u}(x_0) \neq 0$ gilt, erhalten wir sofort

$$\sum_{j=1}^d \partial_j \big(\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}(x_0)\big)_j^k = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, d\,.$$

Falls allerdings $\det \nabla \mathbf{u}(x_0) = 0$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^d$ gilt, dann wählen wir $\varepsilon_0 > 0$, so dass $\det(\nabla \mathbf{u}(x_0) + \varepsilon\, \mathsf{I}_d) \neq 0$ für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt[3], und führen die obigen Rechnungen für $\widetilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u} + \varepsilon x$ aus. Am Ende führen wir den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durch und die Behauptung folgt. ∎

[3] Dies ist in der Tat möglich, da $\det(\nabla \mathbf{u}(x_0) + \varepsilon\, \mathsf{I}_d)$ ein Polynom in ε ist, also nur endlich viele Nullstellen haben kann.

2.16 Satz (Landers 1942, Ball 1976). *Die Determinante*

$$L(\mathsf{P}) = \det \mathsf{P}\,, \qquad \mathsf{P} \in \mathbb{R}^{d\times d}\,,$$

ist eine Null–Lagrangefunktion.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für jede glatte Funktion $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_i \big(L_{p_i^k}(\nabla \mathbf{u})\big) = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, d\,.$$

Aus (2.14) wissen wir

$$L_{p_i^k}(\nabla \mathbf{u}) = (\operatorname{cof} \nabla \mathbf{u})_i^k\,, \qquad i,k = 1, \ldots, d$$

und somit ist die Behauptung nichts anderes als Lemma 2.11. ■

Bemerkung. Man kann zeigen, dass $L(\nabla \mathbf{u})$ genau dann eine Null–Lagrangefunktion ist, wenn es Matrizen $\mathsf{B} = (b_j^i), \mathsf{C} = (c_j^i) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und Konstanten $a, d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$L(\mathsf{P}) = a + \sum_{i,j=1}^{d} b_j^i p_j^i + \sum_{i,j=1}^{d} c_j^i (\operatorname{cof} \mathsf{P})_j^i + d \det \mathsf{P}\,.$$

Darüber hinaus sind Energiefunktionale E für solche Lagrangefunktionen schwach folgenstetig in entsprechenden Funktionenräumen. Ein weiteres Beispiel für eine Null–Lagrangefunktion ist

$$L(\mathsf{P}) = \operatorname{tr}(\mathsf{P}^2) - \big(\operatorname{tr}(\mathsf{P})\big)^2\,.$$

Nun können wir den Brouwerschen Fixpunktsatz beweisen.

2.17 Satz (Brouwer 1912). *Jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen Kugel des $\mathbb{R}^n$ in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir betrachten o.B.d.A die abgeschlossene n–dimensionale Einheitskugel $B = \overline{B_1(0)}$.

1. Als erstes zeigen wir, dass es keine glatte Funktion

$$\mathbf{w} : B \to \partial B \tag{2.18}$$

gibt, so dass für alle $x \in \partial B$ gilt

$$\mathbf{w}(x) = x\,. \tag{2.19}$$

Nehmen wir an, eine solche Funktion $\mathbf{w}$ würde existieren. Sei $\widetilde{\mathbf{w}}$ die identische Funktion auf B, d.h. $\widetilde{\mathbf{w}}(x) = x$ für alle $x \in B$. Dann gilt $\widetilde{\mathbf{w}}(x) = \mathbf{w}(x)$ für alle Randpunkte $x \in \partial B$. Da die Determinante eine Null–Lagrangefunktion ist (cf. Satz 2.16), liefert Satz 2.8

$$\int_B \det \nabla \mathbf{w} \, dx = \int_B \det \nabla \widetilde{\mathbf{w}} \, dx = \mathrm{vol}(B) \neq 0 \,, \tag{2.20}$$

da $\det \nabla \widetilde{\mathbf{w}} = 1$. Aus (2.18) folgt, dass für alle $x \in B$ gilt $|\mathbf{w}(x)|^2 \equiv 1$, und somit erhalten wir durch Differentiation

$$(\nabla \mathbf{w})^\top \mathbf{w} = \mathbf{0} \,. \tag{2.21}$$

Da $|\mathbf{w}| = 1$ gilt, besagt (2.21), dass 0 ein Eigenwert von $(\nabla \mathbf{w}(x))^\top$ für alle $x \in B$ ist. Somit haben wir $\det \nabla \mathbf{w}(x) = 0$ für alle $x \in B$, was ein Widerspruch zu (2.20) ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Als nächstes zeigen wir, dass es keine stetige Funktion $\mathbf{w}$ gibt, die (2.18), (2.19) erfüllt. Falls $\mathbf{w}$ eine solche Funktion ist, setzen wir $\mathbf{w}$ durch $\mathbf{w}(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort. Dies und (2.18) impliziert, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dass $|\mathbf{w}(x)| \geq 1$, insbesondere $\mathbf{w}(x) \neq \mathbf{0}$. Sei nun $\mathbf{w}_\varepsilon := J_\varepsilon * \mathbf{w}$, wobei J_ε, $\varepsilon > 0$, der Glättungsoperator ist (cf. Abschnitt A.12.2). Man kann $\varepsilon > 0$ so wählen, dass auch für $\mathbf{w}_\varepsilon$ gilt $\mathbf{w}_\varepsilon(x) \neq \mathbf{0}$, $x \in \mathbb{R}^n$. In der Tat existiert ein solches $\varepsilon > 0$, da für $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$ und $\varepsilon > 0$ klein genug gilt:

$$\mathbf{w}_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} J_\varepsilon(|y|)\mathbf{w}(x-y)\, dy = \int_{B_\varepsilon(0)} J_\varepsilon(|y|)(x-y)\, dy = x \,, \tag{2.22}$$

wobei wir benutzt haben, dass $\int_{B_\varepsilon(0)} J_\varepsilon(|y|)\, dy = 1$, sowie dass $J_\varepsilon(|y|)$ eine radialsymmetrische Funktion und y eine antisymmetrische Funktion ist. Weiterhin folgt aus den Eigenschaften des Glättungsoperator J_ε (cf. Satz A.12.12 (iv)), dass auf $\overline{B_2(0)}$ gilt: $J_\varepsilon * \mathbf{w} \rightrightarrows \mathbf{w}$ $(\varepsilon \to 0)$. Hieraus und aus (2.22) folgt, dass für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dass $|\mathbf{w}_\varepsilon(x)| \geq 1/2$, insbesondere $\mathbf{w}_\varepsilon(x) \neq \mathbf{0}$. Dann würde aber die glatte Funktion

$$\widetilde{\mathbf{w}}(x) = \frac{2\mathbf{w}_\varepsilon}{|\mathbf{w}_\varepsilon|}$$

(2.18), (2.19) mit $B = \overline{B_2(0)}$ erfüllen, was aufgrund von 1. nicht möglich ist.

3. Sei nun $\mathbf{A} : B \to B$ eine stetige Funktion, die keinen Fixpunkt besitzt. Wir definieren $\mathbf{w} : B \to \partial B$ dadurch, dass $\mathbf{w}(x)$ der Punkt auf dem Rand ∂B ist, der von dem Strahl, der aus $\mathbf{A}(x)$ startet und durch x geht, getroffen wird (cf. Abb. 1, Seite 10). Diese Funktion ist wohldefiniert, da nach Voraussetzung $\mathbf{A}(x) \neq x$ für alle $x \in B$ gilt. Offensichtlich ist $\mathbf{w}$ stetig und erfüllt (2.18), (2.19). Dies ist ein Widerspruch zu 2. und der Satz ist bewiesen. ∎

2.23 Folgerung. *Jede stetige Abbildung einer zu einer abgeschlossenen Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$ homöomorphen Menge M in sich selbst besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $T\colon M \to M$ eine stetige Abbildung und $\mathbf{h}\colon B \subset \mathbb{R}^n \to M$ ein Homöomorphismus[4], d.h. $\mathbf{h}$ und $\mathbf{h}^{-1}$ sind stetig, eineindeutig und surjektiv. Die durch
$$\mathbf{A} := \mathbf{h}^{-1} \circ T \circ \mathbf{h}\colon B \to B$$
definierte Abbildung ist stetig. Somit folgt nach dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes x_0 von $\mathbf{A}$, d.h.
$$\mathbf{A}\, x_0 = x_0\,.$$
Dies bedeutet aber, dass $\mathbf{h}^{-1} T \mathbf{h}\, x_0 = x_0$ gilt. Durch Anwendung von $\mathbf{h}$ auf beiden Seiten dieser Gleichung erhalten wir
$$T(\mathbf{h}(x_0)) = \mathbf{h}(x_0)\,,$$
d.h. $\mathbf{h}(x_0)$ ist der gesuchte Fixpunkt von T. ■

Beispiel. Beispiele von zu abgeschlossenen Kugeln homöomorphen Mengen sind nichtleere, konvexe, kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$, sowie nichtleere, kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$, die sternförmig bzgl. einer abgeschlossenen Kugel sind.

Nichtlineare Gleichungssysteme

Als erste Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes betrachten wir folgendes System von nichtlinearen Gleichungen
$$g^i(x) = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,,\ i = 1, \dots, n\,, \tag{2.24}$$
wobei $g^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, stetige, nichtlineare Funktionen sind, die folgender Bedingung genügen:
$$\exists R > 0: \quad \sum_{i=1}^n g^i(x)\, x_i \ge 0 \qquad \forall x \ \text{ mit } \ |x| = R\,. \tag{2.25}$$

2.26 Lemma. *Seien $g^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, stetige Funktionen, die der Bedingung* (2.25) *genügen. Dann existiert eine Lösung x_0 von* (2.24) *mit $|x_0| \le R$.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass das System (2.24) keine Lösung in $\overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^n$ habe. Für $\mathbf{g} := (g^1, \dots, g^n)$ definieren wir
$$f^i(x) := -R\, \frac{g^i(x)}{|\mathbf{g}(x)|}\,, \qquad i = 1, \dots, n\,.$$
Da $|\mathbf{g}(x)| > 0$ für alle $x \in \overline{B_R(0)}$ gilt, ist $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^n)$ wohldefiniert, stetig und bildet die abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(0)}$ des $\mathbb{R}^n$ in sich selbst ab. Somit

[4] Wir benutzen hier auch für die Abbildung $\mathbf{h}\colon B \subset \mathbb{R}^n \to M$ die Vektorschreibweise, obwohl es keine Abbildung in den $\mathbb{R}^n$ ist, da die inverse Abbildung $\mathbf{h}^{-1}\colon M \to B$ in den $\mathbb{R}^n$ abbildet.

folgt mit dem Satz von Brouwer die Existenz eines Fixpunktes $x^\star$ von $\mathbf{f}$ in $\overline{B_R(0)}$, d.h.

$$x^\star = \mathbf{f}(x^\star)\,.$$

Daraus ergibt sich

$$|x^\star| = R\,,$$

denn $|x^\star| = |\mathbf{f}(x^\star)| = |-R\frac{\mathbf{g}(x^\star)}{|\mathbf{g}(x^\star)|}| = R$. Damit gilt aufgrund der Bedingung (2.25)

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{i=1}^{n} g^i(x^\star)\, x_i^\star &= -\sum_{i=1}^{n} f^i(x^\star)\, x_i^\star \frac{|\mathbf{g}(x^\star)|}{R} \\ &= -|x^\star|^2 \frac{|\mathbf{g}(x^\star)|}{R} = -R\,|\mathbf{g}(x^\star)| < 0\,. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also muss es eine Lösung des Systems von Gleichungen (2.24) in $\overline{B_R(0)}$ geben. ■

Wir wollen nun zeigen, dass auch *nichtlineare Ungleichungen* mithilfe des Brouwerschen Fixpunktsatzes behandelt werden können. Dieses Problem tritt später bei der Untersuchung von *maximal monotonen* Operatoren auf (cf. Abschnitt 3.3).

2.27 Lemma (Debrunner, Flor 1964). *Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^* und sei $K \subseteq X$ eine konvexe, kompakte, nichtleere Teilmenge von X. Ferner sei $M \subseteq K \times X^*$ eine* ***monotone Teilmenge****, d.h. für alle $(v,f),(w,g) \in M$ gilt:*

$$\langle f - g, v - w\rangle_X \ge 0\,. \tag{2.28}$$

Dann existiert für alle stetigen Operatoren $T\colon K \subseteq X \to X^*$ eine Lösung $u \in K$ von

$$\langle f - Tu, v - u\rangle_X \ge 0\,, \qquad \forall (v,f) \in M\,. \tag{2.29}$$

Wir wollen die Aussage des Lemmas am Beispiel $X = \mathbb{R} = X^*$ zunächst illustrieren. Sei $K = [a,b]$ und $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Der Graph von φ

$$M = G(\varphi) := \big\{ \big(x, \varphi(x)\big) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x \in [a,b] \big\}$$

ist eine monotone Menge, denn für alle $x, y \in [a,b]$ gilt:

$$\big(\varphi(x) - \varphi(y)\big)(x - y) \ge 0\,.$$

Lemma 2.27 besagt dann, dass für alle stetigen Funktionen $T\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in [a,b]$ von

$$\big(\varphi(x) - T(u)\big)(x - u) \ge 0\,, \qquad x \in [a,b]$$

existiert. In Abhängigkeit von den konkreten Funktionen φ und T ist die Lösung entweder einer der Randpunkte des Intervalls $[a, b]$ oder ein Schnittpunkt der beiden Graphen. Als konkretes Beispiel kann man betrachten: $\varphi(x) = x + 2$, $T(x) = x^2$ und $[a, b] = [-3, 0]$ bzw. $[a, b] = [0, 3]$ bzw. $[a, b] = [0.5, 1.5]$ bzw. $[a, b] = [-6, -3]$.

Beweis (Lemma 2.27). Angenommen, (2.29) habe keine Lösung. Wir definieren für $v \in X$ und $f \in X^*$

$$U(v, f) := \{u \in K \subseteq X \,\big|\, \langle f - Tu, v - u\rangle_X < 0\} .$$

Die Menge $U(v, f)$ ist offen, denn für gegebene $v \in X$ und $f \in X^*$ ist die Abbildung $u \mapsto \langle f - Tu, v - u\rangle_X$ stetig. Das Problem (2.29) hat aufgrund unserer Annahme keine Lösung und somit gilt:

$$K \subseteq \bigcup_{(v,f)\in M} U(v, f) .$$

Da die Menge K kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung, d.h. es existieren $(v_i, f_i) \in M$, $i = 1, \ldots, m$, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U(v_i, f_i) .$$

Zu dieser Überdeckung gibt es eine *Zerlegung der Eins* (cf. Satz A.1.4, Beweis Satz 2.37), d.h. es existieren stetige Abbildungen $\lambda_i \colon X \to \mathbb{R}$, $0 \le \lambda_i(u) \le 1$, mit $\operatorname{supp} \lambda_i \subseteq U(v_i, f_i)$, so dass für alle $u \in K$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(u) = 1 . \tag{2.30}$$

Sei nun K_1 die konvexe Hülle der v_i, $i = 1, \ldots, m$, d.h. $K_1 = co(v_1, \ldots, v_m)$. Wie man sich leicht überlegt, ist $K_1 \subset X$ abgeschlossen. Für $u \in K_1$ definieren wir

$$p(u) := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(u)\, v_i ,$$
$$q(u) := \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(u)\, f_i .$$

Die Abbildung $p\colon K_1 \to K_1$ ist stetig, $\dim K_1 < \infty$, und K_1 ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Kugel des $\mathbb{R}^{\dim K_1}$. Folgerung 2.23 sichert somit die Existenz eines Fixpunktes der Abbildung p, d.h.

$$\exists\, u^\star \in K_1 \qquad \text{mit} \qquad p(u^\star) = u^\star .$$

Wir setzen für $i, j = 1, \ldots, m$

$$\Delta_{ij} := \langle f_i - Tu^\star, v_j - u^\star \rangle_X .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta_{ij} + \Delta_{ji} &= \langle f_i - Tu^\star, v_j - u^\star \rangle_X + \langle f_j - Tu^\star, v_i - u^\star \rangle_X \\
&= \langle f_i - Tu^\star, v_i - u^\star \rangle_X - \langle f_i - Tu^\star, v_i \rangle_X \\
&\quad + \langle f_i - Tu^\star, v_j \rangle_X + \langle f_j - Tu^\star, v_j - u^\star \rangle_X \\
&\quad - \langle f_j - Tu^\star, v_j \rangle_X + \langle f_j - Tu^\star, v_i \rangle_X \\
&= \Delta_{ii} + \Delta_{jj} - \langle f_i - f_j, v_i - v_j \rangle_X \\
&\leq \Delta_{ii} + \Delta_{jj} ,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, dass $(v_i, f_i) \in M$ und M eine monotone Menge ist (cf. (2.28)). Mithilfe von $p(u^\star) = u^\star$, der Definition von p und q und der Eigenschaft (2.30) der Zerlegung der Eins erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \langle q(u^\star) - Tu^\star,\ p(u^\star) - u^\star \rangle_X \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i(u^\star) f_i - Tu^\star, \sum_{j=1}^m \lambda_j(u^\star) v_j - u^\star \right\rangle_X \\
&= \sum_{i,j=1}^m \lambda_i(u^\star)\lambda_j(u^\star) \Delta_{ij} \\
&= \sum_{i,j=1}^m \lambda_i(u^\star)\lambda_j(u^\star) \frac{1}{2}(\Delta_{ij} + \Delta_{ji}) \\
&\leq \sum_{i,j=1}^m \lambda_i(u^\star)\lambda_j(u^\star) \frac{1}{2}(\Delta_{ii} + \Delta_{jj}) ,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

wobei auch die Symmetrie der Matrix mit den Einträgen $\lambda_i(u^\star)\lambda_j(u^\star)$ und (2.31) benutzt wurden. Aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins haben wir $\lambda_i(u^\star)\lambda_j(u^\star) \geq 0$, $i, j = 1, \ldots, m$. Für alle Indices i, j mit $\lambda_i(u^\star)\lambda_j(u^\star) > 0$, folgt aus den Eigenschaften der Zerlegung der Eins:

$$u^\star \in U(v_i, f_i) \cap U(v_j, f_j) .$$

Aufgrund der Konstruktion von $U(v, f)$ muss dann gelten:

$$\Delta_{ii} < 0 \text{ und } \Delta_{jj} < 0 ,$$

und somit sind die zugehörigen Summanden in (2.32) negativ. Es ergibt sich also aus (2.32) der Widerspruch $0 < 0$, da alle anderen Summanden mit $\lambda_i(u^\star)\lambda_j(u^\star) = 0$ wegfallen. Wir haben also bewiesen:

$$\lambda_i(u^\star) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m .$$

Da aber $u^\star \in K_1 \subseteq K$ gilt, gibt es aufgrund der Eigenschaften der Zerlegung der Eins einen Index i_0 mit $\lambda_{i_0}(u^\star) > 0$. Dies ist ein Widerspruch, also existiert eine Lösung des Problems (2.29). ■

1.2.2 Kompakte Operatoren

Wenn wir den Satz von Brouwer auf unendlich–dimensionale Banachräume X übertragen wollen, erkennen wir folgendes Problem: Die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ in X ist nicht kompakt, was im $\mathbb{R}^d$ gilt, und im Beweis des Satzes von Brouwer eine wichtige, wenn auch sehr versteckte, Rolle gespielt hat. Das folgende Gegenbeispiel zeigt, dass selbst in separablen Hilberträumen die Analogie von Satz 2.17 nicht gilt.

2.33 Satz (Kakutani 1943). *Sei H ein unendlich–dimensionaler separabler Hilbertraum. Dann gibt es eine stetige Abbildung $f\colon H \to H$, die die abgeschlossene Einheitskugel in sich selbst abbildet und keinen Fixpunkt besitzt.*

Beweis. Wir schreiben wieder abkürzend $B = \overline{B_1(0)}$. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von H, d.h. für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt: $(y_n, y_m) = \delta_{nm}$. Wir definieren die Abbildung U, indem wir die Wirkung auf die Basisvektoren angeben, d.h. wir setzen für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$U\colon H \to H\colon y_n \mapsto y_{n+1}\,.$$

Da jedes $x \in H$ bezüglich der Orthonormalbasis eine Darstellung

$$x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i\,,$$

mit $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$, besitzt, können wir die Abbildung U auf beliebige Elemente $x \in H$ erweitern durch:

$$U(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}\,. \tag{2.34}$$

Offensichtlich ist $U\colon H \to H$ linear und beschränkt, d.h. insbesondere stetig, und bildet die Mengen $S_r = \{x \in H \,\big|\, \|x\| = r\}$, $0 < r < \infty$, in sich selbst ab, wie man mit Hilfe der Darstellung (2.34) einfach nachrechnen kann. Wir betrachten nun

$$f(x) := \frac{1}{2}\big(1 - \|x\|\big)y_0 + U(x)\,.$$

Offensichtlich ist f stetig und bildet die Kugel B in sich selbst ab. In der Tat gilt für $\|x\| \le 1$:

$$\|f(x)\| \le \frac{1}{2}\big(1 - \|x\|\big)\|y_0\| + \|U(x)\| = \frac{1}{2}\big(1 - \|x\|\big) + \|x\| \le 1\,,$$

wobei $\|y_0\| = 1$ und $\|U(x)\| = \|x\|$ benutzt wurden. Wir nehmen nun an, dass f in B einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x_0 \in B$ mit $f(x_0) = x_0$.

Dies kann man auch schreiben als

$$x_0 - U(x_0) = \frac{1}{2}\big(1 - \|x_0\|\big)\, y_0 \,. \tag{2.35}$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. $x_0 = 0$: Dann folgt aus (2.35)

$$0 = \frac{1}{2}\, y_0 \,,$$

   was nicht möglich ist, da y_0 ein Basisvektor ist.

2. $\|x_0\| = 1$: Aus (2.35) erhalten wir

$$x_0 = U(x_0)\,.$$

   Für $x_0 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i y_i$ mit $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\alpha_i|^2 = 1$ können wir dies mithilfe von (2.34) umschreiben als:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_i = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i y_{i+1}\,.$$

   Wir bilden nun das Skalarprodukt mit y_j, $j \in \mathbb{Z}$ und erhalten aufgrund der Eigenschaften der Orthonormalbasis

$$\alpha_j = \alpha_{j-1} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}\,,$$

   d.h. alle α_j sind gleich, und somit ergibt sich der Widerspruch

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\alpha_j|^2 = \infty \neq 1\,.$$

3. $0 < \|x_0\| < 1$: Sei $x_0 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i y_i$, wobei $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\alpha_i|^2 < 1$ gelten muss. Dies eingesetzt im (2.35) ergibt aber:

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\, y_i = \frac{1}{2}\big(1 - \|x_0\|\big)\, y_0 \,,$$

   woraus folgt

$$\begin{aligned} \alpha_0 - \alpha_{-1} &= \frac{1}{2}(1 - \|x_0\|) > 0\,, \\ \alpha_i &= \alpha_{i-1}\,, \qquad\qquad i \neq 0\,. \end{aligned}$$

   Insgesamt ergibt sich also

$$\ldots\, \alpha_{-2} = \alpha_{-1} < \alpha_0 = \alpha_1 \ldots,$$

   und somit $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\alpha_i|^2 = \infty$, was ein Widerspruch ist.

In allen der drei möglichen Fälle tritt ein Widerspruch auf, d.h. die Annahme muss falsch sein. Also hat f keinen Fixpunkt. ∎

Aus diesem Gegenbeispiel lernen wir, dass in unendlich–dimensionalen Banachräumen stetige Abbildungen nicht unbedingt einen Fixpunkt haben müssen. Es ist also notwendig, stärkere Forderungen an die Abbildungen zu stellen. Dazu betrachten wir folgenden Ansatz: Wir untersuchen solche Operatoren, die durch „endlich–dimensionale“ Operatoren angenähert werden können, und versuchen, den Satz von Brouwer auf diese anzuwenden. Zur Umsetzung dieser Idee benötigen wir folgende Definition:

2.36 Definition. *Sei $T\colon M \subseteq X \to Y$, wobei X, Y normierte Vektorräume sind. Der Operator T heißt **kompakt**, wenn gilt:*

(i) *T ist stetig,*

(ii) *T bildet beschränkte Mengen $B \subseteq M$ in relativ kompakte Mengen ab, d.h. $\overline{T(B)}$ ist kompakt.*

Beispiel. Das klassische Beispiel eines linearen, kompakten Operators ist ein Integraloperator mit Kern aus L^2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ein Integralkern. Der *Integraloperator* $A\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ist dann definiert durch

$$Au(x) := \int_\Omega K(x,y)\, u(y)\, dy\,.$$

Mithilfe eines Approximationsargumentes, des Satzes von Arzelà–Ascoli (cf. A.12.4) und der Abgeschlossenheit der Menge der kompakten Operatoren bezüglich der Operatornorm kann man zeigen, dass A kompakt ist (cf. [2, 3.13, 8.15]).

Bemerkungen. (i) Die Definition *kompakter* Mengen und damit zusammenhängende Begriffe und Resultate finden sich im Appendix in den Abschnitten A.1 und A.2. Insbesondere sind die Begriffe kompakt, folgenkompakt und präkompakt in Banachräumen äquivalent (cf. Satz A.2.1).

(ii) Wir erinnern daran, dass in endlich–dimensionalen normierten Vektorräumen eine Menge M genau dann kompakt ist, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist. Aufgrund dieser Äquivalenz überlegt man sich leicht folgende Aussage: Seien X, Y normierten Vektorräume. Dann ist ein Operator $T\colon M \subseteq X \to Y$ kompakt, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $\dim Y < \infty$ und T ist stetig und beschränkt.

(b) $\dim X < \infty$, T ist stetig und M ist abgeschlossen.

Der folgende Satz zeigt, in welchem Sinne kompakte Operatoren durch „endlich–dimensionale“ Operatoren angenähert werden können.

2.37 Satz. *Seien X und Y Banachräume, $M \subset X$ eine nichtleere, beschränkte Teilmenge und $T\colon M \to Y$ ein Operator. Dann sind äquivalent:*

(i) *T ist kompakt.*

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein kompakter Operator $P_n\colon M \to Y$, dessen Bildbereich $R(P_n)$ in einem endlich–dimensionalen Teilraum von Y liegt. Die Operatoren P_n approximieren den Operator T gleichmäßig auf M, d.h. für alle $x \in M$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\|P_n x - Tx\|_Y < \frac{1}{n}\,. \tag{2.38}$$

Beweis. (ii) $\Rightarrow$ (i): Wir zeigen zunächst, dass T stetig ist. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Dann gilt für alle $x, y \in M$:

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\|_Y &\le \|Tx - P_n x\|_Y + \|P_n x - P_n y\|_Y + \|P_n y - Ty\|_Y \\ &\le \frac{1}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y + \frac{1}{n} \\ &\le \frac{3}{n}\,,\end{aligned} \tag{2.39}$$

falls $\|x - y\|_X$ klein genug ist. Hierbei wurde benutzt, dass der Operator P_n für festes n stetig ist. Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist der Operator T stetig. Um die relative Kompaktheit von $T(M)$ nachzuweisen, zeigen wir die Existenz eines endlichen $\frac{3}{n}$–Netzes (cf. Satz A.2.1). Aus (2.39) folgt für alle $x, y \in M$

$$\|Tx - Ty\|_Y \le \frac{2}{n} + \|P_n x - P_n y\|_Y\,. \tag{2.40}$$

Da M beschränkt ist und P_n kompakt ist, gibt es $x_1, \ldots, x_N \in M$ mit

$$P_n(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(P_n x_i)\,,$$

d.h. für alle $y \in M$ existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, N\}$, mit

$$\|P_n y - P_n x_i\|_Y < \frac{1}{n}\,.$$

Zusammen mit (2.40) ergibt sich daraus, dass für alle $y \in M$ ein Index $i \in \{1, \ldots, N\}$ existiert mit

$$\|Tx_i - Ty\|_Y < \frac{3}{n}\,,$$

d.h. $T(M)$ besitzt ein endliches $\frac{3}{n}$–Netz. Also ist der Operator T kompakt.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei T kompakt und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Da M beschränkt ist, ist $T(M)$ relativ kompakt und es existiert ein endliches $\frac{1}{n}$–Netz (cf. Satz A.2.1), d.h.

$$\exists\, x_i \in M, i = 1, \ldots, N : \qquad T(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{1}{n}}(Tx_i)\,. \tag{2.41}$$

Wir setzen $y_i := Tx_i, i = 1, \dots, N$, und konstruieren eine *Zerlegung der Eins*. Für $i = 1, \dots, N$ definieren wir Funktionen $a_i : M \to \mathbb{R}$ durch

$$a_i(x) := \max\Big(\frac{1}{n} - \|Tx - y_i\|_Y\,, 0\Big)\,, \tag{2.42}$$

welche folgende Eigenschaften haben:

(a) Die Funktionen a_i, $i = 1, \dots, N$, sind stetig, denn T ist stetig und das Maximum zweier stetiger Funktionen ist stetig.

(b) Aus (2.42) folgt, dass für alle $x \in M$ gilt: $a_i(x) \geq 0$.

(c) Für alle $x \in M$ gilt wegen der Überdeckungseigenschaft (2.41) der y_i:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x) > 0\,.$$

(d) Aus (2.42) folgt, dass $a_i(x) > 0$ die Ungleichung $\|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$ impliziert.

Wegen (c) können wir nun für $i = 1, \dots, N$ definieren

$$\lambda_i(x) := a_i(x)\Big(\sum_{j=1}^{N} a_j(x)\Big)^{-1} \tag{2.43}$$

und erhalten, dass $\lambda_i, i = 1, \dots, N$, die gewünschte Zerlegung der Eins ist, denn es gilt:

(α) Aufgrund von (a) und (c) sind die Funktionen λ_i, $i = 1, \dots, N$, stetig.

(β) Offensichtlich gilt aufgrund von (2.43) für alle $x \in M$: $0 \leq \lambda_i \leq 1$.

(γ) Aufgrund von (2.43) haben wir für alle $x \in M$: $\sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1$.

(δ) Aus $\lambda_i(x) > 0$ folgt $\|Tx - y_i\|_Y < \frac{1}{n}$.

Nun setzen wir $M_n = \operatorname{co}(y_1, \dots, y_N) \subseteq \operatorname{span}(y_1, \dots, y_N)$ und definieren den so genannten *Schauderoperator* $P_n : M \to M_n$ durch:

$$P_n(x) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)\, y_i\,. \tag{2.44}$$

Wir zeigen, dass P_n die gewünschten Approximationseigenschaften hat. Aufgrund von (γ), der Definition der P_n und (δ) gilt:

$$\begin{aligned} \|P_n x - Tx\|_Y &= \Big\|P_n x - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)\, Tx\Big\|_Y \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) \|y_i - Tx\|_Y \leq \frac{1}{n}\,. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Aus (2.44) folgt, dass $R(P_n) \subseteq \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_N)$ gilt, d.h. der Bildbereich von P_n liegt in einem endlich-dimensionalen Teilraum von Y. Die Menge $P_n(M)$ und somit auch $\overline{P_n(M)}$ ist beschränkt, denn mit Hilfe von (2.45) folgt

$$\|P_n x\| \le \|P_n x - Tx\| + \|Tx\| \le \frac{1}{n} + c\,,$$

da T kompakt ist und somit $T(M)$ beschränkt ist (cf. Satz A.2.1). Also erhalten wir, dass die Menge $P_n(M)$ relativ kompakt ist. Aufgrund von (2.44) und (α) ist P_n stetig. Insgesamt ist also P_n ein kompakter Operator. ■

1.2.3 Der Satz von Schauder

2.46 Satz (Schauder 1930). *Sei $T\colon M \subseteq X \to M$ stetig, wobei X ein Banachraum ist und M eine nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis. Der Operator T ist kompakt, da $\overline{T(M)} \subseteq M$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selbst auch kompakt ist. Nach dem Beweis von Satz 2.37 existieren daher kompakte Operatoren $P_n\colon M \to M_n$, wobei $M_n = \operatorname{co}(y_1, \ldots, y_N) \subseteq M$, $N = N(n)$, so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\|P_n x - Tx\| \le \frac{1}{n}\,. \tag{2.47}$$

Wir setzen

$$\widetilde{P}_n := P_n|_{M_n}\,.$$

Die Menge M_n ist abgeschlossen und homöomorph zur abgeschlossenen Kugel $\overline{B_1(0)}$ im $\mathbb{R}^{\widetilde{N}}$, $\widetilde{N} \le N$. Der Operator $\widetilde{P}_n$ bildet die Menge M_n in sich selbst ab. Also liefert Folgerung 2.23 die Existenz von Fixpunkten $x_n \in M_n$, d.h.

$$\widetilde{P}_n x_n = x_n\,. \tag{2.48}$$

Für die Folge der Fixpunkte (x_n) gilt:

$$x_n \in M_n \subseteq M\,.$$

Da M kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit (x_n) bezeichnen, d.h. es existiert $x \in M$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Wir zeigen nun, dass dieses x der gesuchte Fixpunkt von T ist. Unter Benutzung von (2.48) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|Tx - x_n\| &= \|Tx - \widetilde{P}_n x_n\| \\ &\le \|Tx - Tx_n\| + \|Tx_n - \widetilde{P}_n x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)\,,\end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit von T und der gleichmäßigen Approximationseigenschaft (2.47) der P_n. Somit ergibt sich

$$Tx = x\,,$$

d.h. x ist ein Fixpunkt von T. ∎

Wir wollen noch eine alternative Version des Satzes von Schauder beweisen, die häufiger benutzt wird. In der Praxis ist es nämlich oft leichter, die Kompaktheit eines Operators zu zeigen als die Kompaktheit einer Teilmenge eines unendlich–dimensionalen Banachraumes. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

2.49 Lemma (Mazur 1930). *Sei X ein Banachraum und $M \subseteq X$ relativ kompakt. Dann ist auch $co(M)$ relativ kompakt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da M relativ kompakt ist, existiert ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz, d.h. es existieren $z_1, \ldots, z_n \in M$, so dass für alle $x \in M$ ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ existiert mit

$$\|x - z_j\| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.50}$$

Dies erlaubt es uns, eine Funktion $v : M \to \{1, \ldots, n\}$ durch folgende Vorschrift zu definieren:

$$v(x) = j\,,$$

wobei j der kleinste Index ist für den (2.50) gilt. Nach Definition von $co(M)$ gibt es für alle $y \in co(M)$ eine Darstellung $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i\, y_i$, wobei $m = m(y) \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in [0,1]$, $y_i \in M$, $i = 1, \ldots, m$ und $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Aufgrund dieser Darstellung und der Definition von v erhalten wir

$$\Big\|y - \sum_{i=1}^m \alpha_i z_{v(y_i)}\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^m \alpha_i (y_i - z_{v(y_i)})\Big\| \le \sum_{i=1}^m \alpha_i \|y_i - z_{v(y_i)}\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da $\sum_{i=1}^m \alpha_i z_{v(y_i)} \in K := co(z_1, \ldots, z_n)$ gilt, haben wir gezeigt:

$$co(M) \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)\,. \tag{2.51}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\psi \colon [0,1]^n \to X : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i\,,$$

die offensichtlich stetig ist. Für die Restriktion der Funktion ψ auf die Menge $A = \big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0,1]^n \,\big|\, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\big\}$ gilt $\psi(A) = K$. Somit ist K das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung, also selbst kompakt, d.h.

$$\exists\, k_1, \ldots, k_N \in K : \quad K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k_i)\,. \tag{2.52}$$

Aus (2.51) und (2.52) folgt dann insgesamt

$$co(M) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_{\varepsilon}(k_i)\,,$$

d.h. $co(M)$ besitzt ein endliches ε–Netz. Also ist $co(M)$ relativ kompakt. ∎

2.53 Folgerung (Schauder). *Sei $T\colon M \subset X \to M$ ein kompakter Operator, wobei X ein Banachraum ist, und M eine nichtleere, abgeschlossene, beschränkte, konvexe Teilmenge von X ist. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $N = \overline{co(T(M))} \subseteq M$. Wir überprüfen die Voraussetzungen von Satz 2.46. Nach Lemma 2.49 ist die Menge N kompakt, konvex und nichtleer. Der Operator T ist stetig, denn T ist kompakt. Weiter bildet T die Menge N in sich selbst ab, denn es gilt:

$$N \subseteq M \quad \Rightarrow \quad T(N) \subseteq T(M) \quad \Rightarrow \quad T(N) \subseteq \overline{co(T(N))} \subseteq \overline{co(T(M))} = N\,.$$

Damit folgt nach Satz 2.46, dass T einen Fixpunkt besitzt. ∎

1.2.4 Anwendung auf Differentialgleichungen

Wir betrachten zuerst noch einmal die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t)\big)\,, \\ x(t_0) &= y_0\,, \end{aligned} \tag{2.54}$$

wobei wir diesmal nur voraussetzen, dass $f\colon Q \to \mathbb{R}$ stetig ist, und nicht, wie beim Satz von Picard–Lindelöf, Lipschitz–stetig.

2.55 Satz (Peano 1980). *Seien $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$ gegeben und sei*

$$Q = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |t - t_0| \le a, |y - y_0| \le b\}\,.$$

Die Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ sei stetig, d.h. insbesondere, dass ein $K > 0$ existiert, so dass für alle $(t,y) \in Q$ gilt:

$$|f(t,y)| \le K\,.$$

Dann hat das Anfangswertproblem (2.54) *eine stetig differenzierbare Lösung $x(\cdot)$, die im Intervall $[t_0 - c, t_0 + c]$, mit $c = \min(a, \frac{K}{b})$, definiert ist.*

Beweis. Da f stetig ist, ist die Differentialgleichung (2.54) äquivalent zur Integralgleichung

$$x(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\,.$$

Um diese zu lösen, versehen wir den Raum $X = C([t_0 - c, t_0 + c]; \mathbb{R})$ mit der Norm $\|x\|_0 = \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} |x(t)|$ und definieren den Operator $T\colon M \subset X \to X$ durch

$$(Tx)\,(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, x(s)\big)\, ds\,.$$

Das Anfangswertproblem (2.54) ist also äquivalent zu folgendem Fixpunktproblem:

$$Tx = x\,, \qquad\qquad x \in M\,,$$

mit

$$M = \{x \in X \,\big|\, \|x - y_0\|_0 \le b\}\,.$$

Die Menge M ist nichtleer, konvex, abgeschlossen und beschränkt. Analog zum Beweis vom Satz von Picard–Lindelöf kann man zeigen, dass der Operator T die Menge M in sich selbst abbildet. Es ist noch zu zeigen, dass T kompakt ist. Dazu verwenden wir den Satz von Arzelà–Ascoli. Für alle $t \in [t_0 - c, t_0 + c]$ und $x \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} |(Tx)\,(t)| &\le |y_0| + \int_{t_0}^{t} \big|f(s, x(s))\big|\, ds \\ &\le |y_0| + c\,K\,, \end{aligned}$$

d.h. $T(M)$ ist gleichmäßig beschränkt. Weiter gilt für alle $t_1, t_2 \in [t_0 - c, t_0 + c]$ und $x \in M$:

$$|(Tx)\,(t_1) - (Tx)\,(t_2)| \le \int_{t_1}^{t_2} \big|f(s, x(s))\big|\, ds \le K|t_2 - t_1|\,,$$

d.h. $T(M)$ ist gleichgradig stetig. Der Satz von Arzelà–Ascoli (cf. Satz A.12.4) liefert also, dass $T(M)$ relativ kompakt in $C([t_0 - c, t_0 + c]; \mathbb{R})$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass T stetig ist: Konvergiere $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ bzgl. der Norm in X, d.h. x_n konvergiert gleichmäßig gegen x auf $[t_0 - c, t_0 + c]$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} |(Tx_n)\,(t) - (Tx)\,(t)| &\le \int_{t_0}^{t} \big|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\big|\, ds \\ &\le c\,\varepsilon\,, \end{aligned}$$

da f auf Q gleichmäßig stetig ist und $|t - t_0| \leq c$. Nach Folgerung 2.53 folgt dann: Es gibt einen Fixpunkt von T, d.h. eine Lösung von (2.54). Aus der Differentialgleichung (2.54) folgt sofort, dass die Lösung x stetig differenzierbar ist, da f stetig ist. ■

Wir betrachten nun die nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad\quad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.56}$$

wobei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ ist, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und der *Laplace–Operator* durch

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2\, u$$

definiert ist.

2.57 Satz. *Sei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$ eine gegebene, beschränkte Funktion. Dann besitzt das Problem* (2.56) *eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, d.h. für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt die schwache Formulierung:* [5]

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f(u)\,\varphi\, dx\,. \tag{2.58}$$

Beweis. Durch

$$[u,\varphi] := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx\,, \qquad u,\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)\,, \tag{2.59}$$

ist eine *beschränkte*, *koerzive Bilinearform* auf dem Hilbertraum $W_0^{1,2}(\Omega)$ definiert, d.h. für alle $u, \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} \big|[u,\varphi]\big| &\leq c_0\, \|u\|_{W_0^{1,2}} \|\varphi\|_{W_0^{1,2}}\,, \\ [u,u] &\geq c_1\, \|u\|^2_{W_0^{1,2}}\,. \end{aligned}$$

Dies sieht man leicht mithilfe der Hölder–Ungleichung (cf. (A.12.11)) und der Definition der Norm in $W_0^{1,2}(\Omega)$ (cf. Abschnitt A.12.3), bzw. durch Einsetzen von $\varphi = u$ in (2.59) und mithilfe der Äquivalenz der Normen $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ (cf. (A.12.26)). Für $g \in L^2(\Omega)$ ist offensichtlich durch

$$G(\varphi) := \int_\Omega g\,\varphi\, dx\,,$$

[5] Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a} = (a^1, \ldots, a^d)\,, \mathbf{b} = (b^1, \ldots, b^d) \in \mathbb{R}^d$ benutzen wir die Bezeichnung $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{i=1}^d a^i\, b^i$.

ein beschränktes lineares Funktional auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ gegeben. Nach dem Lemma von Lax–Milgram (cf. Lemma A.10.4) besitzt somit das Randwertproblem für die *Laplace–Gleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta v &= g \qquad \text{in } \Omega\,, \\ v &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.60}$$

für alle $g \in L^2(\Omega)$ genau eine **schwache Lösung** $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, d.h. für alle $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt die schwache Formulierung:

$$[v,\varphi] = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega g\,\varphi\,dx = G(\varphi)\,. \tag{2.61}$$

Deshalb können wir einen Lösungsoperator durch

$$B := (-\Delta)^{-1} : g \mapsto v \tag{2.62}$$

definieren. Der Operator B ist kompakt, wenn man ihn als Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ auffasst, und stetig als Operator von $L^2(\Omega)$ nach $W_0^{1,2}(\Omega)$. In der Tat, wenn wir in (2.61) $\varphi = v$ wählen, erhalten wir mithilfe der Hölder–Ungleichung (cf. (A.12.11)) und der Poincaré–Ungleichung (cf. Satz A.12.25)

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2}^2 &\le \|g\|_{L^2}\,\|v\|_{L^2} \\ &\le c\,\|g\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2}\,. \end{aligned}$$

Dies liefert die *apriori Abschätzung*

$$\|\nabla v\|_{L^2} \le c\,\|g\|_{L^2}\,. \tag{2.63}$$

Wenn wir nun wieder die obige Äquivalenz der Normen und die Definition des Lösungsoperators benutzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Bg\|_{W_0^{1,2}} &\le c\,\|g\|_{L^2}\,, \\ \|Bg\|_{L^2} &\le c\,\|g\|_{L^2}\,, \end{aligned} \tag{2.64}$$

wobei die zweite Ungleichung sofort aus der ersten folgt. Aus (2.64) folgt, dass sowohl $B : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ als auch $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ stetig sind, da B linear und beschränkt ist. Weiterhin erhalten wir aus $(2.64)_2$, dass B beschränkte Mengen in $L^2(\Omega)$ in beschränkte Mengen in $W_0^{1,2}(\Omega)$ abbildet, was zusammen mit der kompakten Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ (cf. Satz A.12.24) liefert, dass $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ kompakt ist.

Die schwache Formulierung (2.58) des Problems (2.56) ist nun äquivalent zum Fixpunktproblem

$$Tu = u\,, \tag{2.65}$$

wobei $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definiert ist durch

$$Tu := B\big(f(u)\big)\,.$$

Der Operator T ist wohldefiniert, da auf Grund der Voraussetzungen an f für alle $u \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$\|f(u)\|_{L^2(\Omega)} \le |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} .$$

Dies und (2.64) liefern

$$\|Tu\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \le c \, \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} =: c_2 . \tag{2.66}$$

Also bildet T die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_2}(0)}$ des $L^2(\Omega)$ in die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_2}(0)}$ des $W_0^{1,2}(\Omega)$ ab. Somit ist der Bildbereich $R(T)$ relativ kompakt in $L^2(\Omega)$ aufgrund der kompakten Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ (cf. Satz A.12.24). Der Operator T ist auch stetig. In der Tat, aus $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ in $L^2(\Omega)$ folgt für eine Teilfolge $u_{n_k}(x) \to u(x)$ $(k \to \infty)$ fast überall in Ω. Da B linear ist, erhalten wir aus (2.64)

$$\|Tu_{n_k} - Tu\|_{L^2} = \|B\big(f(u_{n_k}) - f(u)\big)\|_{L^2} \le c \, \|f(u_{n_k}) - f(u)\|_{L^2} .$$

Die rechte Seite konvergiert gegen Null aufgrund des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz (cf. Satz A.11.12). Dies gilt jedoch für jede fast überall konvergente Teilfolge von (u_n) und somit auch für die gesamte Folge (cf. Lemma 3.0.3). Insgesamt ist also $T \colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein kompakter Operator, der die abgeschlossene Kugel $\overline{B_{c_2}(0)}$ des $L^2(\Omega)$ in sich selbst abbildet. Folgerung 2.53 liefert sofort die Existenz eines Fixpunktes $u \in \overline{B_{c_2}(0)} \subset L^2(\Omega)$ von T. Aufgrund von (2.65) und (2.66) erhalten wir, dass der Fixpunkt u in $W_0^{1,2}(\Omega)$ liegt und, aufgrund der Definition von T bzw. B, die schwache Formulierung (2.58) erfüllt. ■

Bemerkung. Die Behauptung des Satzes kann leicht auf den Fall einer stetigen Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$|f(x)| \le c \left(1 + |x|^\alpha\right),$$

mit $0 \le \alpha < 1$, erweitert werden. Um eine Analogie von (2.66) zu erhalten, muss man $0 \le \alpha < 1$ und die Young–Ungleichung (cf. Abschnitt A.12.2) benutzen.

2 Integration und Differentiation in Banachräumen

Ziel dieses Kapitels ist es, die *Integrations-* und *Differentiationstheorie* reeller vektorwertiger Funktionen $\mathbf{f}\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ auf Funktionen

$$f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to X\,,$$

mit Werten in einem Banachraum X zu erweitern. Insbesondere werden das *Lebesgue–Integral* $\int_\Omega f^i(x)\,dx$, $i = 1, \dots, m$, mit $\mathbf{f} = (f^1, \dots, f^m)$, die *partiellen Ableitungen* $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, d$, und das *Differential* $D\mathbf{f}(x)$ verallgemeinert. Das Vorgehen in Falle von Funktionen mit Werten in Banachräumen ist analog zum Fall reeller vektorwertiger Funktionen. Alle Sätze und Resultate, die wir kennenlernen werden, haben eine Entsprechung in der Theorie reeller Funktionen, aber an manchen Stellen muss man aufpassen!

2.1 Bochner–Integrale

Der Einfachheit halber und in Hinblick auf die Anwendung auf Evolutionsprobleme betrachten wir nur Funktionen

$$f\colon S \to X\,,$$

mit Lebesgue–messbarem eindimensionalem Definitionsbereich

$$S \subseteq \mathbb{R}\,,$$

und beschränken uns auf den Fall, dass X ein reflexiver reeller Banachraum ist. Diese Voraussetzungen gelten für den gesamten Abschnitt. Im Folgendem bezeichnen wir das *Lebesgue Maß* einer Lebesgue–messbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $\mu(A)$ (cf. Abschnitt A.11).

1.1 Definition. *Eine Funktion $f\colon S \to X$ heißt **Treppenfunktion**, wenn sie sich schreiben lässt als*

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{B_i}(s)\, x_i\,,$$

wobei $x_i \in X$, $i = 1, \ldots, n$, *und* $B_i \subseteq S \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *Lebesgue–messbare Mengen sind, für die gilt:* $\mu(B_i) < \infty$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ *für* $i \neq j$. *Die charakteristische Funktion* χ_B *ist definiert durch*

$$\chi_B(s) = \begin{cases} 0\,, & s \notin B\,, \\ 1\,, & s \in B\,. \end{cases}$$

1.2 Definition. *Für eine Treppenfunktion* f *definieren wir das* ***Bochner–Integral*** *durch*

$$\int_S f(s)\,ds := \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)\,x_i\,.$$

Bemerkung. Man beachte, dass das Bochner-Integral $\int_S f(s)\,ds$ ein Element des Banachraumes X ist.

In der Lebesgue Theorie reellwertiger Funktionen kann man zeigen, dass eine Funktion genau dann messbar ist, wenn sie der punktweise Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen ist. Weiterhin kann man das Lebesgue Integral einer nichtnegativen reellen Funktion als den Grenzwert von Integralen einer geeigneten Folge von Treppenfunktionen charakterisieren (cf. Abschnitt A.11, [2, Anhang 1], [10, Kapitel 1]). Im Falle von Funktionen mit Werten in Banachräumen werden Modifizierungen dieser Charakterisierungen als Definitionen benutzt.

1.3 Definition. *Eine Funktion* $f\colon S \to X$ *heißt* ***Bochner–messbar****, falls eine Folge* (f_n) *von Treppenfunktionen* $f_n\colon S \to X$ *existiert, so dass für fast alle* $s \in S$ *gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s) - f(s)\|_X = 0\,. \tag{1.4}$$

Genügt eine solche Folge der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n(s) - f(s)\|_X\,ds = 0\,, \tag{1.5}$$

so heißt f ***Bochner–integrierbar****, und wir definieren das* ***Bochner–Integral*** *als*

$$\int_S f(s)\,ds := \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(s)\,ds\,. \tag{1.6}$$

Zum besseren Verständnis und zur Rechtfertigung dieser Definition müssen wir folgende Überlegungen machen:

(a) Die Bedingung (1.5) macht Sinn, wie aus folgendem Lemma, angewendet auf $f_n - f$, folgt.

1.7 Lemma. *Wenn* $f\colon S \to X$ *Bochner–messbar ist, dann ist die Funktion* $\|f(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$ *Lebesgue–messbar.*

Beweis. Sei $f\colon S \to X$ eine Bochner–messbare Funktion. Dann gibt es eine Folge $f_n\colon S \to X$ von Treppenfunktionen für die (1.4) gilt. Offensichtlich sind $\|f_n(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Aufgrund von (1.4) haben wir für fast alle $s \in S$

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(s)\| = \|f(s)\| \,,$$

und somit ist die Funktion $\|f(\cdot)\|$ als Grenzwert einer Folge Lebesgue–messbarer Funktionen selbst Lebesgue–messbar (cf. Satz A.11.4). ■

(b) Der Grenzwert in (1.6) existiert. In der Tat haben wir für $n, k \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \int\limits_S f_n\,ds - \int\limits_S f_k\,ds \Big\| = \Big\| \int\limits_S f_n - f_k\,ds \Big\| \le \int\limits_S \|f_n - f_k\|\,ds \,,$$

da (f_n) Treppenfunktionen sind und es sich somit um endliche Summen von Elementen aus X handelt. Die rechte Seite können wir abschätzen durch

$$\int\limits_S \|f_n - f\| + \|f - f_k\|\,ds \to 0 \qquad\qquad (n, k \to \infty)\,,$$

wobei wir die Bedingung (1.5) benutzt haben. Somit haben wir gezeigt, dass $\big(\int_S f_n\,ds\big)$ eine Cauchyfolge in X bildet. Aufgrund der Vollständigkeit von X existiert also der Grenzwert in (1.6).

(c) Der Grenzwert in (1.6) ist von der gewählten Folge unabhängig, da zwei Folgen zu einer kombiniert werden können und der Grenzwert existiert.

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen Bochner–messbaren Funktionen und Lebesgue–messbaren Funktionen her.

1.8 Satz (Pettis 1938). *Sei X ein separabler Banachraum. Dann ist $f\colon S \to X$ genau dann Bochner–messbar, wenn für alle $F \in X^*$ die Funktion $\langle F, f(\cdot)\rangle_X\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar ist.*

Beweis. 1. Sei f Bochner–messbar. Aufgrund von Definition 1.3 gibt es eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen, so dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$f_n(s) \to f(s) \;\text{ in } X\,, \qquad (n \to \infty)\,.$$

Da starke Konvergenz in X schwache Konvergenz in X impliziert (cf. Lemma A.8.6 (ii)), folgt damit auch, dass für alle $F \in X^*$ und fast alle $s \in S$ gilt:

$$\langle F, f_n(s)\rangle \to \langle F, f(s)\rangle \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.9}$$

Offensichtlich sind $\langle F, f_n(\cdot)\rangle\colon S \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Dies zusammen mit (1.9) impliziert, dass $\langle F, f(\cdot)\rangle\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar ist.

2. Der Beweis dieser Richtung ist sehr technisch und kann in [22, Satz V.4], [21, Satz 24.1] nachgelesen werden. Die Voraussetzung der Separabilität von X kann man abschwächen. ■

1.10 Folgerung. *Sei X ein separabler Banachraum. Ferner sei $f\colon S \to X$ eine Funktion und seien $f_n\colon S \to X, n \in \mathbb{N}$, Bochner–messbare Funktionen, so dass für fast alle $s \in S$ gilt:*

$$f_n(s) \rightharpoonup f(s) \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.11}$$

Dann ist f Bochner–messbar.

Beweis. Da die Funktionen f_n, $n \in \mathbb{N}$, Bochner–messbar sind, folgt aufgrund von Satz 1.8, dass für alle $F \in X^*$ auch die reellwertigen Funktionen $\langle F, f_n(\cdot)\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, Lebesgue–messbar sind. Aus (1.11) folgern wir für alle $F \in X^*$ und fast alle $s \in S$

$$\langle F, f_n(s)\rangle \to \langle F, f(s)\rangle \qquad (n \to \infty)\,.$$

Somit ist auch der Grenzwert $\langle F, f(\cdot)\rangle$ Lebesgue–messbar. Nochmalige Anwendung von Satz 1.8 liefert dann, dass f Bochner–messbar ist. ∎

1.12 Satz (Bochner 1933). *Eine Bochner–messbare Funktion $f\colon S \to X$ ist genau dann Bochner–integrierbar, wenn die Funktion $\|f(\cdot)\|_X\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar ist.*

Beweis. 1. Sei $f\colon S \to X$ Bochner–integrierbar und sei (f_n) eine Folge von Treppenfunktionen, so dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$f_n(s) \to f(s) \text{ in } X \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.13}$$

Nach Lemma 1.7 sind $\|f_n(\cdot)\|\colon S \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Lebesgue–messbar, was zusammen mit (1.13) liefert, dass auch $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue–messbar ist. Wir haben folgende punktweise Abschätzung:

$$\|f(s)\| \le \|f_n(s)\| + \|f(s) - f_n(s)\|\,,$$

und somit ergibt sich für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_S \|f(s)\|\,ds \le \int\limits_S \|f_{n_0}(s)\|\,ds + \int\limits_S \|f(s) - f_{n_0}(s)\|\,ds < \infty\,,$$

da f_{n_0} eine Treppenfunktion ist und der Grenzwert in (1.5) existiert. Also ist $\|f(\cdot)\|$ Lebesgue–integrierbar.
2. Sei f Bochner–messbar und sei $\|f(\cdot)\|_X\colon S \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar. Dann existiert eine Folge von Treppenfunktionen (f_n), die (1.13) erfüllt. Wir definieren

$$g_n(s) := \begin{cases} f_n(s)\,, & \text{falls } \|f_n(s)\| \le \frac{3}{2}\|f(s)\|\,,\\[1ex] 0\,, & \text{falls } \|f_n(s)\| > \frac{3}{2}\|f(s)\|\,. \end{cases}$$

Offensichtlich sind auch g_n, $n \in \mathbb{N}$, Treppenfunktionen und für fast alle $s \in S$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n(s) - f(s)\| = 0\,.$$

Aufgrund der Konstruktion von g_n haben wir für alle $s \in S$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|g_n(s)\| \le \frac{3}{2}\,\|f(s)\|\,,$$

und erhalten somit

$$\|g_n(s) - f(s)\| \le \|g_n(s)\| + \|f(s)\| \le \frac{5}{2}\,\|f(s)\|\,,$$

d.h. die Folge reellwertiger Funktionen $\big(\|g_n(\cdot) - f(\cdot)\|\big)$ besitzt eine Lebesgue–integrierbare Majorante. Nach dem Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz (cf. Satz A.11.10) folgt damit

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S \|g_n(s) - f(s)\|\, ds = 0\,,$$

d.h. f ist nach Definition Bochner–integrierbar. ■

1.14 Folgerung. *Sei $f\colon S \to X$ Bochner–integrierbar. Dann gilt:*

$$\Big\| \int\limits_S f(s)\, ds \Big\|_X \le \int\limits_S \big\|f(s)\big\|_X\, ds\,, \tag{1.15}$$

und für alle $F \in X^*$

$$\Big\langle F, \int\limits_S f(s)\, ds \Big\rangle_X = \int\limits_S \big\langle F, f(s)\big\rangle_X\, ds\,. \tag{1.16}$$

Beweis. 1. Nach der Definition des Bochner–Integrals gilt für geeignete Treppenfunktionen (f_n):

$$\begin{aligned}
\Big\| \int\limits_S f(s)\, ds \Big\| &= \lim_{n\to\infty} \Big\| \int\limits_S f_n(s)\, ds \Big\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \int\limits_S \|f_n(s)\|\, ds \\
&\le \lim_{n\to\infty} \bigg(\int\limits_S \|f_n(s) - f(s)\|\, ds + \int\limits_S \|f(s)\|\, ds \bigg) \\
&= \int\limits_S \|f(s)\|\, ds\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Definition des Integrals von Treppenfunktionen und (1.5) benutzt haben.

2. Nach dem Beweis von Satz 1.12 gibt es eine Folge (f_n) von Treppenfunktionen, die fast überall gegen f konvergiert und für die gilt:

$$\|f_n(s)\| \leq \tfrac{3}{2}\|f(s)\| \,. \tag{1.17}$$

Aufgrund der Definition des Bochner–Integrals haben wir für alle $F \in X^*$

$$\begin{aligned}
\Big\langle F, \int_S f(s)\,ds \Big\rangle &= \lim_{n\to\infty} \Big\langle F, \int_S f_n(s) \Big\rangle\, ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_S \langle F, f_n(s)\rangle\, ds \\
&= \int_S \langle F, f(s)\rangle\, ds \,,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

wobei im 2. Schritt benutzt wurde, dass das Integral von Treppenfunktionen eine endliche Linearkombination von Elementen aus X ist und F ein lineares stetiges Funktional ist. In der Tat gilt für festes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\Big\langle F, \int_S f_n(s)\,ds \Big\rangle &= \Big\langle F, \sum_{i=1}^N \mu(B_i^n)\, x_i^n \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \mu(B_i^n) \big\langle F, x_i^n \big\rangle = \int_S \big\langle F, f_n(s) \big\rangle\, ds \,.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt in (1.18) wurde (1.17) und der Satz von der majorisierten Konvergenz von reellwertigen Funktionen benutzt. ■

Bemerkung. Sei I ein beschränktes Intervall. Für Funktionen $f \in C(\bar{I}; X)$ existiert das Bochner–Integral nach Satz 1.12, da $\|f(\cdot)\| \colon \bar{I} \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar ist. Es ergibt sich als Grenzwert *Riemannscher Summen*:

$$\int_I f(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n f(\widehat{t_j^n})(t_{j+1}^n - t_j^n)\,, \tag{1.19}$$

wobei $\widehat{t_j^n} \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$. In der Tat, da f auf $\overline{I}$ gleichmäßig stetig ist, gilt offensichtlich

$$f_n(s) := \sum_{j=0}^n f(\widehat{t_j^n})\chi_{[t_j^n, t_{j+1}^n]}(s) \rightrightarrows f(s) \qquad (n \to \infty)\,, \tag{1.20}$$

d.h. es existieren Treppenfunktionen (f_n), die gleichmäßig gegen f konvergieren. Das Bochner–Integral dieser Treppenfunktionen ist gleich der Summe auf der rechten Seite in (1.19). Aus (1.20) ergibt sich mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz, angewendet auf $(\|f_n(\cdot) - f(\cdot)\|_X)$, dass (f_n) die Bedingung (1.5) erfüllt.

2.1.1 L^p–Räume mit Werten in Banachräumen

Das Bochner–Integral ist analog zum Lebesgue–Integral definiert. Man kann deshalb viele Resultate für Lebesgue–Integrale auf Bochner–Integrale übertragen, wobei die obigen Sätze, die einen Zusammenhang zwischen dem Bochner– und dem Lebesgue–Integral herstellen, nützlich sind. Wir wollen dies an einigen Beispielen illustrieren.

1.21 Definition. *Wir bezeichnen mit*

$$L^p(S;X)\,, \qquad\qquad 1 \le p < \infty\,,$$

die Menge aller Bochner–messbaren Funktionen, für die gilt:

$$\int\limits_S \|f(s)\|_X^p \, ds < \infty\,.$$

Die Menge aller Bochner–messbaren Funktionen, für die eine Konstante M existiert, so dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$\|f(s)\|_X \le M\,,$$

bezeichnen wir mit $L^\infty(S;X)$.

1.22 Satz. *Die Menge $L^p(S;X), 1 \le p \le \infty$, bildet einen Banachraum bezüglich der Norm*

$$\|f\|_{L^p(S;X)} := \bigg(\int\limits_S \|f(s)\|_X^p \, ds\bigg)^{\frac{1}{p}}\,, \quad 1 \le p < \infty\,,$$

bzw.

$$\|f\|_{L^\infty(S;X)} := \operatorname*{ess\,sup}_S \|f(s)\|_X\,.$$

Beweis. Die Eigenschaften der Norm sind leicht nachzurechnen. Die Vollständigkeit der Räume $L^p(S;X)$ kann wie folgt auf die Vollständigkeit der Räume $L^p(S;\mathbb{R})$ zurückgeführt werden: Sei (f_n) eine Cauchy–Folge in $L^p(S;X)$, d.h.

$$\|f_n - f_k\|_{L^p(S;X)}^p = \int\limits_S \|f_n(s) - f_k(s)\|_X^p \, ds \to 0 \qquad (n,k \to \infty)\,.$$

Dies, zusammen mit Satz 1.12 und der Dreiecksungleichung in X, impliziert, dass die Folge der Funktionen $\big(\|f_n(\cdot)\|_X\big)$ eine Cauchyfolge in $L^p(S;\mathbb{R})$ ist. Nun kann man dem Beweis im Falle von $L^p(S;\mathbb{R})$ folgen (cf. [2, Satz 1.17], [12, Satz IV.1.11]). ■

1.23 Lemma. *Die Menge der Treppenfunktionen (cf. Definition 1.1) ist dicht in $L^p(S;X)$, $1 \le p < \infty$.*

Beweis. Dies haben wir im Falle von $p = 1$ bereits im Teil 2 des Beweises von Satz 1.12 gezeigt. Der allgemeine Fall folgt völlig analog. ■

Beispiel. Zur Illustration wollen wir für ein glattes, beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und ein beschränktes Intervall $I = [0,T]$ den Raum $L^p(Q_T)$ betrachten, wobei $Q_T := I \times \Omega$ und $1 \le p < \infty$. Für $f \in L^p(Q_T)$ erhalten wir mithilfe des Satzes von Fubini (cf. Satz A.11.16), dass für fast alle $t \in I$ die Funktion

$$f(t) \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon x \mapsto f(t,x)\,,$$

zum Raum $L^p(\Omega)$ gehört und die Formel

$$\|f\|^p_{L^p(Q_T)} = \int_0^T \int_\Omega |f(t,x)|^p \, dx \, dt = \int_0^T \|f(t)\|^p_{L^p(\Omega)} \, ds = \|f\|^p_{L^p(I;L^p(\Omega))}\,, \tag{1.24}$$

gilt. Dies zeigt insbesondere, dass die Funktion

$$f \colon I \to L^p(\Omega) \colon t \mapsto f(t)$$

zum Raum $L^p(I;L^p(\Omega))$ gehört, falls $f \colon I \to L^p(\Omega)$ Bochner–messbar ist. Der Satz von Fubini liefert auch, dass die Funktion $t \mapsto \|f(t)\|^p_{L^p(\Omega)}$ Lebesgue–integrierbar ist, also insbesondere Lebesgue–messbar. Aufgrund von Satz 1.12 folgt daraus sofort, dass $f \colon I \to L^p(\Omega)$ Bochner–messbar ist. Somit haben wir gezeigt: $L^p(Q_T) \subseteq L^p(I;L^p(\Omega))$.

Umgekehrt, sei $L^p(I;L^p(\Omega))$. Lemma 1.23 liefert die Existenz einer Folge von Treppenfunktionen (f_n) der Form

$$f_n(t,x) = \sum_{i=1}^{N(n)} \chi_{B_i^n}(t)\, u_i^n(x)\,,$$

wobei $B_i^n \subset I$, $i = 1, \ldots, N(n)$, paarweise disjunkte Lebesgue–messbare Mengen sind und u_i^n, $i = 1, \ldots, N(n)$, Elemente aus $L^p(\Omega)$ sind, so dass

$$f_n \to f \quad \text{in } L^p(I;L^p(\Omega)) \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.25}$$

Die so definierten Funktionen $f_n \colon Q_T \to \mathbb{R}$, sind offensichtlich Lebesgue–messbar und gehören zum Raum $L^p(Q_T)$. Aufgrund von (1.25) und der Gleichheit der Normen in $L^p(Q_T)$ und $L^p(I;L^p(\Omega))$ (cf. (1.24)) erhalten wir, dass (f_n) eine Cauchyfolge in $L^p(Q_T)$ bildet. Da der Raum $L^p(Q_T)$ vollständig ist (cf. Abschnitt A.12.2), besitzt die Folge (f_n) einen Grenzwert in $L^p(Q_T)$, der, aufgrund von (1.25) und $L^p(Q_T) \subseteq L^p(I;L^p(\Omega))$, mit f übereinstimmen muss. Somit gilt auch: $L^p(I;L^p(\Omega)) \subseteq L^p(Q_T)$.

Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass gilt:

$$L^p(Q_T) = L^p(I;L^p(\Omega))\,.$$

Weitere Beispiele für L^p–Räume mit Werten in Banachräumen werden wir kennenlernen, wenn wir uns mit Evolutionsproblemen und parabolischen Differentialgleichungen beschäftigen (cf. Abschnitte 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6).

1.26 Satz (Hölder–Ungleichung). *Sei* $f \in L^p(S;X)$, $g \in L^{p'}(S;X^*)$, *wobei* X^* *der Dualraum von* X *ist,* $1 \le p \le \infty$ *gilt und* p' *der duale Exponent ist, d.h.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.[1] *Dann ist* $\langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle_X \in L^1(S;\mathbb{R})$ *und es gilt:*

$$\Big| \int_S \big\langle g(s), f(s)\big\rangle_X \, ds \Big| \le \|g\|_{L^p(S;X^*)} \|f\|_{L^{p'}(S;X)} \,.$$

Beweis. Seien (f_n), (g_n) Folgen von Treppenfunktionen, so dass für fast alle $s \in S$ gilt:

$$f_n(s) \to f(s) \text{ in } X\,, \quad g_n(s) \to g(s) \text{ in } X^* \qquad (n \to \infty)\,.$$

Somit gilt für fast alle $s \in S$

$$\langle g_n(s), f_n(s)\rangle_X \to \langle g(s), f(s)\rangle_X \qquad (n \to \infty)\,,$$

d.h. auch die Funktion $\langle g(\cdot), f(\cdot)\rangle_X$ ist Lebesgue–messbar, und es gilt:

$$\begin{aligned} \Big| \int_S \big\langle g(s), f(s)\big\rangle_X \, ds \Big| &\le \int_S \|g(s)\|_{X^*} \|f(s)\|_X \, ds \\ &\le \|g\|_{L^p(S;X^*)} \|f\|_{L^{p'}(S;X)} \,, \end{aligned}$$

aufgrund der Hölder–Ungleichung für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ (cf. Lemma A.12.10). ∎

1.27 Satz. *Sei* X *ein reflexiver Banachraum und* $1 < p < \infty$. *Dann besitzt jedes Funktional* $F \in (L^p(S;X))^*$ *genau eine Darstellung der Form*

$$F(u) = \int_S \langle v(s), u(s)\rangle_X \, ds \qquad \textit{für alle } u \in L^p(S;X)\,,$$

wobei $v \in L^{p'}(S;X^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Beweis. Der sehr technische Beweis verläuft analog zum Beweis reellwertiger Funktionen $f\colon S \to \mathbb{R}$ (cf. [12, Kapitel 4]). ∎

2.2 Differentiation von Funktionen mit Werten in Banachräumen

Bevor wir uns mit Ableitungen von Funktionen mit Werten in Banachräumen beschäftigen, wollen wir an die Definition des Raumes stetiger Funktionen

[1] Wir benutzen die Konvention, dass sowohl $p = 1, p' = \infty$ als auch $p = \infty, p' = 1$ in der Identität $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ enthalten sind.

erinnern. Seien X, Y Banachräume und sei $U \subseteq X$. Die Menge aller stetigen Funktionen $f\colon U \to Y$ (cf. Abschnitt A.1) bezeichnen wir mit $C(U;Y)$, welche in natürlicher Weise einen Vektorraum bildet. Man beachte, dass z.B. für offene Mengen U eine stetige Funktion $f\colon U \to Y$ *nicht* beschränkt sein muss. Falls man die Menge der beschränkten, stetigen Funktionen $C_b(U;Y)$ mit der kanonischen Norm

$$\|f\|_0 := \sup_{x \in U} \|f(x)\|_Y$$

versieht, ist

$$\big(C_b(U;Y), \|\cdot\|_0\big) := \big(\{f \in C(U;Y) \,\big|\, \|f\|_0 < \infty\}, \|\cdot\|_0\big)$$

ein Banachraum. Dies beweist man analog zum Fall reellwertiger Funktionen. Im Falle einer *kompakten* Menge $U \subset X$ haben wir $C_b(U;Y) = C(U;Y)$.

Die Konvergenz einer Folge (f_n) von Funktionen aus $C_b(U;Y)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_0$ ist nichts anderes als die auf U gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f im Banachraum Y.

Im Folgenden werden wir die Bezeichnung $f\colon U \subseteq X \to Y$ benutzen, um anzuzeigen, dass der *Definitionsbereich* $D(f) := U$ der Abbildung $f\colon U \to Y$ eine Teilmenge der Menge X ist.

2.1 Definition. *Seien X, Y Banachräume, sei $V(x_0)$ eine Umgebung von $x_0 \in X$ und seien $f\colon V(x_0) \subseteq X \to Y$ und $h \in X$ gegeben. Falls die Abbildung $\varphi\colon (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \to Y$, wobei $\delta > 0$ geeignet gewählt ist, definiert durch*

$$\varphi(t) := f(x_0 + th)\,,$$

in $t = 0$ differenzierbar ist, d.h.

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \in Y\,, \tag{2.2}$$

*sagen wir, dass f im Punkt x_0 eine **Ableitung in Richtung** h besitzt, die wir mit $\delta f(x_0, h)$ bezeichnen. Falls $\delta f(x_0, h)$ für alle $h \in X$ existiert und die Abbildung*

$$Df(x_0)\colon X \to Y : h \mapsto \delta f(x_0, h)$$

*stetig und linear ist, sagen wir, dass f im Punkt x_0 **Gâteaux–differenzierbar** ist und nennen $Df(x_0)$ die **Gâteaux–Ableitung** von f im Punkt x_0.*

Bemerkung. (i) Die Definition (2.1) stimmt im Fall von $X = \mathbb{R}^d$, $Y = \mathbb{R}^m$ mit der Definition der Richtungsableitung reeller vektorwertiger Funktionen überein. Insbesondere gilt im Falle $m = 1$

$$\delta f(x_0, \mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,,$$

wobei $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, d$, die kanonische Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$ ist.

(ii) Falls $\delta f(x_0, h)$ existiert, ist f im Punkt x_0 stetig in Richtung h, d.h.

$$\lim_{t\to 0} f(x_0 + th) = f(x_0)\,.$$

(iii) Falls $\delta f(x_0, h)$ existiert, dann gilt für alle $y^* \in Y^*$:

$$\frac{d}{dt}\big\langle\, y^*, f(x_0 + th)\big\rangle_Y\Big|_{t=0} = \big\langle\, y^*, \delta f(x_0, h)\big\rangle_Y\,.$$

Indem wir die Bezeichnung $r(x) = o(\|x\|)$ einführen, können wir die Definition der Gâteaux–Ableitung umschreiben. Wir definieren:

$$r(x) = o(\|x\|) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} \to 0 \qquad (x \to 0)\,.$$

Damit schreibt sich die Bedingung (2.2) in Definition 2.1 wie folgt:

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = \varphi'(0)\, t + o(t)\,.$$

2.3 Satz (Mittelwertsatz). *Seien X, Y Banachräume und seien $x_0, h \in X$ gegeben. Ferner sei $f\colon X \to Y$ für $0 \le t \le 1$ in $f(x_0 + th)$ Gâteaux–differenzierbar und sei die Abbildung $t \mapsto \delta f(x_0 + th, h)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ stetig. Dann gilt:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h)\, dt\,.$$

Beweis. Seien $y^* \in Y^*$ und $h \in X$ gegeben. Wir definieren Funktionen $g\colon [0, 1] \to Y$ und $j\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch:

$$g(t) = f(x_0 + th)\,, \qquad j(t) = \langle y^*, g(t)\rangle_Y\,.$$

Aufgrund der Voraussetzungen sind beide Funktionen nach t differenzierbar und es gilt:

$$g'(t) = \delta f(x_0 + th, h)\,, \qquad j'(t) = \langle y^*, g'(t)\rangle_Y\,.$$

Für die Funktion j gilt nach dem Mittelwertsatz in $\mathbb{R}$

$$j(1) - j(0) = \int_0^1 j'(t)\, dt\,,$$

was wir unter Benutzung der Definitionen von j und g umschreiben können als

$$\begin{aligned}\langle y^*, f(x_0 + h) - f(x_0)\rangle_Y &= \int_0^1 \big\langle y^*, \delta f(x_0 + th, h)\big\rangle_Y\, dt \\ &= \Big\langle y^*, \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h)\, dt\Big\rangle_Y\,,\end{aligned}$$

wobei wir (1.16) verwendet haben. Da $y^* \in Y^*$ beliebig war, folgt mit einer Folgerung des Satzes von Hahn–Banach (cf. Lemma A.7.2 (ii))

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_0^1 \delta f(x_0+th, h)\, dt\,,$$

also gilt die Behauptung. ■

2.4 Definition. *Seien X, Y Banachräume und sei $f\colon B_r(x_0) \subseteq X \to Y$ eine Funktion. Dann ist f **Fréchet–differenzierbar** im Punkt $x_0 \in X$ genau dann, wenn eine stetige lineare Abbildung $A\colon X \to Y$ existiert, so dass*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(\|h\|)\,, \qquad (h \to 0)\,.$$

*Wenn diese Abbildung existiert, nennen wir sie **Fréchet–Ableitung** von f in x_0 und bezeichnen sie mit $f'(x_0) =: A$.*

Bemerkung. Wenn die Funktion $f\colon B_r(x_0) \subseteq X \to Y$ an der Stelle x_0 eine Fréchet–Ableitung besitzt, dann ist f an der Stelle x_0 stetig.

Die Funktion $f\colon U \subseteq X \to Y$ heißt **stetig differenzierbar** im Punkt $x_0 \in U$, falls in einer Umgebung $V(x_0) \subset U$ von x_0 die Fréchet–Ableitung

$$f'\colon V(x_0) \subseteq X \to L(X,Y)\colon x \mapsto f'(x)$$

existiert und im Punkt x_0 stetig ist. Hierbei bezeichnet $L(X,Y)$ den Raum der stetigen linearen Abbildungen $A\colon X \to Y$, der, mit der kanonischen Operatornorm

$$\|A\|_{L(X,Y)} := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y$$

versehen, einen Banachraum bildet (cf. Abschnitt A.6). Wenn f in jedem Punkt einer *offenen* Menge $U \subseteq X$ stetig differenzierbar ist, schreiben wir $f \in C^1(U;Y)$.

Seien $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offene Teilmengen der Banachräume X und Y. Eine Funktion $f\colon U \to V$ heißt **Diffeomorphismus** von U auf V genau dann, wenn f bijektiv ist und sowohl $f \in C^1(U,Y)$ als auch $f^{-1} \in C^1(V,X)$ gelten.

2.5 Satz. *Seien X, Y Banachräume. Dann gilt für $f\colon X \to Y$:*

(i) *Ist f im Punkt x_0 Fréchet–differenzierbar, dann ist f in x_0 Gâteaux–differenzierbar.*

(ii) *Ist f Gâteaux–differenzierbar in einer Umgebung $U(x_0)$, und ist $Df(x)$ stetig in x_0, dann ist f Fréchet–differenzierbar in x_0.*

Beweis. ad (i): Die Behauptung folgt sofort, wenn wir in der Definition der Fréchet–Ableitung h als $t\tilde{h}$, $\tilde{h}$ fest aber beliebig, wählen und dann den Grenzübergang $t \to 0$ durchführen.

ad (ii): Für die Funktion $g(\tau) := f(x_0 + \tau h)$ erhalten wir

$$g'(\tau) = \delta f(x_0 + \tau h, h)\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz 2.3 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\|g(1) - g(0) - g'(0)\| &= \Big\| \int_0^1 \delta f(x_0 + th, h) - \delta f(x_0, h)\, dt \Big\| \\ &\le \int_0^1 \big\| \big(Df(x_0 + th) - Df(x_0)\big) h \big\|\, dt \\ &\le \int_0^1 \big\| Df(x_0 + th) - Df(x_0) \big\| \, \|h\|\, dt \\ &= o(\|h\|)\,,\end{aligned}$$

da Df stetig in x_0 ist. Also ist f im Punkt x_0 Fréchet–differenzierbar. ■

Auch das Analogon der Ketten- und Produktregel reeller vektorwertiger Funktionen gilt für Funktionen mit Werten in Banachräumen. Doch wir müssen zunächst einmal klären, was ein Produkt ist.

2.6 Definition. *Seien X, Y und W Banachräume. Wir nennen eine Abbildung $B\colon X \times Y \to W$ ein* ***Produkt****, wenn B folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) *B ist bilinear, d.h. $B(\cdot,\cdot)$ ist linear in beiden Komponenten,*

(ii) *B ist stetig, d.h. es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $x \in X$ und alle $y \in Y$ gilt:*

$$\|B(x,y)\|_W \le c\, \|x\|_X \|y\|_Y\,.$$

2.7 Satz (Ketten– und Produktregel). *Seien X, Y, W, Z Banachräume.*

(i) *Seien $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ offene Mengen und seien $f \in C^1(U;Y)$ und $g \in C^1(V;Z)$ derart, dass $f(U) \subseteq V$. Dann ist $g \circ f \in C^1(U;Z)$, und es gilt:*

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \circ f'(x)\,.$$

(ii) *Sei $U \subseteq X$ offen. Die Funktionen $f\colon U \to Y$ und $g\colon U \to Z$ seien in U Fréchet–differenzierbar und $B\colon Y \times Z \to W$ sei ein Produkt. Dann ist die Funktion $h\colon U \to W : x \mapsto B(f(x), g(x))$ Fréchet–differenzierbar, und es gilt für alle $y \in X$*

$$h'(x)y = B(f'(x)y, g(x)) + B(f(x), g'(x)y)\,.$$

Beweis. ad (i): Nach Voraussetzung ist g in $y := f(x)$ Fréchet–differenzierbar, d.h.

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)k + \|k\|\, r_1(k)\,,$$

wobei $r_1(k) \to 0$ für $k \to 0$. Wir wählen

$$k = k(h) = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \|h\|\, r_2(h)\,,$$

wobei $r_2(h) \to 0$ für $h \to 0$, was aufgrund der Fréchet–Differenzierbarkeit von f in x gilt. Insgesamt erhalten wir dann

$$g(f(x+h)) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)h + r(h)\,,$$

wobei für $r(h) := g'(f(x))\|h\|\, r_2(h) + \big\|f'(x)h + \|h\|\, r_2(h)\big\|\, r_1(k)$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} &\le \big\|g'(f(x))\, r_2(h)\big\| + \frac{\big\|f'(x)h + \|h\|\, r_2(h)\big\|\, \|\, r_1(k)\|}{\|h\|} \\ &\le \big\|g'(f(x))\big\|\, \big\|r_2(h)\big\| + \big(\|f'(x)\| + \|r_2(h)\|\big)\, \|\, r_1(k)\|\,.\end{aligned}$$

Unter Beachtung von $k(h) \to 0$ für $h \to 0$ und $r_1(k) \to 0$ für $k \to 0$ sowie $r_2(h) \to 0$ für $h \to 0$ erhalten wir $r(h) = o(\|h\|)$ für $h \to 0$. Somit ist die Kettenregel bewiesen.

ad (ii): Sei $y \in X$. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned}f(x+y) &= f(x) + f'(x)y + \|y\| r_1(y)\,,\\ g(x+y) &= g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(y)\,,\end{aligned}$$

wobei $r_1(y) \to 0$, $r_2(y) \to 0$ für $y \to 0$. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}h(x+y) - h(x) &= B(f(x+y), g(x+y)) - B(f(x), g(x))\\ &= B\big(f(x) + f'(x)y + \|y\| r_1(y), g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big)\\ &\quad - B(f(x), g(x))\\ &= B(f(x), g'(x)y) + B(f(x), r_2(y))\|y\|\\ &\quad + B(f'(x)y, g(x)) + B\big(f'(x)y, g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big)\\ &\quad + \|y\| B\big(r_1(y), g(x) + g'(x)y + \|y\| r_2(y)\big)\\ &=: B\big(f(x), g'(x)y\big) + B\big(f'(x)y, g(x)\big) + r(y)\,,\end{aligned}$$

wobei die Bilinearität von B benutzt wurde. Aufgrund der Stetigkeit von B und den Eigenschaften von r_1 und r_2 erhalten wir $r(y) = o(\|y\|)$ für $y \to 0$. Es gilt z.B.

$$\big\|B\big(f(x), r_2(y)\big)\big\| \le c\, \|f(x)\|\, \|r_2(y)\| \to 0 \qquad \text{für } y \to 0\,.$$

Somit ist auch die Produktregel bewiesen. ∎

Bemerkungen. (i) Wenn die Funktion f in Behauptung (i) von Satz 2.7 nur Gâteaux–differenzierbar ist, dann ist die Komposition $g \circ f$ auch nur Gâteaux–differenzierbar und es gilt die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \circ f'(x)\,.$$

(ii) Wenn die Funktionen f, g in Behauptung (ii) von Satz 2.7 nur Gâteaux–differenzierbar sind, dann ist auch das Produkt $h = B(f,g)$ nur Gâteaux–differenzierbar und es gilt die Produktregel:

$$h'(x)y = B(f'(x)y, g(x)) + B(f(x), g'(x)y)\,.$$

• **Ableitungen höherer Ordnung:** Für eine Fréchet–differenzierbare Funktion $f\colon D(f) \subseteq X \to Y$ haben wir

$$f'\colon D(f') \subseteq X \to L(X,Y)\,.$$

Höhere Ableitungen erhalten wir, indem wir die Definition 2.4 iterieren, z.B. ist f'' dann eine Abbildung

$$f''\colon D(f'') \subseteq X \to L\big(X, L(X,Y)\big)\,.$$

Wir sehen, dass die Bildräume der Ableitungen eine immer kompliziertere Struktur annehmen. Im weiteren benutzen wir für die ***n*–te Ableitung** folgende Notation:

$$f^{(n)}\colon X \times \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{–mal}} \to Y : (x, h_1, \ldots, h_n) \mapsto f^{(n)}(x, h_1, \ldots, h_n).$$

Wenn $h_i = h$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, dann schreiben wir

$$f^{(n)}(x)h^n := f^{(n)}(x, \underbrace{h, \ldots, h}_{n\text{–mal}})\,.$$

Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt ***n*–mal stetig differenzierbar** im Punkt x_0, falls die n–te Ableitung $f^{(n)}$ in einer Umgebung von x_0 definiert ist und im Punkt x_0 stetig ist. Wir schreiben $f \in C^n(U;Y)$, falls f in jedem Punkt der *offenen* Menge U n–mal stetig differenzierbar ist.

• **Partielle Ableitungen:** Seien X, Y und Z Banachräume. Wir betrachten eine Funktion

$$f\colon X \times Y \to Z : (x, y) \mapsto f(x, y)\,.$$

Wenn wir $y_0 \in Y$ festhalten, ist $F(\cdot) := f(\cdot, y_0)\colon X \to Z$ eine Funktion in einer Variablen $x \in X$. Die **partielle Ableitung** von f nach x ist dann, analog zu den partiellen Ableitungen von Funktionen im $\mathbb{R}^d$, definiert durch:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := F'(x_0)\,.$$

Analog kann man $x_0 \in X$ festhalten und mithilfe von $G(\cdot) := f(x_0, \cdot)\colon Y \to Z$ die partielle Ableitung von f nach y definieren:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := G'(y_0)\,.$$

2.8 Satz (Taylor). *Sei $U \subseteq X$ offen, $f \in C^n(U; Y)$ und $x \in U$. Ferner existiere $f^{(n+1)}(x + th)$ für festes $h \in X$ und für alle $t \in [0, 1]$. Dann gilt:*

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + R_{n+1}(x, h),$$

wobei $\|R_{n+1}(x, h)\| \le \sup\limits_{\tau\in[0,1]} \|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \tau h)h^{n+1}\|$.

Beweis. Für beliebige $y^* \in Y^*$ setzen wir $g(t) = \langle y^*, f(x+th)\rangle\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$. Der Satz von Taylor in $\mathbb{R}$ liefert für ein $t_1 \in [0, 1]$

$$\langle y^*, f(x + th)\rangle = \Big\langle y^*, f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n + R_{n+1}\Big\rangle\,,$$

wobei $R_{n+1}(x, h) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + t_1 h)h^{n+1}$. Die Behauptung folgt nun mithilfe einer Folgerung des Satzes von Hahn–Banach (cf. Lemma A.7.2 (ii)), da $y^* \in Y^*$ beliebig war. ∎

2.2.1 Satz über implizite Funktionen

Unser Ziel ist es, eine Verallgemeinerung des Satzes über implizite Funktionen, den wir für reellwertige Funktionen kennen, zu beweisen.

Für eine Funktion $F\colon X \times Y \to Z$ wollen wir die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ lösen, wobei für (x_0, y_0) gilt $F(x_0, y_0) = 0$. Wir suchen also eine Abbildung $y\colon x \mapsto y(x)$, die in einer Umgebung von x_0 definiert ist, mit

$$\begin{aligned} F(x, y(x)) &= 0\,,\\ y(x_0) &= y_0\,. \end{aligned}$$

2.9 Satz (über implizite Funktionen, Hildebrandt, Graves 1927). *Seien X, Y und Z Banachräume, $U(x_0, y_0) \subseteq X \times Y$ eine offene Umgebung von (x_0, y_0), $F\colon X \times Y \to Z$ sei in $U(x_0, y_0)$ definiert, und es sei $F(x_0, y_0) = 0$. Ferner existiere $\frac{\partial F}{\partial y}$ als Fréchet–Ableitung in $U(x_0, y_0)$, und es sei $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\colon Y \to Z$ ein Homöomorphismus. Außerdem seien F und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in (x_0, y_0) stetig. Dann existieren $r_0, r > 0$ so, dass für alle $x \in X$, mit $\|x - x_0\| \le r_0$, genau ein $y(x) \in Y$ existiert mit*

$$\|y(x) - y_0\| \le r \quad \text{und} \quad F(x, y(x)) = 0\,.$$

Beweis. O.B.d.A. seien $x_0 = y_0 = 0$. Wir setzen

$$g(x, y) := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)y - F(x, y)\,. \tag{2.10}$$

Die Abbildung $g(\cdot,\cdot)$ ist stetig in $(0,0)$, da F in $(0,0)$ stetig ist. Weiterhin ist, für $\|x\|$ klein genug, die Abbildung $g(x,\cdot)$ stetig in einer Umgebung von 0, da $\frac{\partial F}{\partial y}$ als Fréchet–Ableitung in einer Umgebung von $(0,0)$ existiert. Die Gleichung $F(x, y(x)) = 0$ ist äquivalent zu folgender Gleichung:

$$y = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} g(x, y) =: T_x y\,. \tag{2.11}$$

In der Tat ist Gleichung (2.11) nichts anderes als

$$y(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\, y(x) - F(x, y(x))\,,$$

und dies kann man offensichtlich als $F(x, y(x)) = 0$ umschreiben, wobei die Bijektivität von $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ benutzt wird. Für alle $\|x\| \le r_0$ und $\|y\|, \|z\| \le r$, wobei $r, r_0 > 0$ klein genug sind, gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) - \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,,$$

insbesondere haben wir also:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0\,. \tag{2.12}$$

Da F und $\frac{\partial F}{\partial y}$ stetig in $(0,0)$ sind und $\frac{\partial F}{\partial y}$ in einer Umgebung von $(0,0)$ existiert, folgt mit der Taylor–Formel für $n = 0$ und $h = y - z$, sowie aus (2.12):

$$\begin{aligned} \|g(x, y) - g(x, z)\| &\le \sup_{0 \le \tau \le 1} \left\| \frac{\partial g}{\partial y}(x, z + \tau(y - z)) \right\| \|y - z\| \\ &= o(1)\|y - z\|\,, \qquad\qquad r \to 0\,, r_0 \to 0\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dies, zusammen mit der Stetigkeit von g in $(0,0)$ und $g(0,0)=0$, liefert:

$$\begin{aligned} \|g(x,y)\| &\leq \|g(x,y)-g(x,0)\| + \|g(x,0)\| \\ &= o(1)\|y\| + o(1)\,, \qquad\qquad r \to 0, r_0 \to 0\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Wir setzen $B_Y := \{y \in Y \,\big|\, \|y\| \leq r\}$. Aus (2.14) erhalten wir für alle $y \in B_Y$ und alle $x \in \overline{B_{r_0}(0)} = \{x \in X \,\big|\, \|x\| \leq r_0\}$

$$\begin{aligned} \|T_x y\| &\leq \left\| \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\Big)^{-1} \right\| \, \|g(x,y)\| \\ &\leq K\big(o(1)\|y\| + o(1)\big) \\ &\leq r\,, \end{aligned}$$

falls r_0 und r klein genug gewählt wurden. Deshalb bildet T_x die Menge B_Y in sich selbst ab, d.h. es gilt für alle $x \in \overline{B_{r_0}(0)}$:

$$T_x \colon B_Y \to B_Y\,.$$

Mithilfe von (2.13) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|T_x y - T_x z\| &\leq \left\| \Big(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\Big)^{-1} \right\| \, \|g(x,y) - g(x,z)\| \\ &\leq K o(1)\|y-z\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|y-z\|\,, \end{aligned}$$

wobei wir r eventuell noch kleiner wählen, d.h. T_x ist eine k–Kontraktion. Aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes 1.1.5 gilt dann für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq r_0$

$$\exists\,!\, y \in Y \text{ mit } \|y\| \leq r: \quad y = T_x y\,.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass die Gleichung

$$F(x, y(x)) = 0$$

eine eindeutige Lösung $y(x) \in Y$ besitzt. ∎

2.15 Folgerung. *Die Voraussetzungen von Satz 2.9 seien erfüllt. Dann haben wir:*

(i) *Falls die Funktion F in einer Umgebung von (x_0, y_0) stetig ist, dann ist die Funktion $y(\cdot)$ in einer Umgebung von x_0 stetig.*

(ii) *Falls die Funktion F in einer Umgebung von (x_0, y_0) Fréchet–differenzierbar ist, dann ist auch $y(\cdot)$ in einer Umgebung von x_0 Fréchet–differenzierbar, und es gilt:*

$$y'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,.$$

Beweis. O.B.d.A. seien $x_0 = y_0 = 0$.

ad (i): Falls F in einer Umgebung von $(0,0)$ stetig ist, erhalten wir sofort, dass die Abbildung g (cf. (2.10)) in einer Umgebung von $(0,0)$ stetig ist. Aufgrund der Bijektivität von $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ ist somit auch die Abbildung $(x,y) \mapsto T_x y$ in einer Umgebung von $(0,0)$ stetig. Also sind die Voraussetzungen von Folgerung 1.1.12 erfüllt und wir erhalten, dass $y(\cdot)$ in einer Umgebung von 0 stetig ist.

ad (ii): Nach Voraussetzung ist F in allen Punkten $(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$, mit $\tilde{x}$ aus einer genügend kleinen Umgebung von 0, Fréchet–differenzierbar, d.h.

$$\begin{aligned} F(x,y(x)) = F(\tilde{x},y(\tilde{x})) &+ \frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x},y(\tilde{x}))(x-\tilde{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},y(\tilde{x}))(y(x)-y(\tilde{x})) \\ &+ o(\|x-\tilde{x}\| + \|y(x)-y(\tilde{x})\|) \qquad \text{für } (x,y(x)) \to (\tilde{x},y(\tilde{x}))\,. \end{aligned}$$

Wegen $F(\tilde{x},y(\tilde{x})) = 0$ und $F(x,y(x)) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial x}&(\tilde{x},y(\tilde{x}))(x-\tilde{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},y(\tilde{x}))(y(x)-y(\tilde{x})) \\ &+ r(x-\tilde{x}, y(x)-y(\tilde{x}))\big(\|x-\tilde{x}\| + \|y(x)-y(\tilde{x})\|\big)\,, \end{aligned}$$

mit $r(x-\tilde{x}, y(x)-y(\tilde{x})) \to 0$ für $(x,y(x)) \to (\tilde{x},y(\tilde{x}))$. Wenn wir diese Gleichung nach $y(x)-y(\tilde{x})$ auflösen, wobei $\tilde{x}$ fest, aber beliebig, ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} y(x)-y(\tilde{x}) = -&\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},y(\tilde{x}))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x},y(\tilde{x}))(x-\tilde{x})\right) \\ &+ \tilde{r}(x-\tilde{x}, y(x)-y(\tilde{x}))\big(\|x-\tilde{x}\| + \|y(x)-y(\tilde{x})\|\big)\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Da y stetig im Punkt $\tilde{x}$ ist, ergibt sich $y(x) \to y(\tilde{x})$ für $x \to \tilde{x}$. Somit folgt aus (2.16), für genügend kleine $\|x-\tilde{x}\|$,

$$\|y(x)-y(\tilde{x})\| \le K\,\|x-\tilde{x}\| + \tfrac{1}{2}\big(\|x-\tilde{x}\| + \|y(x)-y(\tilde{x})\|\big)\,,$$

mit $K := \left\| \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},y(\tilde{x}))\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x},y(\tilde{x}))\right) \right\|$. Dies impliziert

$$o(\|x-\tilde{x}\| + \|y(x)-y(\tilde{x})\|) = o(\|x-\tilde{x}\|)$$

und wir erhalten insgesamt:

$$y(x) = y(\tilde{x}) - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},y(\tilde{x}))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x},y(\tilde{x}))(x-\tilde{x})\right) + o(\|x-\tilde{x}\|)\,.$$

Also ist y in allen Punkten $\tilde{x}$ aus einer kleinen Umgebung von 0 Fréchet–differenzierbar, und es gilt aufgrund der Definition der Fréchet–Ableitung:

$$y'(\tilde{x}) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},y(\tilde{x}))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\tilde{x},y(\tilde{x}))\right)\,.$$

■

Wenn man die Gleichung

$$f(g(y)) = y$$

nach g auflöst, bestimmt man die Inverse von f, d.h.

$$g(y) = f^{-1}(y)\,.$$

Unter welchen Bedingungen dies möglich ist, zeigt der

2.17 Satz (über die inverse Funktion). *Seien X, Y Banachräume und sei $U(x_0) \subseteq X$ eine offene Umgebung von $x_0 \in X$ und $f\colon U(x_0) \to Y$. Die Fréchet–Ableitung f' existiere in $U(x_0)$, sei im Punkt x_0 stetig und $f'(x_0)\colon X \to Y$ sei ein Homöomorphismus. Dann ist f ein lokaler Homöomorphismus einer Umgebung $V(x_0)$ auf eine Umgebung $W(f(x_0))$, und die inverse Abbildung f^{-1} ist Lipschitz–stetig.*

Beweis. Wir setzen $y_0 := f(x_0)$. Zu $y \in Y$ suchen wir $h \in X$ mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = y - y_0\,.$$

Diese Gleichung ist nach der Definition der Fréchet–Ableitung äquivalent zu

$$f'(x_0)h + R(x_0, h) = y - y_0\,, \tag{2.18}$$

wobei

$$R(x_0, h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(\|h\|)\,.$$

Wir definieren nun die Abbildung $A := A_y\colon B_\varepsilon(0) \subseteq X \to X$ durch

$$Ah := (f'(x_0))^{-1}\,(y - y_0 - R(x_0, h))\,.$$

Die Gleichung (2.18) ist äquivalent zur Fixpunktgleichung

$$Ah = h\,, \tag{2.19}$$

was man sieht, wenn man $\big(f'(x_0)\big)^{-1}$ auf (2.18) anwendet. Dies ist möglich, da $f'(x_0)$ ein Homöomorphismus ist. Zum Beweis der Existenz des Fixpunktes von (2.19) wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz benutzen, und zeigen deshalb zunächst die k–Kontraktivität von A. Für $h_1, h_2 \in B_\varepsilon(0)$ gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x_0)(Ah_1 - Ah_2) &= R(x_0, h_2) - R(x_0, h_1)\\
&= f(x_0 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f'(x_0)(h_2 - h_1)\\
&= \int_0^1 \big(f'(x_0 + \tau h_2 + (1-\tau)h_1) - f'(x_0)\big)(h_2 - h_1)\,d\tau\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Definition von $R(x_0, h)$ und den Mittelwertsatz 2.3 benutzt haben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|Ah_1 - Ah_2\| \\
&\le \| \left(f'(x_0)\right)^{-1} \| \, \|h_1 - h_2\| \int_0^1 \|f'(x_0 + h_1 + \tau(h_2 - h_1)) - f'(x_0)\| \, d\tau \\
&\le k \, \|h_1 - h_2\| \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

mit einem $k \in (0,1)$ für genügend kleines ε, da f' stetig in x_0 ist. Also ist A k–kontraktiv. Weiter gilt für $h \in \overline{B_\varepsilon(0)}$:

$$\begin{aligned}
\|Ah\| &\le \|Ah - A0\| + \|A0\| \\
&\le k \, \|h\| + \| \left(f'(x_0)\right)^{-1} (y - y_0)\| \\
&\le \varepsilon \, ,
\end{aligned}$$

falls $\|y - y_0\|$ klein genug ist, d.h. $A = A_y$ bildet für alle y, mit $\|y - y_0\|$ klein genug, die Menge $\overline{B_\varepsilon(0)}$ in sich selbst ab. Der Banachsche Fixpunktsatz 1.1.5 liefert also für eine kleine Umgebung $W(y_0)$ von y_0:

$$\forall \, y \in W(y_0) \quad \exists ! \, h_0 \in \overline{B_\varepsilon(0)} : \quad A_y h_0 = h_0 \, .$$

Aufgrund obiger Überlegung ist dies äquivalent zu folgender Aussage: Für alle y aus einer Umgebung $W(y_0)$ von y_0 existiert genau ein $h_0 \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ mit

$$f(x_0 + h_0) = y \, ,$$

d.h. die inverse Abbildung $f^{-1} \colon W(y_0) \to V(x_0) \colon y \mapsto x_0 + h_0$ existiert. Weiter können wir zeigen, dass diese Abbildung Lipschitz–stetig ist. Dazu wählen wir $y_1, y_2 \in B_\varepsilon(y_0)$ und bezeichnen mit h_1, h_2 die zugehörigen Lösungen der Gleichung (2.18). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\|h_1 - h_2\| \\
&= \|A_{y_1} h_1 - A_{y_2} h_2\| \\
&\le \|A_{y_1} h_1 - A_{y_1} h_2\| + \|A_{y_1} h_2 - A_{y_2} h_2\| \\
&\le k \, \|h_1 - h_2\| + \| \left(f'(x_0)\right)^{-1} (y_1 - y_0 - R(x_0, h_2) - y_2 + y_0 + R(x_0, h_2))\| \\
&\le k \, \|h_1 - h_2\| + \| \left(f'(x_0)\right)^{-1} (y_1 - y_2)\| \, ,
\end{aligned}$$

wobei wir die k–Kontraktivität von A_{y_1} (cf. (2.20)) und die Definition von A_{y_1} und A_{y_2} benutzt haben. Auflösen nach $\|h_1 - h_2\|$ ergibt:

$$\|h_1 - h_2\| \le \frac{1}{1-k} \, \| \left(f'(x_0)\right)^{-1} \| \, \|y_1 - y_2\| \, .$$

Also haben wir gezeigt, dass

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| = \|h_1 + x_0 - (h_2 + x_0)\| \le K \, \|y_1 - y_2\| \, , \qquad (2.21)$$

d.h. f^{-1} ist Lipschitz–stetig. ∎

2.22 Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.17 ist f^{-1} Fréchet–differenzierbar, und es gilt:*

$$\big(f^{-1}\big)'(y_0) = \big(f'(x_0)\big)^{-1}\,.$$

Beweis. Sei $f(x_0) = y_0$, $f(x_0+h) = y_0 + w$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(y_0+w) - f^{-1}(y_0) - (f'(x_0))^{-1}\, w \\
&= x_0 + h - x_0 - (f'(x_0))^{-1}\, w \\
&= h - \big(f'(x_0)\big)^{-1}(f(x_0+h) - f(x_0)) \\
&= -\big(f'(x_0)\big)^{-1}\big(f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\big) \\
&= o(\|h\|)\,,
\end{aligned}$$

da f an der Stelle x_0 Fréchet–differenzierbar ist. Weiter gilt:

$$\|h\| = \|x_0 + h - x_0\| = \|f^{-1}(y_0+w) - f^{-1}(y_0)\| \le K\,\|w\|\,,$$

wobei K die Lipschitz–Konstante von f^{-1} ist (cf. (2.21)). Somit haben wir

$$f^{-1}(y_0+w) - f^{-1}(y_0) - \big(f'(x_0)\big)^{-1} w = o(\|h\|) = o(\|w\|)\,,$$

d.h. f^{-1} ist an der Stelle y_0 Fréchet–differenzierbar mit der Ableitung $\big(f'(x_0)\big)^{-1}$. ∎

3 Die Theorie monotoner Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir folgendes elementare Resultat verallgemeinern:

Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *erfülle folgende Bedingungen:*

(a) F *ist monoton wachsend,*

(b) F *ist stetig,*

(c) F *ist koerziv, d.h.* $F(u) \to \pm\infty$ *falls* $u \to \pm\infty$.

Dann besitzt die Gleichung

$$F(u) = b$$

für alle $b \in \mathbb{R}$ *eine Lösung* $u \in \mathbb{R}$.

Falls F strikt monoton ist, so ist die Lösung u eindeutig bestimmt. Dieser klassische Existenzsatz folgt aus dem Mittelwertsatz für stetige Funktionen.

Die *Theorie monotoner Operatoren*, die dieses Resultat auf Gleichungen der Form

$$Au = b \tag{0.1}$$

in einem reflexiven Banachraum X verallgemeinert, beruht auf einigen grundlegenden Prinzipien und Tricks, die wir kurz veranschaulichen wollen. Da man sich hierbei leicht in technischen Details verlieren kann, gehen wir vorerst nicht auf diese ein.

Angenommen

(a) *der Operator* $A\colon X \to X^*$ *ist* ***monoton*** *auf dem separablen, reflexiblen Banachraum* X*, d.h. für alle* $u, v \in X$ *gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geq 0\,,$$

(b) A *ist* ***hemistetig****, d.h. die Abbildung*

$$t \to \langle A(u + tv), w \rangle_X$$

ist stetig im Intervall $[0, 1]$*, für alle* $u, v, w \in X$*,*

(c) *A ist* ***koerziv****, d.h.*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_X}{\|u\|_X} = \infty\,,$$

dann besagt der Hauptsatz über monotone Operatoren, dass A surjektiv ist, d.h.

$$\forall\, b \in X^* \quad \exists\, u \in X : \qquad Au = b\,.$$

Der Beweis dieses Resultats besteht im wesentlichen aus folgenden Schritten:

1. *Galerkin–Approximation*: Da X separabel ist, gibt es eine Basis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X, d.h. für $X_n := \operatorname{span}\{w_1, \dots, w_n\}$ gilt:
$$X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n}\,.$$
Wir approximieren (0.1) durch Probleme in den endlich–dimensionalen Räumen X_n, auf welche der Satz von Brouwer anwendbar ist, der die Existenz einer Lösung u_n für jedes dieser Probleme sichert.
2. *Apriori Abschätzung*: Wir zeigen dann, dass die Folge der Lösungen (u_n) beschränkt ist. Dies geschieht auf Grundlage folgenden Arguments: Wenn $A : X \to X^*$ koerziv ist, dann existiert ein $R_0 > 0$, so dass für alle u mit $\|u\|_X > R_0$ gilt:
$$\langle Au, u\rangle_X \geq (1 + \|b\|_{X^*})\|u\|_X\,.$$
Daraus folgt
$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle_X - \langle b, u\rangle_X &\geq (1 + \|b\|_{X^*})\|u\|_X - \|b\|_{X^*}\|u\|_X \\ &\geq \|u\|_X \\ &\geq R_0\,.\end{aligned}$$
Wenn $u \in X$, mit $\|u\|_X > R_0$, eine Lösung von $Au = b$ ist, dann gilt aufgrund dieser Rechnung:
$$0 \geq R_0 > 0\,.$$
Dies ist aber ein Widerspruch. Daher erhalten wir, dass jede Lösung $u \in X$ von $Au = b$ der *apriori Abschätzung*
$$\|u\|_X \leq R_0$$
genügt.
3. *Schwache Konvergenz*: Da X ein reflexiver Banachraum ist, folgt aus dem Satz von Eberlein–Šmuljan (cf. Satz A.8.15), dass es in der beschränkten Folge (u_n) eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}) gibt, d.h.
$$u_{n_k} \rightharpoonup u \ \text{ in } X \quad (k \to \infty)\,.$$
4. *Existenz einer Lösung*: Der so gefundene Grenzwert u ist eine Lösung der Gleichung $Au = b$. Diese Aussage beweisen wir mithilfe des *Minty–Tricks*.

0.2 Lemma (Minty 1962). *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein hemistetiger, monotoner Operator. Dann gilt:*

(i) *Der Operator A ist maximal monoton, d.h. seien $u \in X$, $b \in X^*$ gegeben, so dass*
$$\langle b - Av, u - v\rangle_X \geq 0 \qquad \forall\, v \in X\,,$$
dann folgt $Au = b$.

(ii) *A genügt der Bedingung (M), d.h. aus*
$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X && (n \to \infty)\,,\\ Au_n &\rightharpoonup b && \text{in } X^* && (n \to \infty)\,,\\ \langle Au_n, u_n\rangle_X &\to \langle b, u\rangle_X && && (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$
folgt $Au = b$.

(iii) *Aus*
$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ in } X\,, \quad Au_n \to b \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,,$$
oder alternativ
$$u_n \to u \ \text{ in } X\,, \quad Au_n \rightharpoonup b \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)$$
folgt $Au = b$.

Beweis. ad (i): Seien $u \in X$ und $b \in X^*$ gegeben, so dass die obige Annahme erfüllt ist. Für beliebige $w \in X$ setzen wir $v = u - tw$, $t > 0$, und erhalten aufgrund der Voraussetzung folgende Implikation:
$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \langle b - A(u - tw), w\rangle \geq 0\,.$$
Da A hemistetig ist, folgt durch den Grenzübergang $t \to 0$, dass für alle $w \in X$ gilt:
$$\langle b - Au, w\rangle \geq 0\,.$$
Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten die umgekehrte Ungleichung. Insgesamt gilt also $\langle b - Au, w\rangle = 0$ für alle $w \in X$, d.h. $b = Au$.

ad (ii): Da A monoton ist, folgt für alle $v \in X$, $n \in \mathbb{N}$
$$0 \leq \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle - \langle Au_n - Av, v\rangle\,.$$
Aufgrund der Voraussetzungen erhalten wir nach dem Grenzübergang $n \to \infty$ für alle $v \in X$
$$0 \leq \langle b, u\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle b - Av, v\rangle = \langle b - Av, u - v\rangle\,.$$
Da aber A aufgrund von (i) maximal monoton ist, folgt $Au = b$.

ad (iii): Die Behauptung ist eine Konsequenz von (ii), wenn wir wissen, dass aus

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } X\,, \qquad f_n \to f \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)$$

bzw.

$$x_n \to x \text{ in } X\,, \qquad f_n \rightharpoonup f \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)$$

folgt, dass

$$\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad (n \to \infty)\,.$$

Unter unseren Voraussetzungen folgt dann $\langle Au_n, u_n \rangle \to \langle b, u \rangle$ $(n \to \infty)$. Die Behauptungen (ii) und (iii) des folgenden Lemmas liefert aber diese Aussagen. ■

0.3 Lemma (Konvergenzprinzipien). *Sei X ein Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Wenn $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X, $(n \to \infty)$, dann gibt es ein Konstante c, so dass $\|x_n\|_X \le c$.*

(ii) *Wenn*

$$\begin{aligned} x_n &\rightharpoonup x \quad \text{in } X \qquad (n \to \infty)\,,\\ f_n &\to f \quad \text{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X \quad (n \to \infty)\,.$$

(iii) *Wenn*

$$\begin{aligned} x_n &\to x \quad \text{in } X \qquad (n \to \infty)\,,\\ f_n &\rightharpoonup f \quad \text{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

dann folgt

$$\langle f_n, x_n \rangle_X \to \langle f, x \rangle_X \quad (n \to \infty)\,.$$

(iv) *Sei X zusätzlich reflexiv. Die Folge (x_n) sei beschränkt. Wenn alle konvergenten Teilfolgen von (x_n) schwach gegen denselben Grenzwert x konvergieren, dann konvergiert die gesamte Folge (x_n) schwach gegen x.*

Beweis. ad (i): Dies ist eine Konsequenz des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit. Für alle $f \in X^*$ ist die Folge $\big(\langle f, x_n \rangle\big)$ beschränkt, da aufgrund der schwachen Konvergenz von (x_n) die Folge reeller Zahlen $\langle f, x_n \rangle$ gegen $\langle f, x \rangle$ konvergiert. Somit haben wir

$$\sup_n |\langle f, x_n \rangle| \le c(f)\,. \tag{0.4}$$

Mithilfe der *kanonische Isometrie* $J\colon X \to X^{**}$, die gegeben ist durch (cf. Abschnitt A.7)

$$\langle Jx, f \rangle_{X^{**}} = \langle f, x \rangle_X\,,$$

folgt somit aus (0.4), dass die Folge $(Jx_n) \subset X^{**}$ punktweise beschränkt ist.

Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (cf. Satz A.10.6) liefert also

$$\sup_n \|Jx_n\|_{X^{**}} \le c\,,$$

da aber $\|Jx_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X$ gilt, ist die Behauptung bewiesen.

ad (ii): Es gilt:

$$\begin{aligned}|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\le |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle|\\ &= |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle|\\ &\le \|f_n - f\|\, \|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle|\,.\end{aligned}$$

Nun haben wir aufgrund der Voraussetzungen $\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$, $|\langle f, x_n - x\rangle| \to 0$ $(n \to \infty)$, sowie $\|x_n\| \le c$ nach (i). Demzufolge erhalten wir $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$ $(n \to \infty)$.

ad (iii): Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Behauptung (ii).

ad (iv): Beweis durch Widerspruch. Konvergiere (x_n) nicht schwach gegen x, d.h.

$$\exists\, f \in X^*,\ \exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, (x_{n_k}): \quad |\langle f, x_{n_k}\rangle - \langle f, x\rangle| \ge \varepsilon \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Nach Voraussetzung ist die Teilfolge (x_{n_k}) beschränkt. Daher gibt es nach dem Satz von Eberlein–Šmuljan (cf. Satz A.8.15) eine Teilfolge $(x_{n_{k'}})$, die schwach konvergiert und zwar nach Voraussetzung gegen x. Dies ist ein Widerspruch. Also gilt die Behauptung. ■

3.1 Monotone Operatoren

1.1 Definition. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und sei*

$$A\colon X \to X^* \tag{1.2}$$

ein Operator. Dann heißt A

(i) **monoton** *genau dann, wenn für alle $u, v \in X$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \ge 0\,.$$

(ii) **strikt monoton** *genau dann, wenn für alle $u, v \in X, u \ne v$ gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X > 0\,.$$

(iii) **stark monoton** *genau dann, wenn es ein* $c > 0$ *gibt, so dass für alle* $u, v \in X$ *gilt:*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_X \geq c\,\|u - v\|_X^2 \,.$$

(iv) **koerziv** *genau dann, wenn*

$$\lim_{\|u\|_X \to \infty} \frac{\langle Au, u\rangle_X}{\|u\|_X} = \infty \,.$$

Bemerkungen. (i) Offensichtlich gelten folgende Implikationen:

A ist stark monoton $\Rightarrow$ A ist strikt monoton $\Rightarrow$ A ist monoton.

(ii) Wenn A stark monoton ist, dann ist A auch koerziv. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}\langle Au, u\rangle &= \langle Au - A(0), u\rangle + \langle A(0), u\rangle \\ &\geq c\,\|u\|^2 - \|A(0)\|_{X^*}\,\|u\| \,,\end{aligned}$$

also folgt

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \geq c\,\|u\| - \|A(0)\|_{X^*} \to \infty \qquad \text{für } \|u\| \to \infty \,.$$

Beispiele. 1. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktion f als Operator von X nach X^* mit $X = \mathbb{R} = X^*$. In $\mathbb{R}$ ist das Dualitätsprodukt gerade die Multiplikation, d.h.

$$\langle f(u) - f(v), u - v\rangle = \big(f(u) - f(v)\big)(u - v) \,.$$

Somit gelten folgende Aussagen:

(i) $f : X \to X^*$ (strikt) monoton $\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (strikt) monoton.

(ii) f koerziv $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{u \to \pm\infty} f(u) = \pm\infty$.

2. Wir betrachten nun die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(u) = \begin{cases} |u|^{p-2}u & \text{für } u \neq 0 \,, \\ 0 & \text{für } u = 0 \,. \end{cases}$$

Dann gilt:

(i) Für $p > 1$ ist g strikt monoton.

(ii) Für $p \geq 2$ gilt:

$$\langle g(u) - g(v), u - v\rangle \geq c\,|u - v|^p \,.$$

(iii) Für $p = 2$ ist g stark monoton.

1.3 Definition. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A\colon X \to X^*$ ein Operator. Dann heißt A*

(i) ***demistetig*** *genau dann, wenn*

$$u_n \to u \;\text{ in } X \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad Au_n \rightharpoonup Au \;\text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,.$$

(ii) ***hemistetig*** *genau dann, wenn für alle $u, v, w \in X$ die Funktion*

$$t \to \langle A(u + tv), w \rangle_X$$

im Intervall $[0, 1]$ stetig ist.

(iii) ***stark stetig*** *genau dann, wenn*

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ in } X \quad (n \to \infty) \qquad \Rightarrow \qquad Au_n \to Au \;\text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,.$$

(iv) ***beschränkt*** *genau dann, wenn A beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in X^* abbildet.*

Bemerkung. Offensichtlich gelten folgende Implikationen:

$$A \text{ ist stark stetig } \Rightarrow\; A \text{ ist demistetig } \Rightarrow\; A \text{ ist hemistetig.}$$

Wir wollen nun weitere einfache Konsequenzen obiger Definitionen beweisen.

1.4 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein Operator. Dann gilt:*

(i) *Falls A stark stetig ist, so ist A kompakt.*

(ii) *Falls A demistetig ist, so ist A lokal beschränkt.*

(iii) *Falls A monoton ist, so ist A lokal beschränkt.*

(iv) *Falls A monoton und hemistetig ist, so ist A demistetig.*

Beweis. ad (i): Wir wollen zeigen, dass für alle beschränkten Teilmengen $M \subseteq X$ die Bildmenge $A(M)$ relativ folgenkompakt ist. Sei also (Au_n) eine beliebige Folge aus $A(M)$. Da M beschränkt ist, ist somit auch (u_n) beschränkt. Aufgrund der Reflexivität des Raumes X existiert eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}), d.h. $u_{n_k} \rightharpoonup u \in X$ $(k \to \infty)$. Daraus folgt $Au_{n_k} \to Au$ $(k \to \infty)$, da A stark stetig ist. Also ist $A(M)$ relativ folgenkompakt, was in Banachräumen äquivalent zur relativen Kompaktheit der Menge $A(M)$ ist (cf. Satz A.2.1).

ad (ii): Beweis durch Widerspruch: Sei A nicht lokal beschränkt, d.h. es gibt ein $u \in X$ und eine Folge (u_n) in X mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, so dass $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Da A demistetig ist, folgt $Au_n \rightharpoonup Au$ in X^* $(n \to \infty)$. Aufgrund von Lemma 0.3 (i) ist (Au_n) beschränkt. Dies ist aber ein Widerspruch. Also ist A lokal beschränkt.

ad (iii): Beweis durch Widerspruch: Sei A nicht lokal beschränkt, dann gibt es ein $u \in X$ und eine Folge $(u_n) \subset X$ mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, so dass $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$. Wir setzen

$$a_n := (1 + \|Au_n\|\, \|u_n - u\|)^{-1} .$$

Die Monotonie von A liefert, dass für alle $v \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\le \big\langle Au_n - Av, u_n - v \big\rangle \\ &= \big\langle Au_n - Av, (u_n - u) + (u - v) \big\rangle . \end{aligned}$$

Mit obiger Bezeichnung ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} a_n \langle Au_n, v - u\rangle &\le a_n \big(\langle Au_n, u_n - u\rangle - \langle Av, u_n - v\rangle\big) \\ &\le a_n \Big(\|Au_n\|_{X^*} \|u_n - u\| + \|Av\|_{X^*} \big(\|u_n\| + \|v\|\big)\Big) \\ &\le 1 + c(v,u) , \end{aligned}$$

wobei wir die Definition von a_n benutzt haben und dass nach Voraussetzung $\|u_n - u\| \le 1$, $n \ge n_0$. Wenn wir in dieser Rechnung v durch $2u - v$ ersetzen, erhalten wir auch

$$-a_n \langle Au_n, v - u\rangle \le 1 + c(v,u) .$$

Da $v \in X$ beliebig ist, ist auch $w := v - u$ ein beliebiger Punkt von X und wir erhalten für alle $w \in X$

$$\sup_n |\langle a_n Au_n, w\rangle| \le \tilde{c}(w,u) < \infty .$$

Die stetigen, linearen Abbildungen $a_n Au_n \colon X \to \mathbb{R}$ sind nach obiger Rechnung punktweise beschränkt. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (cf. Satz A.10.6) liefert also

$$\sup_n \|a_n Au_n\|_{X^*} \le c(u) .$$

Wenn wir nun $b_n = \|Au_n\|_{X^*}$ setzen, erhalten wir aufgrund der Definition von a_n

$$b_n \le \frac{c(u)}{a_n} = c(u) \cdot \big(1 + b_n \|u_n - u\|\big) \quad \Leftrightarrow \quad b_n \le \frac{c(u)}{1 - c(u)\, \|u_n - u\|} .$$

Wegen $\|u_n - u\| \to 0$ $(n \to \infty)$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge n_1, n_0$ gilt:

$$\|Au_n\|_{X^*} = b_n \le 2\, c(u) .$$

Somit ist die Folge (b_n) beschränkt, was ein Widerspruch zur Annahme $\|Au_n\|_{X^*} \to \infty$ $(n \to \infty)$ ist. Also gilt die Behauptung.

ad (iv): Sei (u_n) eine Folge in X mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Da A monoton ist, ist (Au_n) nach (iii) lokal beschränkt. Aufgrund der Reflexivität von X gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) und ein Element $b \in X^*$, so dass $Au_{n_k} \rightharpoonup b$ $(k \to \infty)$. Nach Lemma 0.2 (iii) erhalten wir somit $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$ $(k \to \infty)$. Aber alle schwach konvergenten Teilfolgen von (Au_n) konvergieren schwach gegen Au, denn sonst gäbe es eine Teilfolge mit $Au_{n_l} \rightharpoonup c \neq b$, $(l \to \infty)$. Lemma 0.2 (iii) impliziert wiederum $Au = c$, was ein Widerspruch zu $Au = b$ ist. Somit liefert Lemma 0.3 (iii), dass die gesamte Folge (Au_n) schwach gegen $b = Au$ konvergiert, d.h. A ist demistetig. ■

3.1.1 Der Satz von Browder und Minty

Wir haben nun alle Hilfsmittel bereitgestellt, um den *Hauptsatz* der Theorie monotoner Operatoren beweisen zu können.

1.5 Satz (Browder, Minty 1963). *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum mit einer Basis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $A\colon X \to X^*$ ein monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b\,. \tag{1.6}$$

Die Lösungsmenge ist abgeschlossen, beschränkt und konvex. Falls A strikt monoton ist, ist die Lösung von (1.6) *eindeutig.*

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Hilfe des *Galerkin Verfahrens*: Dazu setzen wir

$$X_n = \operatorname{span}\{w_1, \ldots, w_n\}$$

und suchen *approximative Lösungen* u_n der Form

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k\,, \tag{1.7}$$

die das *Galerkin–System*

$$\langle Au_n - b, w_k\rangle = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,, \tag{1.8}$$

lösen.

1. Lösbarkeit von (1.8): Dies ist ein nichtlineares System von Gleichungen bezüglich der Vektoren $\mathbf{c}^n := (c_1^n, \ldots, c_n^n) \in \mathbb{R}^n$. Dieses können wir mithilfe der Abbildung $\mathbf{g} := (g_1, \ldots, g_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$g_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon \mathbf{c}^n \mapsto g_k(\mathbf{c}^n) := \langle Au_n - b, w_k\rangle\,, \qquad k = 1, \ldots, n\,,$$

umschreiben in

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}^n) = \mathbf{0}\,.$$

Nach Lemma 1.4 (iv) ist A demistetig, da A monoton und hemistetig ist. Also ist die Abbildung $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, da in endlich–dimensionalen Banachräumen schwache und starke Konvergenz übereinstimmen (cf. Lemma A.8.8). Weiter gilt

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{c}^n)\, c_k^n = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle b, u_n\rangle\,. \tag{1.9}$$

Da A koerziv ist, d.h. $\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|} \to \infty$ ($\|u\| \to \infty$), gibt es ein $R_0 > 0$, so dass für alle $\|u\| \geq R_0$ gilt:

$$\langle Au, u\rangle \geq \big(1 + \|b\|_{X^*}\big)\|u\| > 0\,.$$

Insbesondere gilt für $\mathbf{c}^n$ mit $\|u_n\| = R_0$ (cf. (1.7))

$$\langle Au_n, u_n\rangle \geq \big(1 + \|b\|_{X^*}\big)\,\|u_n\|\,, \tag{1.10}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} g_k(\mathbf{c}^n)\, c_k^n &\geq \big(1 + \|b\|_{X^*}\big)\|u_n\| - \|b\|_{X^*}\,\|u_n\| \\ &= \|u_n\| > 0\,.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Nach Lemma 1.2.26, einer Folgerung aus dem Satz von Brouwer, gibt es also eine Lösung u_n des Galerkin–Systems (1.8) mit

$$\|u_n\|_X \leq R_0\,. \tag{1.12}$$

Insbesondere ist die Konstante R_0 unabhängig von n, d.h. (1.12) ist eine *apriori Abschätzung.*

2. Beschränktheit von (Au_n): Da A monoton ist, folgt aus Lemma 1.4 (iii), dass A lokal beschränkt ist, d.h.

$$\exists\, r, \delta > 0: \qquad \|v\| \leq r \quad \Rightarrow \quad \|Av\|_{X^*} \leq \delta\,. \tag{1.13}$$

Aufgrund der Monotonie von A gilt für alle $v \in X$:

$$\langle Au_n - Av, u_n - v\rangle \geq 0\,. \tag{1.14}$$

Da u_n das System (1.8) löst, d.h. es gilt insbesondere $\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$, erhalten wir mithilfe von (1.12) für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle Au_n, u_n\rangle| \leq \|b\|_{X^*}\,\|u_n\| \leq \|b\|_{X^*}\, R_0\,. \tag{1.15}$$

Eine Variante der Definition der Norm in X^* liefert zusammen mit (1.14), (1.13), (1.15) und (1.12)

$$
\begin{aligned}
\|Au_n\|_{X^*} &= \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=r}} \tfrac{1}{r}\langle Au_n, v\rangle \\
&\le \sup_{\substack{v\in X\\ \|v\|=r}} \tfrac{1}{r}\big(\langle Av, v\rangle + \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle\big) \\
&\le \tfrac{1}{r}(\delta r + \|b\|_{X^*} R_0 + \delta R_0) < \infty\,.
\end{aligned}
$$

Also ist die Folge (Au_n) beschränkt.

3. Konvergenz des Galerkin–Verfahrens: Da X reflexiv ist und die Folge (u_n) beschränkt ist, wie in (1.12) gezeigt wurde, gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \ \text{ in } X \qquad (k \to \infty)\,.$$

Für alle $w \in \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} X_l$ gibt es ein n_0 mit $w \in X_{n_0}$. Da u_n eine Lösung von (1.8) ist, erhalten wir für alle $n \ge n_0$

$$\langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle\,,$$

woraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, w\rangle = \langle b, w\rangle \qquad\qquad \forall w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l\,. \tag{1.16}$$

Aufgrund von 2. ist die Folge (Au_n) beschränkt in X^*. Da auch X^* reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge (Au_{n_k}) mit

$$Au_{n_k} \rightharpoonup c \ \text{ in } X^* \qquad (k \to \infty)\,.$$

Aber es muss $c = b$ gelten. Anderenfalls würde für $w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ einerseits $\langle Au_n, w\rangle \to \langle b, w\rangle$ $(n \to \infty)$ gelten, aufgrund von (1.16), und andererseits $\langle Au_n, w\rangle \to \langle c, w\rangle$ $(n \to \infty)$, aufgrund der Definition der schwachen Konvergenz in X^*. Dies bedeutet, dass für alle $w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ gilt $\langle c - b, w\rangle = 0$. Da $\bigcup_{l=1}^{\infty} X_l$ dicht in X liegt, liefert Lemma A.7.2 (iii), dass $b = c$ gilt, und somit $Au_{n_k} \rightharpoonup b$ $(k \to \infty)$. Da diese Argumentation für alle schwach konvergenten Teilfolgen gilt, erhalten wir aus dem Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iii)

$$Au_n \rightharpoonup b \ \text{ in } X^* \qquad (n \to \infty)\,.$$

Da u_n eine Lösung von (1.8) ist, gilt insbesondere $\langle Au_n, u_n\rangle = \langle b, u_n\rangle$, woraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle b, u_n\rangle = \langle b, u\rangle\,.$$

Die Voraussetzungen des Minty–Tricks, Lemma 0.2 (ii), sind demnach erfüllt, und wir erhalten $Au = b$, d.h. u ist eine Lösung der ursprünglichen Operatorgleichung (1.6).

4. Eigenschaften der Lösungsmenge: Für gegebenes $b \in X^*$ setzen wir $S = \{u \in X \,\big|\, Au = b\}$. Dann hat S folgende Eigenschaften:

(a) $S \neq \emptyset$: Das wurde gerade bewiesen.

(b) S ist beschränkt: Dies folgt aus der Koerzivität von A. Falls S nicht beschränkt wäre, dann gäbe es für alle $R > 0$ ein $u \in S$ mit $\|u\| \geq R > 0$. Aber analog zu 2. haben wir (cf. (1.9), (1.11))

$$0 = \langle Au, u \rangle - \langle b, u \rangle \geq \|u\| > 0 .$$

Dies ist aber ein Widerspruch, und somit gibt es ein $R_0 > 0$, so dass für alle $u \in S$ gilt $\|u\| \leq R_0$.

(c) S ist konvex: Seien $u_1,\, u_2 \in S$, d.h. $Au_i = b$ für $i = 1, 2$. Für die Konvexkombination $w = tu_1 + (1-t)u_2$, $0 \leq t \leq 1$, und beliebige $v \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle b - Av, w - v \rangle &= \langle b - Av, tu_1 + (1-t)u_2 - (t+1-t)v \rangle \\ &= \langle b - Av, t(u_1 - v) \rangle + \langle b - Av, (1-t)(u_2 - v) \rangle \\ &= t\langle Au_1 - Av, u_1 - v \rangle + (1-t)\langle Au_2 - Av, u_2 - v \rangle \\ &\geq 0 , \end{aligned}$$

aufgrund der Monotonie von A. Anwendung von Lemma 0.2 (i) liefert $Aw = b$, d.h. $w \in S$. Also ist S konvex.

(d) S ist abgeschlossen: Für eine Folge $(u_n) \subseteq S$, d.h. $Au_n = b$, mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, und für alle $v \in X$ haben wir:

$$\begin{aligned} \langle b - Av, u - v \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle b - Av, u_n - v \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle Au_n - Av, u_n - v \rangle \geq 0 , \end{aligned}$$

aufgrund der Monotonie von A. Aus Lemma 0.2 (i) folgt $Au = b$, d.h. $u \in S$.

5. Eindeutigkeit: Sei A strikt monoton. Falls es zwei Lösungen $u \neq v$ von (1.6) gibt, dann haben wir einerseits $Au = b = Av$ und andererseits folgt aus der strikten Monotonie von A

$$0 < \langle Au - Av, u - v \rangle = \langle b - b, u - v \rangle = 0 .$$

Dies ist ein Widerspruch. Also kann die Gleichung höchstens eine Lösung haben. ■

Bemerkung. Die Behauptungen des Satzes 1.5 bleiben auch in nicht separablen Räumen richtig (cf. [25, S. 560–561]).

1.17 Folgerung. *Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum und sei $A\colon X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Dann existiert der Operator $A^{-1}\colon X^* \to X$ und ist strikt monoton und demistetig.*

Beweis. Der Beweis dieser einfachen Aussage bleibt dem Leser überlassen. ■

3.1.2 Der Nemyckii–Operator

Um den Satz 1.5 von Browder und Minty auf Differentialgleichungen anwenden zu können, benötigen wir den so genannten **Nemyckii–Operator**

$$(F\mathbf{u})(x) := f(x, \mathbf{u}(x))\,, \tag{1.18}$$

wobei $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$, $\mathbf{u}\colon G \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$, mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$. Bezüglich $f\colon G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ machen wir folgende Annahmen:

(i) *Carathéodory–Bedingung*:

$$\begin{aligned} f(\cdot, \boldsymbol{\eta})\colon x \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) \qquad & \text{ist messbar auf } G \text{ für alle } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^n, \\ f(x, \cdot)\colon \boldsymbol{\eta} \mapsto f(x, \boldsymbol{\eta}) \qquad & \text{ist stetig auf } \mathbb{R}^n \text{ für fast alle } x \in G. \end{aligned}$$

(ii) *Wachstumsbedingung*:

$$|f(x, \boldsymbol{\eta})| \le |a(x)| + b \sum_{i=1}^n |\eta^i|^{p_i/q}\,,$$

wobei $b > 0$ eine Konstante ist und $a \in L^q(G)\,,\ 1 \le p_i, q < \infty$, $i = 1, \dots, n$.

1.19 Lemma. *Unter den obigen Annahmen an die Funktion f und die Menge G, ist der in* (1.18) *definierte Nemyckii–Operator*

$$F\colon \prod_{i=1}^n L^{p_i}(G) \to L^q(G)$$

stetig und beschränkt. Es gilt für alle $\mathbf{u} \in \prod_{i=1}^n L^{p_i}(G)$ die Abschätzung

$$\|F\mathbf{u}\|_{L^q(G)} \le c\Big(\|a\|_{L^q(G)} + \sum_{i=1}^n \|u^i\|_{L^{p_i}(G)}^{p_i/q}\Big). \tag{1.20}$$

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $n = 1, u = u_1, p = p_1$. Der allgemeine Fall folgt analog.

1. Messbarkeit von Fu: Da $u \in L^p(G)$, ist die Funktion $x \mapsto u(x)$ Lebesgue–messbar auf G. Also gibt es eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen mit

$$u_n \to u \ \text{ fast überall in } G \qquad (n \to \infty)\,.$$

Daher gilt für fast alle $x \in G$

$$(Fu)(x) = f(x, u(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x, u_n(x))\,,$$

da f, aufgrund der Carathéodory–Bedingung (i), stetig in der zweiten Variablen η ist. Da (u_n) Treppenfunktionen sind, haben wir

$$f(x,u_n(x)) = f\big(x, \sum_{j=0}^{M(n)} c_j^n \chi_{G_j^n}(x)\big) = \sum_{j=0}^{M(n)} f(x,c_j^n)\chi_{G_j^n}(x)\,,$$

mit $c_0^n = 0$ und $G_0^n = G \setminus \bigcup_{i=1}^{M(n)} G_i^n$. Somit ist $f(x,u_n(x))$ messbar, da sowohl die Funktionen $f(x,c_j^n)$ als auch die charakteristischen Funktionen $\chi_{G_j^n}$ messbar sind. Weiterhin ist der Grenzwert messbarer Funktionen messbar und demnach auch Fu.

2. Beschränktheit von F: Es gilt für alle $u \in L^p(G)$:

$$\begin{aligned}
\|Fu\|_{L^q}^q &= \int_G \big|f(x,u(x))\big|^q\,dx \\
&\le \int_G \big(|a(x)| + b|u(x)|^{p/q}\big)^q\,dx \\
&\le C\int_G |a(x)|^q + b^q|u(x)|^p\,dx = C\big(\|a\|_{L^q}^q + \|u\|_{L^p}^p\big),
\end{aligned}$$

wobei die Wachstumsbedingung (ii) benutzt wurde und folgende Ungleichung, die für $0 < r < \infty$, $\xi_1, \dots, \xi_M \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$c\sum_{i=1}^M \xi_i^r \le \Big(\sum_{i=1}^M \xi_i\Big)^r \le C\sum_{i=1}^M \xi_i^r\,. \tag{1.21}$$

In der Tat ist (1.21) für $1 \le r < \infty$ nichts anderes ist als die Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^M$. Für $0 < r < 1$ zeigt man leicht, dass für die Funktion $g(s) = \frac{(1+s)^r}{1+s^r}$ gilt: $2^{r-1} \le \min_{s\in[0,\infty)} g(s) \le \max_{s\in[0,\infty)} g(s) \le 1$. Daraus folgt leicht die Behauptung. Also ist F beschränkt und erfüllt die Abschätzung (1.20).

3. Stetigkeit von $F\colon L^p(G) \to L^q(G)$: Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \to u$ in $L^p(G)$ $(n \to \infty)$. Demzufolge gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \to u$ $(k \to \infty)$, fast überall in G (cf. Satz A.11.12) und es gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x,u_{n_k}(x)) - f(x,u(x))|^q &\le C\big(|f(x,u_{n_k}(x))|^q + |f(x,u(x))|^q\big) \\
&\le C\big(|a(x)|^q + b^q|u_{n_k}(x)|^p + |f(x,u(x))|^q\big) \\
&=: h_{n_k}(x)\,,
\end{aligned}$$

wobei die Wachstumsbedingung (ii) benutzt wurde. Nach Integration über G erhalten wir

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|_{L^q}^q \le \int_G h_{n_k}\,dx\,.$$

Auf der rechten Seite der Ungleichung stehen als Integranden eine Folge von Funktionen h_{n_k} aus $L^1(G)$ mit

$$\begin{aligned} h_{n_k}(x) &\to h(x) && \text{fast überall in } G \quad (k \to \infty)\,, \\ \int_G h_{n_k}(x)\,dx &\to \int_G h(x)\,dx && (k \to \infty)\,, \end{aligned}$$

da $u_n \to u$ in $L^p(G)$ $(n \to \infty)$, also $\|u_n\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$ $(n \to \infty)$. Außerdem gilt $(Fu_{n_k})(x) \to (Fu)(x)$ $(k \to \infty)$ für fast alle $x \in G$, da aufgrund der Carathéodory–Bedingung (i) f stetig in der zweiten Variablen η ist. Daher ist der verallgemeinerte Satz von der majorisierte Konvergenz (cf. Satz A.11.11) anwendbar, und demzufolge gilt:

$$\|Fu_{n_k} - Fu\|_{L^q}^q \to 0 \qquad (k \to \infty)\,.$$

Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iii) liefert nun $Fu_n \to Fu$ in $L^q(G)$ $(n \to \infty)$, da die Argumentation für jede beliebige konvergente Teilfolge gilt. ■

3.1.3 Quasilineare elliptische Gleichungen

Als Anwendung des Satzes von Browder und Minty und des Nemyckii–Operators betrachten wir folgendes *Randwertproblem* für eine *quasilineare elliptische* Gleichung:

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + s\,u = f \qquad & \text{in } \Omega\,, \\ u = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Dabei sei $1 < p < \infty\,, \Omega$ ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und $s \geq 0$. Der kanonische Raum X für die Untersuchung von (1.22) ist der Sobolevraum $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Die *schwache Formulierung* von Problem (1.22) lautet: Für gegebenes $f \in (L^p(\Omega))^*$ suchen wir $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + s\,u\,\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx\,, \qquad \forall \varphi \in X\,. \tag{1.23}$$

Deshalb definieren wir einen Operator A durch

$$\langle Au, \varphi\rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi + s\,u\,\varphi\,dx\,, \qquad \forall\, u, \varphi \in X\,, \tag{1.24}$$

und ein Funktional b durch

$$\langle b, \varphi\rangle := \int_\Omega f\varphi\,dx\,, \qquad \forall\,\varphi \in X\,. \tag{1.25}$$

Hierbei steht $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für das Dualitätsprodukt in X.

1.26 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Ferner sei $f \in L^{p'}(\Omega)\,, p' = \frac{p}{p-1}$, $p > 1$ und $s \geq 0$. Für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ bildet der in* (1.24) *definierte Operator A den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum ab, d.h. $A\colon X \to X^*$ und A ist beschränkt. Das in* (1.25) *definierte Funktional b ist ein Element von X^*. Ferner ist die schwache Formulierung* (1.23) *äquivalent zur Operatorgleichung in X^**

$$Au = b\,. \tag{1.27}$$

Beweis. Wir setzen $X := W_0^{1,p}(\Omega)$ und $\|u\|_X := \|\nabla u\|_{L^p}$. Aufgrund der „Nullrandbedingungen“ ist diese Norm äquivalent zur üblichen $W_0^{1,p}(\Omega)$–Norm $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \big(\int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p dx\big)^{\frac{1}{p}}$ (cf. (A.12.26)).

1. $A : X \to X^*$: Es gilt für $u, \varphi \in X$

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi\rangle| &\leq \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla\varphi|\, dx + s \int\limits_\Omega |u\varphi|\, dx \\
&\leq \Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^{(p-1)p'}\, dx\Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int\limits_\Omega |\nabla\varphi|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + s\Big(\int\limits_\Omega |u|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int\limits_\Omega |\varphi|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\, \|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Hölder–Ungleichung und $p' = \frac{p}{p-1}$ benutzt haben. Für $1 \leq p < d$ haben wir die Einbettung $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ mit $q \leq \frac{dp}{d-p}$ (cf. Satz A.12.23 (i)). Insbesondere gilt also $X \hookrightarrow L^2(\Omega)$, falls $2 \leq \frac{dp}{d-p} \Leftrightarrow p \geq \frac{2d}{d+2}$. Falls $p \geq d$ ist, verwenden wir die Einbettungen $X \hookrightarrow W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, die für alle $q < \infty$ gilt (cf. Satz A.12.23 (ii)). Also erhalten wir, dass für $p \geq \frac{2d}{d+2}$ und alle $\varphi \in X$ gilt:

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq C_1 \|\varphi\|_X = C_1 \|\nabla\varphi\|_{L^p}\,.$$

Insgesamt ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
|\langle Au, \varphi\rangle| &\leq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\
&\leq C(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p}) \|\nabla\varphi\|_{L^p}\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der Norm von Au in X^* haben wir

$$\|Au\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\leq 1}} |\langle Au, \varphi\rangle| \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} + s\|\nabla u\|_{L^p}\right),$$

und somit ist $Au \in X^*$ sowie $A\colon X \to X^*$, sofern $p \geq \frac{2d}{d+2}$. Aus der letzten Ungleichung sehen wir sofort, dass der Operator A beschränkt ist.

2. Mithilfe der Hölder–Ungleichung und der Definition der dualen Norm ergibt sich

$$\begin{aligned}\|b\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle b,\varphi\rangle| \le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \|f\|_{L^{p'}}\|\varphi\|_{L^p}\\ &\le C\,\|f\|_{L^{p'}}\,,\end{aligned}$$

für $p \ge 1$, da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, d.h. $\|\varphi\|_{L^p} \le C\,\|\varphi\|_X$.

3. Aus den Schritten 1 und 2, sowie den Definitionen von A und b folgt, dass die schwache Formulierung von (1.23) gerade

$$\langle Au,\varphi\rangle = \langle b,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi\in X$$

ist. Dies ist aber die Operatorgleichung $Au = b$ in X^*. ∎

Bemerkung. Im Falle $s = 0$ ist im vorherigen Lemma die Einschränkung $p \ge \frac{2d}{d+2}$ nicht nötig.

1.28 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.26 ist der durch* (1.24) *gegebene Operator* $A\colon X \to X^*$ *strikt monoton, koerziv und stetig. Insbesondere sind also die Voraussetzungen von Satz 1.5 erfüllt.*

Beweis. 1. A ist strikt monoton: Der Operator A wird durch die Funktion

$$\mathbf{g} = (g^1,\dots,g^d)\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d\colon \boldsymbol{\zeta} \mapsto |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\boldsymbol{\zeta} \tag{1.29}$$

generiert, wobei wir $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ setzen. Für $i,j = 1,\dots,d$ und $\boldsymbol{\zeta} \ne \mathbf{0}$ haben wir

$$\frac{\partial g^i}{\partial\zeta_j}(\boldsymbol{\zeta}) = |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-4}\zeta^i\zeta^j$$

und somit gilt für alle $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d\setminus\{\mathbf{0}\}$, $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^d, 1<p<\infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^d \frac{\partial g^i}{\partial\zeta_j}(\boldsymbol{\zeta})\eta^i\eta^j &= |\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}\Big(|\boldsymbol{\eta}|^2 + (p-2)\frac{(\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\eta})^2}{|\boldsymbol{\zeta}|^2}\Big)\\ &\ge \min(1,p-1)\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-2}|\boldsymbol{\eta}|^2.\end{aligned}$$

Für beliebige $u \ne v \in X$ haben wir also

$$\begin{aligned}&\langle Au - Av, u-v\rangle\\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^d \big(g^i(\nabla u) - g^i(\nabla v)\big)(\partial_i u - \partial_i v)\,dx \;+\; s\int_\Omega |u-v|^2\,dx\\ &\ge \int_\Omega \sum_{i=1}^d \int_0^1 \frac{d}{d\tau} g^i\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)\,d\tau\,(\partial_i u - \partial_i v)\,dx\,,\end{aligned}$$

da $s \geq 0$. Den Integranden auf der rechten Seite kann man schreiben als

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial g^i}{\partial \zeta_j}\big(\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)\big)(\partial_j u - \partial_j v)(\partial_i u - \partial_i v)\, d\tau \\
&\geq c\,|\nabla u - \nabla v|^2 \int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2}\, d\tau \\
&> 0\,,
\end{aligned}$$

da[1] mit Ausnahme möglicherweise eines Punktes τ_0, der von $x \in \Omega$ abhängt, gilt: $|\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} > 0$. Insgesamt erhalten wir also

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0\,,$$

d.h. A ist strikt monoton.

2. A ist koerziv: Wir haben für $u \in X$

$$\langle Au, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p\, + s\,|u|^2\, dx = \|\nabla u\|_{L^p}^p + s\|u\|_{L^2}^2 \geq \|\nabla u\|_{L^p}^p\,,$$

also folgt

$$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} \geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} \to \infty \qquad (\|u\|_X \to \infty)\,,$$

falls $p > 1$.

3. A ist stetig: Sei $(u_n) \subseteq X$ eine Folge mit

$$u_n \to u \;\text{ in } X \qquad (n \to \infty)\,,$$

d.h. insbesondere $\nabla u_n \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$. Wir setzen $\mathbf{F}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta})$, wobei $\mathbf{g}$ in (1.29) definiert ist. Da $\mathbf{g}$ komponentenweise die Abschätzung

$$|g^i(\boldsymbol{\zeta})| \leq c\,|\boldsymbol{\zeta}|^{p-1} = c\,|\boldsymbol{\zeta}|^{\frac{p}{q}}\,, \quad i = 1, \ldots, d\,,$$

mit $q = \frac{p}{p-1}$ erfüllt, ist $\mathbf{F}$ ein vektorwertiger Nemyckii–Operator. Aus Lemma 1.19 folgt daher, dass $\mathbf{F} : (L^p(\Omega))^d \to (L^{p'}(\Omega))^d$ stetig ist, d.h. für unsere Folge (u_n) gilt:

$$\mathbf{F}(\nabla u_n) \to \mathbf{F}(\nabla u) \;\text{ in } \big(L^{p'}(\Omega)\big)^d \quad (n \to \infty)\,.$$

---

[1] Man beachte, dass das Integral $\int_0^1 |\nabla v + \tau(\nabla u - \nabla v)|^{p-2} d\tau$ endlich ist für $p > 1$.

Somit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\langle Au_n - Au, \varphi\rangle &= \int\limits_\Omega \big(\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\big)\cdot\nabla\varphi\,dx + s\int\limits_\Omega (u_n-u)\varphi\,dx \\
&\le c\,\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}}\|\nabla\varphi\|_{L^p} + s\|u_n-u\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \\
&\le c\,\big(\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n-u\|_X\big)\|\varphi\|_X\,,
\end{aligned}
$$

da $X = W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \ge \frac{2d}{d+2}$. Aufgrund der Definition der Norm im Dualraum gilt dann:

$$
\begin{aligned}
\|Au_n - Au\|_{X^*} &= \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle Au_n - Au,\varphi\rangle| \\
&\le c\,(\|\mathbf{F}(\nabla u_n) - \mathbf{F}(\nabla u)\|_{L^{p'}} + \|u_n-u\|_X)\,.
\end{aligned}
$$

Für $n\to\infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0, da $u_n \to u$ in X $(n\to\infty)$, und $\mathbf{F}(\nabla u_n) \to \mathbf{F}(\nabla u)$ in $(L^{p'}(\Omega))^d$ $(n\to\infty)$. Also ist der Operator A stetig und damit insbesondere hemistetig.

4. $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein separabler und reflexiver Banachraum (cf. Abschnitt A.12.3). ■

1.30 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ und sei $s \ge 0$. Für $p \ge \frac{2d}{d+2}$, $p > 1$ und alle $f \in L^{p'}(\Omega), p' = \frac{p}{p-1}$, existiert genau eine schwache Lösung u des Randwertproblems* (1.22), *d.h.* (1.23) *bzw.* (1.27) *gelten.*

Beweis. Aus den Lemmata 1.26 und 1.28 folgt, dass wir Satz 1.5 anwenden können, der sofort die Behauptung liefert. ■

Bemerkungen. (i) Satz 1.30 kann man auf die Gleichung

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x,\nabla u)) &= f \quad \text{in } \Omega\,, \\
u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,,
\end{aligned}
$$

verallgemeinern, falls $\mathbf{A}\colon \Omega\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\mathbf{A}$ ist eine Carathéodory–Funktion,
(ii) $|\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta})| \le C\big(g(x) + |\boldsymbol{\eta}|^{p-1}\big)$, $g \in L^{p'}(\Omega)$ (Wachstumsbedingung),
(iii) $\big(\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{A}(x,\boldsymbol{\zeta})\big)\cdot(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta})) > 0$, für fast alle x (strikte Monotonie),
(iv) $\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\eta})\cdot\boldsymbol{\eta} \ge c\,|\boldsymbol{\eta}|^p - h(x)$, $h \in L^1(\Omega)$ (Koerzivität).

(ii) Satz 1.30 gilt auch für beliebige $f \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Man kann zeigen, dass solche f eine Darstellung der Form

$$
f = \sum_{i=1}^d \partial_i f_i + f_0\,,
$$

mit $f_i \in L^{p'}(\Omega)$, $i = 0,\dots,d$, besitzen (cf. Abschnitt A.12.3).

3.2 Pseudomonotone Operatoren

3.2.1 Der Satz von Brezis

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Theorie zu entwickeln, die es ermöglicht, auch solche quasilinearen elliptischen Gleichungen zu lösen, die einen Term von niederer Ordnung enthalten, der nicht monoton ist. Zum Beispiel kann die Gleichung

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + s\,u &= f \qquad \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

nicht mit Hilfe der Theorie monotoner Operatoren gelöst werden, falls $s < 0$. Eine Inspektion des Beweises von Satz 1.5 zeigt aber, dass die Argumente für allgemeinere Operatoren, nämlich *pseudomonotone Operatoren*, adaptiert werden können. Typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren sind Operatoren der Form

$$A = A_1 + A_2,$$

wobei $A_1 : X \to X^*$ ein monotoner, hemistetiger Operator und $A_2 : X \to X^*$ ein stark stetiger, also kompakter, Operator ist (cf. Lemma 1.4 (i)), d.h. die Theorie pseudomonotoner Operatoren vereinigt *Monotonie* und *Kompaktheit.* Im Folgenden werden wir zuerst eine allgemeine Theorie entwickeln und diese dann auf Gleichungen vom Typ (2.13) anwenden.

2.2 Definition. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A\colon X \to X^*$ ein Operator. Wir sagen, A* ***genügt der Bedingung (M)****, falls aus*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X \qquad (n \to \infty)\,, \\ Au_n &\rightharpoonup b \quad \text{in } X^* \qquad (n \to \infty)\,, \\ \limsup_{n\to\infty}\, &\langle Au_n, u_n\rangle_X \le \langle b, u\rangle_X \end{aligned} \tag{2.3}$$

folgt, dass $Au = b$ gilt.

Diese Bedingung ist wichtig, weil sie invariant unter stark stetigen Perturbationen ist. Außerdem erfüllen monotone Operatoren diese Bedingung. Genauer gilt:

2.4 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A\colon X \to X^*$, $B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt:*

(i) *Ist A monoton und hemistetig, dann genügt A der Bedingung (M).*
(ii) *Wenn A der Bedingung (M) genügt und B stark stetig ist, dann genügt $A + B$ der Bedingung (M).*

Beweis. ad (i): Dies ist nichts anderes als eine Variante des Minty–Tricks aus Lemma 0.2 (ii). Sei (u_n) eine Folge, die (2.3) erfüllt. Da A monoton ist, folgt für alle $v \in X$, $n \in \mathbb{N}$

$$0 \le \langle Au_n - Av, u_n - v\rangle = \langle Au_n, u_n\rangle - \langle Av, u_n\rangle - \langle Au_n - Av, v\rangle\,.$$

Durch Anwendung von $\limsup_{n\to\infty}$ auf diese Ungleichung ergibt sich, aufgrund von (2.3), für alle $v \in X$

$$0 \le \langle b, u\rangle - \langle Av, u\rangle - \langle b - Av, v\rangle = \langle b - Av, u - v\rangle\,.$$

Da aber A aufgrund von Lemma 0.2 (i) maximal monoton ist, folgt daher $Au = b$, d.h. A genügt der Bedingung (M).

ad (ii): Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } X\,, \quad Au_n + Bu_n \rightharpoonup b \text{ in } X^* \qquad (n\to\infty)\,,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n\rangle \le \langle b, u\rangle\,.$$

Da B stark stetig ist, folgt $Bu_n \to Bu$ in X^* $(n\to\infty)$, und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n\rangle \le \langle b - Bu, u\rangle\,,$$
$$Au_n \rightharpoonup b - Bu \text{ in } X^* \qquad (n\to\infty)\,.$$

Da A der Bedingung (M) genügt, folgt $Au = b - Bu$, d.h. $Au + Bu = b$. ■

2.5 Definition. *Sei $A\colon X \to X^*$ ein Operator auf dem reflexiven, reellen Banachraum X. Dann heißt A **pseudomonoton**, falls aus*

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ in } X \qquad (n\to\infty)\,,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle_X \le 0$$

folgt, dass für alle $w \in X$ gilt:

$$\langle Au, u - w\rangle_X \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle_X\,.$$

Das folgende Lemma gibt typische Beispiele für pseudomonotone Operatoren an.

2.6 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum, und $A, B\colon X \to X^*$ seien Operatoren. Dann gilt:*

(i) *Wenn A monoton und hemistetig ist, dann ist A pseudomonoton.*

(ii) *Wenn A stark stetig ist, dann ist A pseudomonoton.*

(iii) *Wenns A und B pseudomonoton sind, dann ist $A + B$ pseudomonoton.*

(iv) *Wenn A pseudomonoton ist, dann genügt A der Bedingung (M).*

(v) *Wenn A pseudomonoton und lokal beschränkt ist, dann ist A demistetig.*

Beweis. ad (i): Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n\to\infty)$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0\,.$$

Da A monoton ist, gilt:

$$\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \geq 0\,,$$

woraus folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \geq \liminf_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u\rangle = 0\,.$$

Zusammen erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = 0\,. \tag{2.7}$$

Für beliebige $w \in X$ setzen wir $z = u + t(w-u)$, $t > 0$. Die Monotonie von A impliziert

$$\langle Au_n - Az, u_n - (u + t(w-u))\rangle \geq 0\,,$$

was äquivalent zu

$$t\langle Au_n, u - w\rangle \geq -\langle Au_n, u_n - u\rangle + \langle Az, u_n - u\rangle + t\langle Az, u - w\rangle$$

ist. Somit erhalten wir für alle $w \in X$:

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \geq \langle Az, u - w\rangle\,,$$

wobei wir (2.7) und $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$, sowie $t > 0$ benutzt haben. Nun verwenden wir die Hemistetigkeit des Operators A und erhalten $Az \rightharpoonup Au$ für $t \to 0^+$. Also gilt für alle $w \in X$:

$$\liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle \geq \langle Au, u - w\rangle\,,$$

d.h. A ist pseudomonoton.

ad (ii): Sei $(u_n) \subseteq X$ eine Folge mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$. Dann gilt $Au_n \to Au$ $(n \to \infty)$, aufgrund der starken Stetigkeit von A. Mithilfe von Lemma 0.3 (ii) erhalten wir somit für alle $w \in X$

$$\langle Au, u - w\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle\,,$$

d.h. A ist pseudomonoton.

ad (iii): Wir wählen eine Folge $(u_n) \subseteq X$ mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0\,. \tag{2.8}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle &\leq 0\,, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle &\leq 0\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

was wir durch Widerspruch beweisen. Gelte also

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle = a > 0\,.$$

Aus (2.8) folgt dann

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \le -a\,.$$

Da B pseudomonoton ist, gilt für alle $w \in X$

$$\langle Bu, u - w\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle\,.$$

Für $w = u$ erhalten wir aber $0 \le -a < 0$, was ein Widerspruch ist. Also gilt (2.9) und liefert mit der Pseudomonotonie von A und B

$$\begin{aligned}\langle Au, u - w\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle\,,\\ \langle Bu, u - w\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - w\rangle\,.\end{aligned}$$

Addieren wir beide Ungleichungen, ergibt sich für alle $w \in X$

$$\langle Au + Bu, u - w\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n + Bu_n, u_n - w\rangle\,,$$

d.h. $A + B$ ist pseudomonoton.

ad (iv): Gegeben sei eine Folge $(u_n) \subseteq X$, die (2.3) erfüllt. Dies impliziert insbesondere

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \le 0\,.$$

Aufgrund der Pseudomonotonie von A erhalten wir somit für alle $w \in X$

$$\begin{aligned}\langle Au, u - w\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle\\ &\le \langle b, u\rangle - \langle b, w\rangle = \langle b, u - w\rangle\,.\end{aligned}$$

Wenn wir w durch $2u - w$ ersetzen, ergibt sich für alle $w \in X$:

$$\langle Au, u - w\rangle = \langle b, u - w\rangle\,,$$

d.h. $Au = b$.

ad (v): Sei $(u_n) \subseteq X$ sei eine Folge mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Da A lokal beschränkt ist, ist auch die Folge (Au_n) beschränkt. Der Raum X ist reflexiv und daher gibt es eine Teilfolge (Au_{n_k}) mit $Au_{n_k} \rightharpoonup b$ $(k \to \infty)$, so dass wir $\lim\limits_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - u\rangle = 0$ erhalten. Die Pseudomonotonie von A zusammen mit den obigen Konvergenzen impliziert

$$\begin{aligned}\langle Au, u - w\rangle &\le \liminf_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k} - w\rangle\\ &= \langle b, u - w\rangle\,.\end{aligned}$$

Damit folgt wie in 4. $Au = b$, d.h. $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$ $(k \to \infty)$. Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iii) liefert, da obige Argumentation für beliebige konvergente Teilfolgen gilt,

$$Au_n \rightharpoonup b = Au \quad (n \to \infty),$$

d.h. A ist demistetig. ■

2.10 Satz (Brezis 1968). *Sei $A\colon X \to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter, koerziver Operator, wobei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum ist. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in X$ von*

$$Au = b. \tag{2.11}$$

Beweis. Aufgrund von Lemma 2.6 (v) ist A demistetig, da A pseudomonoton und beschränkt ist. Nach Lemma 2.6 (iv) genügt A auch der Bedingung (M), da A pseudomonoton ist. Wir gehen nun analog zum Beweis des Satzes von Browder–Minty (Satz 1.5) vor. Dazu wählen wir eine Basis $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von X. Mithilfe des Galerkin–Verfahrens suchen wir approximative Lösungen

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^n w_k,$$

die das Galerkin–System (cf. Beweis von Satz 1.5)

$$g_k(\mathbf{c}^n) = g_k(u_n) := \langle Au_n - b, w_k\rangle = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{2.12}$$

lösen. Die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems folgt wie im Beweis des Satzes 1.5, da A demistetig und koerziv ist. Die Demistetigkeit von A impliziert nämlich, dass die Funktionen $g_k, k = 1, \ldots, n$, stetig sind, und die Koerzivität von A, dass es ein $R_0 > 0$ gibt, so dass $\sum_{k=1}^n g_k(\mathbf{c}^n)\, c_k^n > 0$ für alle $\|u_n\| = R_0$ gilt (cf. (1.11)). Außerdem erhalten wir aus der Koerzivität auch eine apriori Abschätzung (cf. (1.12)), d.h.

$$\|u_n\|_X \le R_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also gibt es eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u$ $(k \to \infty)$. Wir wollen nun zeigen, dass u (2.11) löst. Aus dem Galerkin–System (2.12) folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, v\rangle = \langle b, v\rangle \qquad \forall v \in \operatorname{span}\{w_1, \ldots\}.$$

Die Beschränktheit des Operators A liefert, dass die Folge (Au_{n_k}) beschränkt ist, da die schwach konvergent Folge (u_n) beschränkt ist. Aufgrund der Reflexivität von X^* (cf. Lemma A.7.4 (iii)) besitzt die Folge (Au_{n_k}) einen schwachen Limes besitzt, d.h.

$$Au_{n_k} \rightharpoonup c \ \text{ in } X^* \qquad (k \to \infty).$$

Es gilt aber $c = b$ mit denselben Argumenten wie im Beweisteil 3. von Satz 1.5. Aus dem Galerkin–System (2.12), mit $w = u_{n_k}$, und der schwachen Konvergenz der (u_{n_k}) erhalten wir

$$\langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \langle b, u_{n_k}\rangle \to \langle b, u\rangle \qquad (k \to \infty)\,.$$

Daher erfüllt die Folge (u_{n_k}) die Voraussetzung der Bedingung (M) und es folgt

$$Au = b\,,$$

d.h. u ist die gesuchte Lösung von (2.11). ■

3.2.2 Quasilineare elliptische Gleichungen II

Wir betrachten nun das Problem

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f \qquad && \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.13}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ ist und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dies ist eine Verallgemeinerung der Probleme (1.22) und (2.1) und kann, wie am Beginn von Abschnitt 3.2.1 erläutert wurde, im Allgemeinen nicht mit der Theorie monotoner Operatoren gelöst werden.

Wir wollen die Theorie pseudomonotoner Operatoren benutzen. Dazu setzen wir $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ und definieren folgende Abbildungen:

$$\langle A_1 u, \varphi\rangle := \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx\,, \tag{2.14}$$

$$\langle A_2 u, \varphi\rangle := \int\limits_\Omega g(u)\,\varphi\, dx\,, \tag{2.15}$$

$$\langle b, \varphi\rangle := \int\limits_\Omega f\,\varphi\, dx\,. \tag{2.16}$$

Wir gehen analog zum Abschnitt 3.1.3 vor. Dort wurden bereits der Operator A_1 (cf. Lemmata 1.26, 1.28 mit $s = 0$) und das Funktional b (cf. Lemma 1.26) behandelt. Für den Operator A_2 gilt:

2.17 Lemma. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. An die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stellen wir folgende Wachstumsbedingung:*

$$|g(s)| \le c\,(1 + |s|^{r-1})\,, \tag{2.18}$$

wobei $1 \le r < \infty$. Für $1 \le p \le d$ und $r \le \frac{dp}{d-p}$ bildet der in $(2.14)_2$ definierte Operator A_2 den Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ in seinen Dualraum X^* ab und ist beschränkt. Für $r < \frac{dp}{d-p}$ ist A_2 stark stetig.

Beweis. 1. Aus der Definition von A_2 und (2.18) erhalten wir für $q = \frac{dp}{d-p}$ und $u, \varphi \in X$

$$
\begin{aligned}
|\langle A_2 u, \varphi\rangle| &\le \int\limits_\Omega c\left(1+|u|^{r-1}\right)|\varphi|\,dx \\
&\le c\int\limits_\Omega |\varphi|\,dx + c\Big(\int\limits_\Omega |u|^{(r-1)q'}\,dx\Big)^{\frac{1}{q'}}\Big(\int\limits_\Omega |\varphi|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&\le c\left(1+\|u\|^{r-1}_{L^{(r-1)q'}}\right)\|\varphi\|_X\,,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Einbettung $X = W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^\alpha(\Omega)$, $\alpha \le q$, (cf. Satz A.12.23) benutzt haben. Somit erhalten wir

$$
|\langle A_2 u, \varphi\rangle| \le c\left(1+\|u\|^{r-1}_X\right)\|\varphi\|_X\,, \tag{2.19}
$$

sofern $(r-1)q' \le q$, wobei wiederum die obige Einbettung verwendet wurde. Die Forderung $(r-1)q' \le q$ ist aufgrund der Definition von q äquivalent zu $r \le \frac{dp}{d-p}$. Aus der Definition der Operatornorm folgt

$$
\|A_2 u\|_{X^*} = \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle A_2, \varphi\rangle| \le c\left(1+\|u\|^{r-1}_X\right)
$$

und demzufolge $A_2 u \in X^*$, d.h. $A_2 \colon X \to X^*$. Aus dieser Abschätzung folgt auch, dass A_2 beschränkt ist.

2. Sei $(u_n) \subset X$ eine schwach konvergente Folge. Aufgrund der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)$, für $r < \frac{dp}{d-p}$ (cf. Satz A.12.24), gilt also für eine Teilfolge

$$
u_{n_k} \to u \ \text{ in } L^r(\Omega) \quad (k\to\infty)\,. \tag{2.20}
$$

Wir setzen

$$
F(v) = g(v)
$$

und erhalten mit Hilfe der Wachstumsbedingung (2.18) und der Stetigkeit von g, dass der Nemyckii–Operator F die Voraussetzungen von Lemma 1.19 erfüllt. Da $r-1 = \frac{r}{r'}$ gilt, ist $F : L^r(\Omega) \to L^{r'}(\Omega)$ stetig, d.h. für die Folge in (2.20) gilt:

$$
\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}} \to 0 \qquad (k\to\infty)\,. \tag{2.21}
$$

Daraus erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle A_2 u_{n_k} - A_2 u, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \int\limits_\Omega |g(u_{n_k}) - g(u)||\varphi|\,dx \\
&\le \sup_{\substack{\varphi\in X\\ \|\varphi\|\le 1}} \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}}\|\varphi\|_{L^r} \\
&\le c\,\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}}\,,
\end{aligned}
$$

aufgrund der Einbettung $X \hookrightarrow L^r(\Omega)$. Mithilfe der Konvergenz in (2.21) folgt also $A_2 u_{n_k} \to Au$ in X^* $(k \to \infty)$. Da diese Argumentation für alle Teilfolgen, die (2.20) erfüllen, gilt, liefert das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 (iii), dass A_2 stark stetig ist, d.h. $A_2 u_n \to A_2 u$ in X^* $(n \to \infty)$. ■

Um Satz 2.10 anwenden zu können benötigen wir noch folgendes Lemma.

2.22 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 2.17 erfülle g die Koerzivitätsbedingung*

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} g(s)\, s > -\infty \tag{2.23}$$

und es sei $p > 1$. Dann ist der Operator $A_1 + A_2 : X \to X^*$ koerziv.

Beweis. Wir haben (cf. Beweis von Lemma 1.28)

$$\langle A_1 u, u\rangle = \|\nabla u\|_{L^p}^p ,$$

und aufgrund von (2.23) gilt für eine Konstante $c_0 > 0$

$$\langle A_2 u, u\rangle = \int_\Omega g(u)\, u\, dx > -c_0 .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\langle A_1 u + A_2 u, u\rangle}{\|u\|_X} &\geq \frac{\langle A_1 u, u\rangle}{\|\nabla u\|_{L^p}} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1} - \frac{c_0}{\|\nabla u\|_{L^p}} \to \infty \qquad \big(\|\nabla u\|_{L^p} \to \infty\big)\,, \end{aligned}$$

falls $p > 1$. Also ist der Operator $A_1 + A_2$ koerziv. ■

2.24 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Sei $1 < p < d$ und die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle die Voraussetzungen* (2.18) *und* (2.23) *mit $1 \leq r < \frac{dp}{d-p}$. Dann existiert für alle $f \in L^{p'}(\Omega)$ eine verallgemeinerte Lösung von* (2.13)*, d.h. es gibt ein $u \in X = W_0^{1,p}(\Omega)$, so dass*

$$(A_1 + A_2)u = b\,.$$

Beweis. Wir wollen den Satz von Brezis (Satz 2.10) anwenden. Der Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein reflexiver, separabler Banachraum. Aus den Lemmata 1.26 und 1.28 wissen wir, dass $A_1 : X \to X^*$ ein strikt monotoner, stetiger, beschränkter Operator ist. Also ist A_1 nach Lemma 2.6 (i) pseudomonoton. Aufgrund von Lemma 2.17 ist A_2 ein stark stetiger, beschränkter Operator. Lemma 2.6 (ii) besagt, dass somit A_2 pseudomonoton ist. Insgesamt ist also $A_1 + A_2$ ein beschränkter pseudomonotoner Operator, der aufgrund von Lemma 2.22 auch koerziv ist. Lemma 1.26 liefert $b \in X^*$. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 2.10. ■

3.2.3 Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen

Die stationären Navier–Stokes Gleichungen lauten[2]

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.25}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ ist. Diese Gleichungen beschreiben die stationäre Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Es ist $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ der Druck und $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine äußere Kraft. Der Term $[\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u}$ wird oft *Wirbelterm* genannt. Wir setzen

$$X := \{\mathbf{u} \in \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3 \,\big|\, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}\,. \tag{2.26}$$

Dies ist offensichtlich ein linearer Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$, den wir mit der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_X := \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \tag{2.27}$$

versehen. Wir definieren für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$ und $p \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega p\,dx = 0$

$$\begin{aligned} \langle A_1 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx\,, \\ \langle A_2 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,, \\ \langle P, \boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \langle \nabla p, \boldsymbol{\varphi}\rangle := -\int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, dx = 0\,, \\ \langle b, \boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Offensichtlich ist die Operatorgleichung $A_1 + A_2 = b$ in X^* äquivalent zur schwachen Formulierung von Problem (2.25), d.h. für alle $\boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,. \tag{2.29}$$

Wir überprüfen nun, dass A_1, $A_2\colon X \to X^*$, $b \in X^*$ gilt, und dass der Operator $A_1 + A_2$ die Voraussetzungen von Satz 2.10 erfüllt.

[2] Wir benutzen die Notation $[\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} = \big(\sum_{j=1}^{3} u^j\,(\partial_j u^i)\big)_{i=1,2,3}$

2.30 Lemma. *Unter den obigen Voraussetzungen an Ω ist der in* (2.26) *definierte Raum X, versehen mit der Norm* (2.27)*, ein reflexiver, separabler Banachraum.*

Beweis. Der Raum X, definiert in (2.26), ist ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$. Sei $(\mathbf{u}_n) \subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ $(n \to \infty)$. Daraus folgt insbesondere, dass $\nabla\mathbf{u}_n \to \nabla\mathbf{u}$ in $\big(L^2(\Omega)\big)^{3\times 3}$ $(n \to \infty)$. Daher gibt es eine Teilfolge mit $\nabla\mathbf{u}_{n_k} \to \nabla\mathbf{u}$ fast überall $(k \to \infty)$. Wir erhalten also für fast alle $x \in \Omega$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x) = \operatorname{tr}\nabla\mathbf{u}(x) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{tr}\nabla\mathbf{u}_{n_k}(x) = 0\,,$$

d.h. $\mathbf{u} \in X$. Da ein abgeschlossener Teilraum eines Banachraumes wieder ein Banachraum ist, haben wir also bewiesen, dass X ein Banachraum ist. Außerdem ist ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Banachraumes wieder reflexiv (cf. Lemma A.7.4 (i)). Da $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ separabel ist, ist auch der Teilraum $X \subset \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ separabel (cf. Satz A.7.4 (vi)). ■

2.31 Lemma. *Unter den obigen Voraussetzungen an Ω und mit X, definiert in* (2.26)*, ist der Operator $A_1 : X \to X^*$ linear, stetig, koerziv, strikt monoton und beschränkt.*

Beweis. Offensichtlich ist A_1 linear. Der Operator $A_1 : X \to X^*$ ist eine vektorwertige Variante des Operators $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ in Lemma 1.26 mit $p = 2$ und $s = 0$. Da X ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ ist folgt sofort

$$A_1 \colon X \subseteq \big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3 \to \Big(\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3\Big)^* \subseteq X^*\,,$$

da die Restriktion eines Funktionals, das auf $\big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3$ definiert ist, auf den Teilraum X natürlich ein Funktional auf X ist. Die fehlenden Behauptungen folgen somit sofort aus Lemma 1.26 und Lemma 1.28. ■

2.32 Lemma. *Der Operator A_2 definiert in* (2.28) *ist ein stark stetiger, beschränkter Operator von X nach X^*.*

Beweis. 1. Für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| &\le \int_\Omega |\mathbf{u}||\nabla\mathbf{u}||\boldsymbol{\varphi}|\,dx \\
&\le \Big(\int_\Omega |\mathbf{u}|^4\,dx\Big)^{\frac14}\Big(\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}|^4\,dx\Big)^{\frac14}\Big(\int_\Omega |\nabla\mathbf{u}|^2\,dx\Big)^{\frac12} \\
&\le c\,\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2}^2\|\boldsymbol{\varphi}\|_X\,,
\end{aligned}$$

denn $X \hookrightarrow \big(L^4(\Omega)\big)^3$ (cf. Satz A.12.23). Aus der Abschätzung folgt sowohl $A_2\mathbf{u} \in X^*$ und damit $A_2 \colon X \to X^*$, als auch die Beschränktheit von A_2.

2. A_2 ist stark stetig: Sei $(\mathbf{u}_n) \subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ $(n \to \infty)$. Aus der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow \big(L^4(\Omega)\big)^3$, erhalten wir für eine Teilfolge $\mathbf{u}_{n_k} \to \mathbf{u}$ in $\big(L^4(\Omega)\big)^3$ $(k \to \infty)$. Da die weitere Argumentation wieder für alle konvergenten Teilfolgen gilt, bezeichnen wir obige Teilfolge wiederum mit $(\mathbf{u}_n)$. Wir werden zeigen, dass gilt:

$$\|A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}\|_{X^*} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi}\in X\\ \|\boldsymbol{\varphi}\|\le 1}} |\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nehmen wir an, dies gelte nicht. Also existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und Elemente $\boldsymbol{\varphi}_n \in X$, $\|\boldsymbol{\varphi}_n\| \le 1$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| \ge \varepsilon_0\,.$$

Da die Folge $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(\boldsymbol{\varphi}_{n_k})$ mit $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \rightharpoonup \boldsymbol{\varphi}$ in X $(k \to \infty)$, und $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Für diese Teilfolge, im Folgenden mit $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ bezeichnet, gilt:

$$\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| &= \Big|\int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n]\mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_n - [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}_n\,dx\Big|\\
&= \Big|\int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n](\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\varphi}_n + [\nabla(\mathbf{u}_n-\mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi})\\
&\qquad + [\nabla(\mathbf{u}_n-\mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\Big|\\
&\le \|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}\|\boldsymbol{\varphi}_n\|_{L^4}\\
&\quad + \|\mathbf{u}\|_{L^4}\|\nabla(\mathbf{u}_n-\mathbf{u})\|_{L^2}\|\boldsymbol{\varphi}_n-\boldsymbol{\varphi}\|_{L^4}\\
&\quad + \Big|\int_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n-\mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\Big|\\
&\le C\,\|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}\|_{L^4} + C\,\|\boldsymbol{\varphi}_n-\boldsymbol{\varphi}\|_{L^4}\\
&\quad + \Big|\int_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n-\mathbf{u})]\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,dx\Big| \to 0 \qquad (n\to\infty)\,,
\end{aligned}$$

da die Folge $\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}$ beschränkt ist (cf. Lemma 0.2 (i)), $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $\big(L^4(\Omega)\big)^3$ $(n\to\infty)$, $\nabla\mathbf{u}_n \rightharpoonup \nabla\mathbf{u}$ in $\big(L^2(\Omega)\big)^{3\times3}$ $(n\to\infty)$ und $\boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi}$ in $\big(L^4(\Omega)\big)^{3\times3}$ $(n\to\infty)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Damit folgt $A_2\mathbf{u}_n \to A_2\mathbf{u}$ $(n\to\infty)$, d.h. A_2 ist stark stetig auf X. ∎

2.33 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$ ein $\mathbf{u} \in X$, wobei X in* (2.26) *definiert ist, so dass $\mathbf{u}$ die Navier–Stokes–Gleichungen* (2.25) *im schwachen Sinne löst, d.h.* (2.29) *gilt.*

Beweis. Aufgrund der Lemmata 2.31, 2.32 und 2.6 ist der Operator $A_1 + A_2 \colon X \to X^*$ beschränkt und pseudomonoton. Es bleibt zu zeigen, dass $A_1 + A_2$ auch koerziv ist. Für alle $\mathbf{u} \in X$ haben wir:

$$\begin{aligned}\langle A_2\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^3 u^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} u^i \, dx = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) dx \\ &= -\int\limits_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\, \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\, dx = 0\,,\end{aligned}$$

da für $\mathbf{u} \in X$ gilt $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Da A_1 koerziv ist (cf. Lemma 2.31), ist also insgesamt $A_1 + A_2$ koerziv auf X [3]. Mit denselben Argumenten wie in Lemma 1.26 erhält man $b \in \big(\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3\big)^* \subseteq X^*$, sofern $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$. Satz 2.10 liefert die Behauptung des Satzes. ∎

Bisher haben wir die Existenz einer Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ gezeigt, die (2.29) erfüllt. Um auch einen Druck p zu finden, so dass für alle $\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ gilt:

$$\int\limits_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\boldsymbol{\varphi}\, dx + \int\limits_\Omega [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx + \int\limits_\Omega p \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\, dx = \int\limits_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,, \tag{2.34}$$

muss man den *Satz von De Rham* auf $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ definiert durch

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle := \int\limits_\Omega \nabla\mathbf{u} \cdot \nabla\boldsymbol{\varphi}\, dx + \int\limits_\Omega [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx - \int\limits_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx$$

anwenden.

2.35 Satz (De Rham 1960). *Sei $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ ein Funktional. Falls für alle $\boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt:*

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = 0\,,$$

dann existiert eine Funktion $p \in L^2(\Omega)$ mit $\int_\Omega p\, dx = 0$, so dass für alle $\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ gilt:

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \int\limits_\Omega p \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}\, dx\,.$$

Beweis. cf. [17]. ∎

[3] Die Koerzivität ist die einzige Eigenschaft, die nur auf X und nicht auf $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ gilt. Zum Beweis der anderen Eigenschaften benötigen wir die Bedingung $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ nicht.

3.3 Maximal monotone Operatoren

Die Theorie *maximal monotoner* Operatoren ist das Herzstück in der Theorie monotoner Operatoren, da sie die Grundideen zur vollen Entfaltung bringt und sehr allgemein ist. Intuitiv kann man sich unter einem maximal monotonen Operator einen monotonen Operator vorstellen, der *keine echte* monotone Erweiterung besitzt.

Beispiele. 1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und monoton wachsend, z.B. sei

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Dann ist diese Funktion f maximal monoton.

2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend, aber unstetig, z.B. sei

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion f ist monoton, aber *nicht* maximal monoton. Es gibt nämlich eine monotone Erweiterung, z.B.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0\,, \\ [0,2] & \text{für } x = 0\,, \\ x^2 + 2 & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Allerdings müssen wir für die maximale Monotonie „bezahlen“, denn wir müssen „mehrdeutige Funktionen“ oder genauer Abbildungen zulassen. Im Folgenden bezeichnen wir mit 2^Y die *Potenzmenge* einer Menge Y.

3.1 Definition. *Seien M, Y Mengen und sei $A : M \to 2^Y$ eine* ***Abbildung****, d.h. A ordnet allen $u \in M$ eine Teilmenge $Au \subseteq Y$ zu, d.h. $Au \in 2^Y$. Dann ist*

$$D(A) = \{u \in M \,\big|\, Au \neq \emptyset\}$$

der ***effektive Definitionsbereich****, ferner ist*

$$R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au$$

der ***Wertebereich*** *und*

$$G(A) = \{(u,v) \in M \times Y \,\big|\, u \in D(A), v \in Au\}$$

der ***Graph*** *von A. Wir schreiben für $(u,v) \in G(A)$ einfacher $(u,v) \in A$.*

Bemerkungen. (i) Die *inverse Abbildung* $A^{-1}\colon Y \to 2^M$ existiert *immer* und ist definiert durch

$$A^{-1}(v) = \{u \in M \,\big|\, v \in Au\}\,.$$

Offensichtlich haben wir $D(A^{-1}) = R(A)$, $R(A^{-1}) = D(A)$ und $(u,v) \in A$ genau dann, wenn $(v,u) \in A^{-1}$.

(ii) Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $M \subseteq X$. Für gegebene Abbildungen $A, B\colon M \to 2^Y$ und für feste α, $\beta \in \mathbb{K}$ definieren wir die **Linearkombination**

$$(\alpha A + \beta B)(u) = \begin{cases} \alpha Au + \beta Bu & \text{für } u \in D(A) \cap D(B)\,, \\ \emptyset & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(iii) Jede eindeutige Abbildung $A\colon D(A) \subseteq M \to Y$ kann mit einer mehrdeutigen Abbildung $\bar{A}\colon M \to 2^Y$ identifiziert werden, indem wir

$$\bar{A}u = \begin{cases} \{Au\} & \text{für } u \in D(A)\,, \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen. Dann gilt

$$D(\bar{A}) = D(A) \qquad \text{und} \qquad R(\bar{A}) = R(A)\,.$$

Im Folgenden verwenden wir immer diese Identifizierung und schreiben kürzer A statt $\bar{A}$.

3.2 Definition. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Abbildung $A\colon M \to 2^{X^*}$ heißt*

(i) ***monoton*** *genau dann, wenn für alle $(u,u^*), (v,v^*) \in A$ gilt:*

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle_X \ge 0\,,$$

(ii) ***maximal monoton*** *genau dann, wenn A monoton ist, und aus $(u,u^*) \in M \times X^*$ sowie*

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle_X \ge 0 \qquad \forall (v,v^*) \in A$$

folgt, dass $(u,u^*) \in A$.

Bemerkungen. (i) Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ kann mit obiger Identifizierung als mehrdeutige Abbildung $\bar{A}\colon X \to 2^{X^*}$ aufgefasst werden. Die Definition 1.1 der Monotonie des Operators A ist mit der Definition 3.2 der Monotonie der mehrdeutigen Abbildung $\bar{A}$ identisch.

(ii) Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ heißt *maximal monoton* genau dann, wenn A monoton ist, und aus $(u,u^*) \in X \times X^*$ sowie

$$\langle u^* - Av, u - v\rangle_X \ge 0 \qquad \forall v \in D(A)$$

folgt, dass $u \in D(A)$ und $u^* = Au$ gelten.

Die einfachsten Beispiele maximal monotoner Operatoren erhält man mithilfe reeller Funktionen. Jede monoton wachsende und möglicherweise unstetige Funktion erzeugt offensichtlich einen monotonen Operator. Ferner gilt

3.3 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und stetige Funktion. Dann ist f maximal monoton.*

Beweis. Sei $(u, u^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und es gelte für alle $v \in \mathbb{R}$

$$\big(u^* - f(v)\big)(u - v) \geq 0 .$$

Es ist zu zeigen, dass $u^* = f(u)$ gilt, denn $u \in \mathbb{R} = D(f)$ wurde ja vorausgesetzt. Für $u > v$ erhalten wir $u^* - f(v) \geq 0$, d.h. $u^* \geq f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, mit einer Folge (u_n), für die gilt: $u_n \nearrow u$ $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von f impliziert $u^* \geq f(u)$. Für $u < v$ folgt $u^* \leq f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, wobei (u_n) eine Folge ist mit $u_n \searrow u$ $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von f liefert $u^* \leq f(u)$. Somit gilt sowohl $u^* \geq f(u)$ als auch $u^* \leq f(u)$, d.h. $u^* = f(u)$. ■

Durch ein einfaches Gegenbeispiel überlegt man sich, dass unstetige monoton wachsende Funktionen nicht maximal monoton sein müssen. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0\,, \\ x + 1 & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

d.h. f ist monoton wachsend, aber nicht stetig. Diese Funktion f ist *nicht* maximal monoton. Um dies zu beweisen wählen wir $(u, u^*) = (0, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und zeigen, dass für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$-\big(\tfrac{1}{2} - f(v)\big)v \geq 0 .$$

In der Tat, im Falle $v > 0$ haben wir $-(\frac{1}{2} - (v+1))v = (v + \frac{1}{2})v \geq 0$. Und im Falle $v \leq 0$ haben wir $(v - \frac{1}{2})v \geq 0$. Allerdings ist $f(0) = 0 \neq \frac{1}{2}$.

Eine zu Lemma 3.3 analoge Aussage erhalten wir auch für monotone Operatoren.

3.4 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein monotoner, hemistetiger Operator. Dann ist A maximal monoton.*

Beweis. Sei $(u, u^*) \in X \times X^*$ und es gelte für alle $v \in X$

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle \geq 0 .$$

Wir setzen $v = u \pm tw$ mit $w \in X$ und $t > 0$. Dann folgt für alle $w \in X$

$$\mp t \langle u^* - A(u \pm tw), w \rangle \geq 0 ,$$

und demzufolge

$$\langle u^* - A(u + tw), w\rangle \le 0\,,$$
$$\langle u^* - A(u - tw), w\rangle \ge 0\,.$$

Da A hemistetig ist, folgt im Grenzübergang $t \to 0^+$, dass für alle $v \in X$ gilt:

$$\langle u^* - Au, w\rangle = 0\,,$$

d.h. $u^* = Au$. ∎

Bemerkung. Die inverse Abbildung $A^{-1}\colon X^* \to 2^X$ einer maximal monotonen Abbildung $A\colon X \to 2^{X^*}$ auf einem reflexiven Banachraum X ist wieder maximal monoton. In der Tat, da X reflexiv ist, haben wir die Identifizierung $X \cong X^{**}$ und somit kann man A^{-1} auch als Abbildung $A^{-1}\colon X^* \to 2^{X^{**}}$ auffassen. Weiterhin gilt $\langle u^*, u\rangle_X = \langle u, u^*\rangle_{X^*}$ für alle $(u, u^*) \in X \times X^*$ und somit folgt die Behauptung mithilfe der Definition der inversen Abbildung

$$G(A^{-1}) = \{(u^*, u) \in X^* \times X \,\big|\, (u, u^*) \in G(A)\}\,.$$

3.3.1 Subdifferentiale

Ein weiteres Beispiel maximal monotoner Operatoren sind *Subdifferentiale*, die den klassischen Begriff der Ableitung für konvexe Funktionen verallgemeinern.

3.5 Definition. *Sei X ein reeller Banachraum und $f : X \to [-\infty, \infty]$ ein Funktional auf X. Ein Element $u^* \in X^*$ heißt **Subgradient** von f an der Stelle $u \in X$ genau dann, wenn $f(u) \ne \pm\infty$ und*

$$f(v) \ge f(u) + \langle u^*, v - u\rangle_X \qquad \forall\, v \in X\,.$$

*Die Menge aller Subgradienten von f in u heißt **Subdifferential** $\partial f(u)$. Falls an der Stelle u kein Subgradient existiert, setzen wir $\partial f(u) = \emptyset$.*

Beispiele. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist $\partial f(u)$ die Menge aller Anstiege von Geraden, die durch $(u, f(u))$ gehen und *vollständig* unter dem Graphen von f liegen.

(i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -b\,x & \text{für } x \le 0\,, \\ \;\;a\,x & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dann ist $\partial f(0) = [-b, a]$. In der Tat, wenn wir die Ungleichung $f(v) \ge u^*v$ betrachten, so bemerken wir, dass für $v > 0$ die Ungleichung $av \ge u^*v$ impliziert, dass $a \ge u^*$ gilt, und für $v < 0$ aus der Ungleichung $-bv \ge u^*v$ folgt, dass $-b \le u^*$ gilt. Also kann $f(v) \ge u^*$ für alle $v \in \mathbb{R}$ nur gelten, wenn $u^* \in [-b, a]$.

(ii) Es gibt differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Subdifferential die leere Menge ist. Ein Beispiel dafür ist die Funktion $\sin(x)$, für deren Subdifferential gilt: $\partial \sin(x) = \emptyset$, falls $x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\partial \sin(x) = 0$, falls $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Falls eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 ein Minimum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$. Mithilfe des Subdifferentials erhält man folgende Verallgemeinerung.

3.6 Lemma. *Sei $f : X \to (-\infty, \infty]$ ein Funktional auf einem reellen Banachraum X mit $f \not\equiv \infty$. Dann ist u eine Lösung des Minimierungsproblems*

$$f(u) = \min_{v \in X} f(v)\,, \qquad\qquad u \in X\,,$$

genau dann, wenn

$$0 \in \partial f(u)\,.$$

Beweis. 1. Sei $0 \in \partial f(u)$. Nach Definition des Subgradienten gilt für alle $v \in X$ und $u^* \in \partial f(u)$

$$f(v) - f(u) \geq \langle u^*, v - u\rangle\,.$$

Wenn wir $u^* = 0$ einsetzen erhalten wir, dass für alle $v \in X$ gilt: $f(u) \leq f(v)$.

2. Es gelte $f(u) \leq f(v)$ für alle $v \in X$. Somit ist insbesondere $f(u) \neq \infty$ und wir erhalten für alle $v \in X$

$$f(v) - f(u) \geq 0 = \langle 0, v - u\rangle\,,$$

d.h. $0 \in \partial f(u)$. ■

Das folgende Lemma stellt die Lösbarkeit des Minimierungsproblems sicher.

3.7 Lemma. *Sei C eine abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven Banachraumes X. Das Funktional $f\colon C \to \mathbb{R}$ sei konvex, unterhalbstetig und koerziv, d.h. $f(u) \to \infty$ für $\|u\| \to \infty$, $u \in C$. Dann besitzt f auf C ein Minimum.*

Beweis. O.B.d.A. können wir annehmen, dass f nichttrivial ist, d.h. $f \not\equiv \infty$. Sei $(u_n) \subset C$ eine Minimalfolge von f, d.h.

$$f(u_n) \to \inf_{v \in C} f(v) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Aufgrund der Koerzivität von f muss die Folge (u_n) beschränkt sein. Also gibt es aufgrund von Satz A.8.15 eine schwach konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ $(k \to \infty)$, und Satz A.8.9 liefert $u \in C$. Sei nun $\varepsilon > 0$ fest, aber beliebig, und sei k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$f(u_{n_k}) \leq \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon\,. \tag{3.8}$$

Ferner gibt es, aufgrund von Folgerung A.8.10, eine Folge $(v_j) \subset C$ von konvexen Linearkombinationen der u_{n_k}, $n_k \geq k_0$, d.h. $v_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j u_{n_k}$, $n_k \geq k_0$, $0 \leq c_k^j \leq 1$, $\sum_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1$, die stark gegen u_0 konvergieren. Wegen der Konvexität des Funktionals f und (3.8) folgt

$$f(v_j) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j \, f(u_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j \left(\inf_{v\in C} f(v) + \varepsilon \right) = \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon \, . \tag{3.9}$$

Da in Banachräumen die Unterhalbstetigkeit äquivalent zur Bedingung (cf. [8, Kapitel 1])

$$f(x_0) \leq \liminf_{x_n \to x_0} f(x_n)$$

ist, erhalten wir aus (3.9)

$$f(u_0) \leq \liminf_{j \to \infty} f(v_j) \leq \inf_{v \in C} f(v) + \varepsilon \, .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $f(u_0) = \inf_C f$, d.h. das Minimum wird angenommen. ■

Falls die Ableitung $f'(u)$ und das Subdifferential $\partial f(u)$ existieren, d.h. $\partial f(u) \neq \emptyset$, so ist $\partial f(u) = \{f'(u)\}$. Dies gilt nicht nur für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, sondern auch für reellwertige Funktionen auf Banachräumen. Im Zusammenhang mit monotonen Operatoren und Subdifferentialen ist es besonders fruchtbar, konvexe Funktionen zu betrachten. Denn aus der reellen Analysis wissen wir, dass f' monoton wachsend ist, sofern $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und stetig differenzierbar ist.

3.10 Lemma. *Sei X ein reeller Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ ein Funktional. Dann gilt:*

(i) *Falls f konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $Df(u)$ im Punkt u besitzt, dann gilt:*

$$\partial f(u) = \{Df(u)\} \, . \tag{3.11}$$

(ii) *Umgekehrt, falls $\partial f\colon X \to X^*$ hemistetig und eindeutig ist, d.h. für alle $u \in X$ existiert ein $u^* \in X^*$ mit $\partial f(u) = \{u^*\}$, dann ist f Gâteaux–differenzierbar und* (3.11) *gilt für alle $u \in X$.*

Beweis. ad (i): Sei $h \in X$ beliebig. Wir setzen $\varphi(t) = f(u + th)$. Dann ist $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, denn aufgrund der Konvexität von f gilt, für alle $\tau \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\varphi\big((1-\tau)t + \tau s\big) &= f\big(((1-\tau)+\tau)u + (1-\tau)th + \tau sh\big) \\
&\leq (1-\tau)f(u+th) + \tau f(u+sh) \\
&= (1-\tau)\varphi(t) + \tau\varphi(s) \, .
\end{aligned}$$

Da f Gâteaux–differenzierbar ist, existiert $\varphi'(0)$. Dies und die Konvexität von φ liefern insbesondere

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\\ &\le \lim_{t\to 0^+} \frac{t\varphi(1)+(1-t)\varphi(0)-\varphi(0)}{t}\\ &= \varphi(1)-\varphi(0)\,.\end{aligned}$$

Setzen wir die Definition von φ und der Gâteaux–Differenzierbarkeit ein, ergibt sich daraus für alle $h \in X$

$$f(u+h)-f(u) \ge \langle Df(u),h\rangle\,,$$

d.h. nach der Definition des Subgradienten gilt $Df(u) \in \partial f(u)$. Sei nun $u^* \in \partial f(u)$. Dann gilt für alle $h \in X$ und $t > 0$

$$f(u+th)-f(u) \ge \langle u^*, th\rangle\,,$$

was man umschreiben kann als

$$\frac{f(u+th)-f(u)}{t} \ge \langle u^*, h\rangle\,, \qquad \forall h \in X\,.$$

Im Grenzübergang $t \to 0^+$ folgt

$$\langle Df(u),h\rangle \ge \langle u^*, h\rangle\,, \qquad \forall h \in X\,,$$

da f Gâteaux–differenzierbar ist. Wir ersetzen h durch $-h$, und erhalten

$$\langle Df(u),h\rangle = \langle u^*, h\rangle\,, \qquad \forall h \in X\,,$$

d.h. wir haben gezeigt $u^* = Df(u)$. Zusammen mit dem vorher Gezeigten folgt daher $\partial f(u) = \{Df(u)\}$.

ad (ii): Für $t > 0$ und $h \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}f(u+th)-f(u) &\ge \langle \partial f(u), th\rangle\,,\\ f(u)-f(u+th) &\ge -\langle \partial f(u+th), th\rangle\,,\end{aligned}$$

und demzufolge haben wir

$$\begin{aligned}\langle \partial f(u),h\rangle &\le \liminf_{t\to 0^+} \frac{f(u+th)-f(u)}{t}\\ &\le \limsup_{t\to 0^+} \frac{f(u+th)-f(u)}{t}\\ &\le \limsup_{t\to 0^+} \langle \partial f(u+th),h\rangle\\ &= \langle \partial f(u),h\rangle\,,\end{aligned}$$

da $\partial f(u)$ hemistetig ist. Also sind alle Ungleichheitszeichen Gleichheitszeichen. Daher existiert $Df(u)$ und (3.11) gilt. ∎

Die meisten Eigenschaften konvexer, unterhalbstetiger Funktionale auf einem Banachraum X werden mithilfe von Trennungssätzen konvexer Mengen bewiesen, die auf der geometrischen Form des Satzes von Hahn–Banach beruhen (cf. Satz A.10.11).

3.12 Lemma. *Sei $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ ein konvexes, unterhalbstetiges Funktional auf einem reellen Banachraum X und seien $g_i\colon X \to (-\infty, \infty]$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, konvexe Funktionale. Dann gilt:*

(i) *Falls $f \not\equiv \infty$ gilt, existieren $a \in \mathbb{R}$ und $u^* \in X^*$ so, dass für alle $u \in X$ gilt:*

$$f(u) \geq a + \langle u^*, u \rangle .$$

(ii) *Sei $M \subseteq X$ eine konvexe, abgeschlossene Menge, so dass $f\colon M \to \mathbb{R}$. Dann ist f stetig auf dem Inneren* $\operatorname{int}(M)$ *der Menge M.*

(iii) *Falls $f(u) < \infty$ und f stetig in u ist, dann ist $\partial f(u)$ eine nichtleere konvexe Menge.*

(iv) *Sei $f \not\equiv \infty$ und sei* $\operatorname{dom}(f) := \{u \in X \,\big|\, f(u) < \infty\}$*. Dann ist die Menge der Punkte u, in denen $\partial f(u) \neq \emptyset$ gilt, dicht in* $\operatorname{dom}(f)$*.*

(v) *Falls ein Punkt $u_0 \in X$ existiert, so dass alle Funktionale g_i, $i = 1, \dots, n$, endlich sind und die Funktionale g_j, $j = 1, \dots, n-1$, stetig in u_0 sind, dann gilt die Summenformel für Subdifferentiale:*

$$\partial\big(g_1 + \ldots + g_n\big)(u_0) = \partial g_1(u_0) + \ldots + \partial g_n(u_0) .$$

Beweis. Der Beweis dieser Behauptungen erfordert einen Aufwand, der den Rahmen des Buches sprengen würde. Die Beweise können in [26, Kapitel 47] oder in [8, Kapitel 1] gefunden werden. ∎

Sei X ein reeller Banachraum und $C \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge, deren **Indikatorfunktion** χ durch

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & \text{für}\, u \in C\,, \\ \infty & \text{für}\, u \in X \setminus C\,, \end{cases}$$

definiert ist. Unter einem **Trägerfunktional** von C im Punkt $u \in X$ verstehen wir ein Funktional $u^* \in X^*$, so dass für alle $v \in C$ gilt:

$$\langle u^*, u - v \rangle \geq 0 . \tag{3.13}$$

Für ein gegebenes Paar $(u, u^*) \in X \times X^*$ beschreibt die Gleichung

$$\langle u^*, u - v \rangle = 0 \tag{3.14}$$

eine abgeschlossene *Hyperebene* H in X durch den Punkt u, d.h. obige Bedingung besagt, dass die Menge C auf einer Seite der Hyperebene H liegt.

Zwischen der Indikatorfunktion und dem Trägerfunktional gibt es folgende Beziehung:

$$\partial\chi(u) = \begin{cases} \text{Menge aller Trägerfunktionale} & \text{für } u \in C\,, \\ \emptyset & \text{für } u \in X \setminus C\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

In der Tat, ist nach der Definition des Subgradienten $u^* \in \partial\chi(u)$, falls für alle $v \in X$ gilt:

$$\chi(v) \geq \chi(u) + \langle u^*, v-u\rangle\,. \tag{3.16}$$

Sei $u \in C$. Falls wir auch $v \in C$ haben, ist diese Ungleichung nichts anderes als (3.13), d.h. insbesondere, dass u^* ein Trägerfunktional von C im Punkt $u \in C$ ist. Umgekehrt sei u^* ein Trägerfunktional von C im Punkt $u \in C$. Aus der Definition der Indikatorfunktion und (3.13) erhalten wir sofort (3.16), d.h. $u^* \in \partial\chi(u)$. Falls dagegen $u \in X \setminus C$, dann ist $\chi(u) = \infty$ und damit $\partial f(u) = \emptyset$ nach Definition 3.5.

Insbesondere ist der Graph des Subdifferentials der Indikatorfunktion χ nicht leer und es gelten folgende Implikationen:

$$\begin{aligned} u \in C \quad &\Rightarrow \quad 0 \in \partial\chi(u)\,, \\ u \in \operatorname{int} C \quad &\Rightarrow \quad \partial\chi(u) = \{0\}\,. \end{aligned} \tag{3.17}$$

In der Tat ist für $u \in C$ die Ungleichung $0 \leq \langle u^*, u-v\rangle$ sogar für alle $v \in X$ erfüllt, wenn man $u^* = 0$ setzt. Falls $u \in \operatorname{int} C$, dann folgt aus $u^* \in \partial\chi(u)$, dass $u^* = 0$. Denn zu $u \in \operatorname{int} C$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(u) \subseteq C$. Wir haben also für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$, dass $v := u + \frac{r}{2}\,w \in C$. Aus (3.13) folgt dann

$$0 \leq \big\langle u^*, u - (u + \tfrac{r}{2}\,w)\big\rangle = -\tfrac{r}{2}\,\langle u^*, w\rangle\,.$$

Wir ersetzen w durch $-w$ und erhalten $0 \leq \frac{r}{2}\langle u^*, w\rangle$. Insgesamt folgt daher $0 = \langle u^*, w\rangle$ für alle $w \in X$ mit $\|w\| = 1$ und also $u^* = 0$.

3.18 Lemma. *Sei C eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reellen Banachraumes X. Dann ist $\partial\chi\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. 1. $\partial\chi\colon C \to 2^{X^*}$ ist monoton: Seien $(u,u^*), (v,v^*) \in \partial\chi$, d.h. $u,v \in D(\partial\chi) = C, u^* \in \partial\chi(u), v^* \in \partial\chi(v)$, dann gilt für alle $w \in C$:

$$\begin{aligned} \langle u^*, u-w\rangle &\geq 0\,, \\ \langle v^*, v-w\rangle &\geq 0\,, \end{aligned}$$

und somit

$$\langle u^*-v^*, u-v\rangle = \langle u^*, u-v\rangle + \langle v^*, v-u\rangle \geq 0\,,$$

d.h. $\partial\chi$ ist monoton.

2. $\partial\chi\colon C \to 2^{X^*}$ ist maximal monoton: Sei $(u, u^*) \in C \times X^*$, und es gelte für alle $(v, v^*) \in \partial\chi$

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0\,.$$

Nun ist aber $0 \in \partial\chi(v)$ und wir erhalten

$$\langle u^*, u - v\rangle \geq 0\,,$$

d.h. $u^* \in \partial\chi(u)$. ■

Die Frage ist, ob $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ ebenfalls maximal monoton ist. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir einen kurzen Ausflug in die Theorie der *Konvexitäts-* und *Glattheitseigenschaften* von Banachräumen machen (cf. Abschnitt A.9).

3.19 Definition. *Sei X ein reeller Banachraum und $\varphi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_X^2$. Dann wird die* ***Dualitätsabbildung*** *$J : X \to 2^{X^*}$ definiert durch*

$$J(u) := \partial\varphi(u)\,.$$

3.20 Lemma. *Sei H ein reeller Hilbertraum und J die Dualitätsabbildung $J\colon H \to 2^{H^*}$. Dann bildet J auf einelementige Mengen ab und kann daher als Operator $J\colon H \to H^*$ aufgefasst werden. Für diesen Operator gilt:*

$$\langle J(u), v\rangle_H = (u, v)_H\,.$$

Beweis. Nach Lemma 3.10 ist $\partial\varphi(u)$ einelementig, falls φ konvex ist und eine Gâteaux–Ableitung $D\varphi(u)$ besitzt. In diesem Fall gilt $\partial\varphi(u) = \{D\varphi(u)\}$.

1. φ ist konvex: Sei $t \in [0, 1]$. Dann gilt für u, $v \in H$:

$$\begin{aligned}
\varphi\big(tu + (1-t)v\big) &= \frac{1}{2}\|tu + (1-t)v\|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\big(t\|u\| + (1-t)\|v\|\big)^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(t^2\|u\|^2 + (1-t)^2\|v\|^2 + t(1-t)\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(t\|u\|^2 + (1-t)\|v\|^2\Big) = t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)\,,
\end{aligned}$$

da $2ab \leq a^2 + b^2$.

2. φ besitzt eine Gâteaux–Ableitung: Für $t \in \mathbb{R}$ und $v \in H$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi(u + tv) &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|u + tv\|^2\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}(u, u) + t(u, v) + \frac{1}{2}t^2(v, v)\Big) \\
&= (u, v) + t(v, v)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Gâteaux–Ableitung existiert und dass gilt:

$$\langle D\varphi(u), v\rangle = \frac{d}{dt}\varphi(u+tv)\Big|_{t=0} = (u,v)\,.$$

Die obige Formel für J folgt aus der Gleichungskette

$$\langle J(u), v\rangle = \langle \partial\varphi(u), v\rangle = \langle D\varphi(u), v\rangle = (u,v)\,,$$

wobei wir (3.11) benutzt haben. ■

Im Falle von Banachräumen haben wir:

3.21 Satz. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Falls der Dualraum X^* strikt konvex ist, dann bildet die Dualitätsabbildung J auf einelementige Mengen ab und kann daher als Operator $J\colon X \to X^*$ aufgefasst werden. Dieser Operator ist demistetig, beschränkt, koerziv, surjektiv und maximal monoton. Weiterhin haben wir für alle $u \in X$*

$$Ju = D\varphi(u)\,,$$

wobei $D\varphi$ die Gâteaux–Ableitung von $\varphi = \frac{1}{2}\|u\|_X^2$ ist.

(ii) *Falls zusätzlich X strikt konvex ist, dann ist J strikt monoton.*

(iii) *Falls der Dualraum X^* lokal gleichmäßig konvex ist, dann ist der Operator J zusätzlich zu den Behauptungen in* (i) *stetig und insbesondere ist φ Fréchet–differenzierbar.*

Bemerkungen. (i) Aus der Kettenregel (cf. Satz 2.2.7 und Bemerkungen danach) und den Behauptungen des Satzes folgt, mithilfe der Formel $\|u\| = \big(2\varphi(u)\big)^{1/2}$, dass die Norm $u \mapsto \|u\|$ auf $X \setminus \{0\}$ Gâteaux– bzw. Fréchet–differenzierbar ist, falls der Dualraum X^* strikt konvex bzw. lokal gleichmäßig konvex ist.

(ii) Die Behauptung aus Bemerkung (i) ist im Allgemeinen, ohne die zusätzlichen Annahmen, falsch. Davon überzeugt man sich leicht am Beispiel des $\mathbb{R}^2$, versehen mit der Maximumsnorm. Aus der Darstellung

$$\|z\|_\infty = \max(|x|,|y|) = \frac{1}{2}\Big(|x| + |y| + \big||y|-|x|\big|\Big)$$

für $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ berechnet sich der Gradient der Funktion $z \mapsto \|z\|_\infty$ formal als

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{|x|}\Big(1 - \frac{|y|-|x|}{\big||y|-|x|\big|}\Big), \frac{y}{|y|}\Big(1 + \frac{|y|-|x|}{\big||y|-|x|\big|}\Big)\right)$$

und ist somit in den Punkten $(x, \pm x), x \in \mathbb{R}$ nicht definiert. In der Tat ist $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ *nicht* strikt konvex, da die Oberfläche der „Einheitskugel“ $\partial B_1(0)$ Geradenstücke enthält.

Beweis (Satz 3.21). Wir definieren eine Abbildung $A\colon X \to 2^{X^*}$ durch:

$$Au := \big\{ u^* \in X^* \,\big|\, \langle u^*, u\rangle = \|u\|^2,\ \|u^*\| = \|u\| \,\big\}\,.$$

1. Die Menge Au ist nicht leer: Um dies zu beweisen, definieren wir auf $X_0 = \operatorname{span}(u)$ durch

$$f(tu) := t\,\|u\|^2$$

ein stetiges, lineares Funktional $f\colon X_0 \to \mathbb{R}$, mit $\|f\| = \|u\|$. Aufgrund einer Folgerung des Satzes von Hahn–Banach (cf. Folgerung A.10.9) können wir f als ein stetiges, lineares Funktional $u^*\colon X \to \mathbb{R}$ fortsetzen, mit $\|u^*\| \le \|f\| = \|u\|$. Offensichtlich haben wir $\langle u^*, u\rangle = f(u) = \|u\|^2$, woraus aufgrund der Definition der Norm $\|u^*\|_{X^*}$ folgt: $\|u^*\|_{X^*} = \|u\|_X$. Also gilt $Au \ne \emptyset$.

2. Die Menge Au ist einelementig: Seien $u_i^* \in Au$, $i = 1, 2$, d.h.

$$\langle u_i^*, u\rangle = \|u\|^2 = \|u_i^*\|^2\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Dann gilt für alle $u \in X$:

$$2\,\|u_1^*\|\,\|u\| = \langle u_1^* + u_2^*, u\rangle \le \|u_1^* + u_2^*\|\,\|u\|\,,$$

und somit $\|u_1^*\| \le \|2^{-1}(u_1^* + u_2^*)\|$. Dies ist nur für $u_1^* = u_2^*$ möglich, da X^* strikt konvex ist und wir $\|u_1^*\| = \|u_2^*\|$ haben (cf. Abschnitt A.9).

3. $A\colon X \to X^*$ ist demistetig: Sei $(u_n) \subset X$ eine Folge mit $u_n \to u$ in X $(n \to \infty)$. Aufgrund der Definition der Abbildung A haben wir auch $\|Au_n\| = \|u_n\| \to \|u\|$ $(n \to \infty)$, und somit ist die Folge (Au_n) in X^* beschränkt. Da X^* reflexiv ist, existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$Au_{n_k} \rightharpoonup u^* \ \text{ in } X^* \quad (n \to \infty)\,.$$

Aus Lemma A.8.6 (iii) folgt daher

$$\|u^*\| \le \liminf_{k\to\infty} \|Au_{n_k}\| = \liminf_{k\to\infty} \|u_{n_k}\| = \|u\|\,,$$

was zusammen mit (cf. Lemma 0.3 (ii))

$$\langle u^*, u\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Au_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|^2 = \|u\|^2$$

liefert, dass $\|u^*\| = \|u\|$ gilt. Insgesamt erhalten wir also $u^* = Au$. Aus dem Konvergenzprinzip (cf. Lemma 0.3 (iii)) folgt dann, dass die gesamte Folge (Au_n) schwach gegen Au konvergiert, d.h. A ist demistetig.

4. φ ist Gâteaux–differenzierbar und $D\varphi(u) = Au$: Mithilfe der Definition von A und $\big(\|v\| - \|u\|\big)^2 \ge 0$ erhalten wir, dass für alle $u, v \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle Av, v-u\rangle &\geq \langle Av, v\rangle - \|Av\|\,\|u\| \\ &= \|v\|^2 - \|v\|\,\|u\| \\ &\geq \|v\|^2 - 2^{-1}\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big) = 2^{-1}\big(\|v\|^2 - \|u\|^2\big) \\ &\geq \|u\|\,\|v\| - \|u\|^2 \\ &\geq \langle Au, v-u\rangle\,.\end{aligned}$$

Wenn wir nun $v = u + th$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in X$, wählen, ergibt sich:

$$t\langle Au, h\rangle \leq 2^{-1}\big(\|u + t\,h\|^2 - \|u\|^2\big) \leq t\langle A(u + t\,h), h\rangle\,,$$

woraus folgt:

$$\langle Au, h\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{2^{-1}\big(\|u + t\,h\|^2 - \|u\|^2\big)}{t}\,,$$

da A demistetig, also insbesondere hemistetig ist. Somit ist die Gâteaux–Ableitung von $\varphi(u)$ gleich Au.

5. $J = A$: Aus dem gerade Bewiesenen und aus Lemma 3.10 (i) folgt $\partial\varphi = D\varphi$, da φ konvex ist, wie wir im Schritt 1 im Beweis von Lemma 3.20 gezeigt haben. Man beachte, das wir dort nur die Eigenschaften der Norm benutzt haben. Insgesamt ergibt sich also

$$J = \partial\varphi = D\varphi = A\,.$$

6. J ist koerziv und beschränkt: Aus der Definition von A und $J = A$ folgt:

$$\langle Ju, u\rangle = \|u\|^2\,, \qquad \|Ju\| = \|u\|\,,$$

also ist J koerziv und beschränkt.

7. J ist maximal monoton: Wir haben für alle $u, v \in X$:

$$\begin{aligned}\langle Ju - Jv, u - v\rangle &= \langle Ju, u\rangle + \langle Jv, v\rangle - \langle Jv, u\rangle - \langle Ju, v\rangle \\ &\geq \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\,\|v\| \\ &= \big(\|u\| - \|v\|\big)^2 \geq 0\,,\end{aligned} \tag{3.22}$$

d.h. J ist monoton. Aus Lemma 3.4 folgt also, dass J maximal monoton ist, da J nach Schritt 3 demistetig ist, also insbesondere hemistetig.

8. J ist surjektiv: Aufgrund von Satz 1.5 und der Bemerkung danach ist J surjektiv, da J monoton, koerziv und demistetig ist.

9. J ist strikt monoton: Sei X zusätzlich strikt konvex und seien $u, v \in X$ derart, dass

$$\langle Ju - Jv, u - v\rangle = 0\,.$$

Dann erhalten wir aufgrund von (3.22)

$$\begin{aligned} 0 &= \Big\langle Ju - J\Big(\frac{u+v}{2}\Big), \frac{u-v}{2}\Big\rangle + \Big\langle J\Big(\frac{u+v}{2}\Big) - Jv, \frac{u-v}{2}\Big\rangle \\ &\geq \big(\|u\| - \|2^{-1}(u+v)\|\big)^2 + \big(\|2^{-1}(u+v)\| - \|v\|\big)^2 \end{aligned}$$

und somit $\|u\| = \|2^{-1}(u+v)\| = \|v\|$. Da X strikt monoton ist, folgt daraus $u = v$ (cf. Abschnitt A.9), d.h. J ist strikt monoton.

10. $J\colon X \to X^*$ ist stetig: Sei $(u_n) \subset X$ eine Folge mit $u_n \to u$ in X $(n \to \infty)$. Aufgrund von Schritt 3 und Schritt 5, sowie der Eigenschaften von A und $J = A$, erhalten wir für eine Teilfolge

$$\|Ju_{n_k}\| \to \|Ju\|\,, \qquad Ju_{n_k} \rightharpoonup Ju \text{ in } X^* \quad (k \to \infty)\,.$$

Da X^* lokal gleichmäßig konvex ist, folgt aus Lemma A.9.1 dass $Ju_{n_k} \to Ju$ in X^* $(k \to \infty)$, d.h. J ist stetig. Da J die Gâteaux–Ableitung von φ ist, liefert uns Satz 2.2.5 (ii), dass J die Fréchet–Ableitung von φ ist. ∎

Der folgende Satz ist der Schlüssel zur Beantwortung unserer Frage nach der maximalen Monotonie von $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$.

3.23 Satz (Rockafellar 1966). *Sei $f\colon X \to (-\infty,\infty]$ konvex und unterhalbstetig auf dem reflexiven, reellen Banachraum X und sei $f \not\equiv +\infty$. Dann ist $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. 1. $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ ist monoton. Aufgrund von Lemma 3.12 (iv) ist ∂f nicht trivial. Seien (u,u^*), $(v,v^*) \in \partial f$, d.h. $u,v \in D(\partial f)$, $u^* \in \partial f(u)$, $v^* \in \partial f(v)$. Dann gilt nach Definition des Subdifferentials

$$\begin{aligned} f(v) - f(u) &\geq \langle u^*, v-u\rangle \qquad \forall v \in X\,, \\ f(u) - f(v) &\geq \langle v^*, u-v\rangle \qquad \forall u \in X\,. \end{aligned}$$

Eine Addition beider Ungleichungen ergibt

$$0 \geq \langle u^* - v^*, v-u\rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq \langle u^* - v^*, u-v\rangle\,,$$

d.h. ∂f ist monoton.

2. $\partial f\colon X \to 2^{X^*}$ ist maximal monoton: Sei $(u_0,u_0^*) \in X \times X^*$ so, dass für alle $(u,u^*) \in \partial f$ gelte

$$\langle u_0^* - u^*, u_0 - u\rangle \geq 0\,. \tag{3.24}$$

Zu zeigen ist jetzt, dass daraus $u_0^* \in \partial f(u_0)$ folgt, denn dann ist ∂f maximal monoton. Um dies zu beweisen benötigen wir folgendes Lemma:

3.25 Lemma. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.23 existiert ein strikt monotoner Operator $J\colon X \to X^*$ mit $R(J + \partial f) = X^*$.*

Beweis. Der Beweis des Lemmas, der das Herzstück des Satzes 3.23 ist, benutzt tiefe Zusammenhänge zwischen *Konvexitätseigenschaften* von X und *Glattheitseigenschaften* der Norm auf X. Nach Satz A.9.4 existiert auf X eine äquivalente Norm, so dass sowohl X bzgl. dieser neuen Norm als auch X^* bzgl. der dadurch induzierten Norm lokal gleichmäßig konvex sind. Wir bezeichnen diese Norm mit $\|\cdot\|_X$.

Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\inf_{u\in X} \psi(u) = \beta\,, \tag{3.26}$$

mit

$$\psi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + f(u) - \langle u^*, u\rangle\,,$$

wobei $u^* \in X^*$ beliebig, aber fest, ist. Aufgrund von Satz 3.21 existiert die Fréchet–Ableitung von $\frac{1}{2}\|u\|_X^2$ und wir definieren $J\colon X \to X^*$ durch

$$J(u) := \Big(\frac{1}{2}\|u\|_X^2\Big)'\,.$$

Satz 3.21 liefert auch, dass J strikt monoton ist. Somit erhalten wir, mithilfe der Summenformel für das Subdifferential (cf. Lemma 3.12 (v))

$$\partial\psi(u) = J(u) + \partial f(u) - u^*\,.$$

Das Funktional ψ hat folgende Eigenschaften:

(i) ψ ist unterhalbstetig und konvex, da es die Summe von Funktionalen mit diesen Eigenschaften ist (cf. Schritt 1 im Beweis von Lemma 3.20).

(ii) ψ ist koerziv, d.h. $\psi(u) \to \infty$ für $\|u\|_X \to \infty$. Aufgrund von Lemma 3.12 (i) existieren $a \in \mathbb{R}$ und $u_0^* \in X^*$, so dass für alle $u \in X$ gilt $f(u) \ge a + \langle u_0^*, u\rangle$. Demzufolge erhalten wir

$$\psi(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|_X^2 + a - \big(\|u_0^*\| + \|u^*\|\big)\|u\|_X\,,$$

woraus folgt, dass ψ koerziv ist.

Aufgrund dieser Eigenschaften garantiert Lemma 3.7, dass das Minimierungsproblem (3.26) eine Lösung besitzt. Nach Lemma 3.6 ist daher $0 \in \partial\psi(u)$ und somit gilt:

$$u^* \in J(u) + \partial f(u)\,,$$

d.h. $R(J + \partial f) = X^*$, da u^* beliebig gewählt war. ■

Wir fahren nun mit dem Beweis fort, dass ∂f maximal monoton ist. Dazu benutzen wir den Operator J aus Lemma 3.25. Da $J(u_0) + u_0^* \in X^*$ und $R(J + \partial f) = X^*$ gilt, erhalten wir, dass $(u, u^*) \in \partial f$ existiert mit

$$J(u) + u^* = J(u_0) + u_0^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_0^* - u^* = J(u) - J(u_0)\,. \tag{3.27}$$

Die Ungleichung (3.24) liefert

$$0 \le \langle u_0^* - u^*, u_0 - u \rangle = \langle J(u) - J(u_0), u_0 - u \rangle ,$$

d.h. $\langle J(u_0) - J(u), u_0 - u \rangle \le 0$. Der Operator J ist aber strikt monoton und somit erhalten wir $u = u_0$. Aus (3.27) folgern wir

$$u^* = u_0^* \in \partial f(u) = \partial f(u_0) ,$$

d.h. ∂f ist maximal monoton. ■

Hieraus folgt die folgende Verschärfung von Satz 3.21.

3.28 Folgerung. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum. Dann ist die Dualitätsabbildung $J\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. Sei φ durch $\varphi(u) := \frac{1}{2}\|u\|_X^2$ definiert. Dann ist offensichtlich $\varphi\colon X \to (-\infty, \infty) \subseteq (-\infty, \infty]$ ein konvexes (cf. Beweis von Lemma 3.20), unterhalbstetiges Funktional (φ ist sogar stetig). Nach Satz 3.23 ist $J = \partial\varphi$ maximal monoton. ■

Satz 3.23 liefert auch die Antwort auf unsere Frage nach der maximalen Monotonie von $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$.

3.29 Lemma. *Sei C eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines reflexiven, reellen Banachraumes X und $\chi\colon X \to (-\infty, \infty]$ seine Indikatorfunktion. Dann ist $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton.*

Beweis. Wir überprüfen, dass χ die Voraussetzungen von Satz 3.23 erfüllt.

1. Nach Definition der Indikatorfunktion nimmt χ nur die Werte 0 und ∞ an, d.h. $\chi\colon X \to (-\infty, \infty]$. Da die Menge C nicht leer ist, ist offensichtlich $\chi \not\equiv \infty$.

2. χ ist konvex: Da C konvex ist, gilt für alle $u, v \in C$:

$$\chi\big((1-t)u + tv\big) = 0 = 0 + 0 = (1-t)\chi(u) + t\chi(v) .$$

Falls $u \notin C$ und/oder $v \notin C$, gilt offensichtlich

$$\chi\big((1-t)u + tv\big) \le \infty = (1-t)\chi(u) + t\chi(v) .$$

3. χ ist unterhalbstetig: Wir müssen überprüfen, ob für alle $r \in \mathbb{R}$ das Urbild $\chi^{-1}((-\infty, r])$ abgeschlossen ist. Es gilt aber:

$$\chi^{-1}((-\infty, r]) = \{u \,|\, \chi(u) \le r\} = \begin{cases} \emptyset , & \text{falls } r < 0 , \\ C , & \text{falls } r \ge 0 . \end{cases}$$

Die leere Menge $\emptyset$ ist abgeschlossen und C ebenfalls nach Voraussetzung; also ist χ unterhalbstetig.

Satz 3.23 liefert nun, dass $\partial\chi\colon X \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist. ■

3.3.2 Zeitableitungen

In der modernen Mathematik werden bei der Untersuchung von parabolischen Differentialgleichungen und Evolutionsgleichungen die Ort– und Zeitvariablen unterschiedlich behandelt. Was bedeutet das?

In Gleichungen dieser Art ist die Unbekannte eine Funktion $u \in X$, wobei X ein Funktionenraum ist, dessen Elemente auf dem Raum–Zeitzylinder $I \times \Omega$ definiert sind, wobei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$ ist und $I = [0,T]$ ein gegebenes Zeitintervall. Nun kann man jedem $u\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$ durch die Vorschrift

$$[\tilde{u}(t)](x) := u(t,x)$$

eine Abbildung $\tilde{u}\colon I \to Y$ zuordnen, wobei Y ein Funktionenraum ist, dessen Elemente nur auf Ω definiert sind. Somit können wir also für alle $t \in I$ die Funktion $\tilde{u}(t)\colon \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto u(t,x)$ als ein Element dieses Funktionenraumes interpretieren. Damit haben wir zwei Sichtweisen für u: Einerseits kann man u als Funktion in Ort und Zeit betrachten, andererseits als Funktion in der Zeit mit Werten in einem Funktionenraum. Im Weiteren werden wir die zweite Sichtweise benutzen.

Eine weitere Besonderheit bei der Behandlung parabolischer Differentialgleichungen besteht darin, dass in natürlicher Weise *mehrere* Funktionenräume auftreten. Wir wollen dies am Beispiel der *Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } I \times \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } I \times \partial\Omega\,, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.30}$$

illustrieren. Sei u eine glatte Lösung von (3.30), die dann natürlich auch die *schwache Formulierung* von (3.30) erfüllt, d.h. für alle $\varphi \in L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega))$ gilt:

$$\int_I \int_\Omega \partial_t u\, \varphi\, dx\, dt + \int_I \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\, dx\, dt = \int_I \int_\Omega f \varphi\, dx\, dt\,. \tag{3.31}$$

Wenn wir nun $\varphi = u$ wählen, erhalten wir, mithilfe partieller Integration und der Young–Ungleichung, die *apriori Abschätzung* (cf. die Rechnung, die zu (1.2.63) führt und (3.37))

$$\|u\|^2_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))} \le c \left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} \right). \tag{3.32}$$

Mithilfe dieser Abschätzung erhält man, wenn man (3.31) als Gleichung für $\partial_t u$ auffasst, die Abschätzung

$$\left\|\partial_t u\right\|^2_{L^2(I;(W_0^{1,2}(\Omega))^*)} \le c \left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))} \right). \tag{3.33}$$

Also benötigt man zur Behandlung der Wärmeleitungsgleichung in natürlicher Weise die Räume $L^2(\Omega)$, $W_0^{1,2}(\Omega)$ und $W^{-1,2}(\Omega) := (W_0^{1,2}(\Omega))^*$.

Wir wollen nun einen Spezialfall der Theorie *verallgemeinerter Zeitableitungen* entwickeln. Eine ausführliche Darstellung kann man z.B. in [12, Kapitel 4] oder [24] finden.

Sei V ein Banachraum, der stetig in den Hilbertraum H einbettet, d.h. $V \subseteq H$ und für alle $x \in V$ gilt: $\|x\|_H \le c\,\|x\|_V$ (cf. Abschnitt A.12.1). Außerdem sei V dicht in H, d.h. $\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H$. Da die Einschränkung jedes stetigen, linearen Funktionals $f \in H^*$ auf V ein stetiges, lineares Funktional auf V definiert, d.h. $H^* \subseteq V^*$, und für alle $x \in V$ und $f \in H^*$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle f, x\rangle_H = \langle f, x\rangle_V &\le \|f\|_{V^*}\,\|x\|_V\\ &\le c\,\|f\|_{V^*}\,\|x\|_H\,,\end{aligned}$$

erhalten wir mithilfe der Dichtheit von V in H, dass H^* stetig in V^* einbettet. Aufgrund des Rieszschen Darstellungsatzes (cf. Satz A.10.3) können wir H mit H^* identifizieren und erhalten insgesamt

$$V \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow V^*\,.$$

Ein solches Tripel (V, H, V^*) heißt **Gelfand–Tripel**. Ein typisches Beispiel für ein Gelfand–Tripel ist $(W_0^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), W^{-1,2}(\Omega))$, also genau die Räume, die in natürlicher Weise bei der Behandlung der Wärmeleitungsgleichung auftreten.

Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel. Dann wird für alle $h \in H$ durch

$$\langle \bar{h}, v\rangle_V := (h, v)_H\,, \qquad v \in V\,,$$

ein stetiges, lineares Funktional $\bar{h} \in V^*$ definiert. Die Zuordnung $h \mapsto \bar{h}$, aufgefasst als Abbildung von H nach V^*, ist linear, stetig und injektiv. Daher kann man $\bar{h}$ mit h identifizieren. In diesem Sinne haben wir also $H \hookrightarrow V^*$ und für alle $h \in H$ und alle $v \in V$ gilt:

$$\langle h, v\rangle_V = (h, v)_H\,.$$

Dies, zusammen mit der Symmetrie des Skalarproduktes in H, liefert für alle $v, w \in V$

$$\langle v, w\rangle_V = (v, w)_H = (w, v)_H = \langle w, v\rangle_V\,.$$

3.34 Definition. *Sei $u \in L^p(I;V)\,, 1 < p < \infty$ und (V, H, V^*) sei ein Gelfand–Tripel. Dann definieren wir die **verallgemeinerte Zeitableitung** $\frac{du}{dt}$ als ein Element des Raumes $L^{p'}(I;V^*)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, für das gilt:*

$$\int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}(t), v\Big\rangle_V \varphi(t)\,dt = -\int_0^T (u(t), v)_H\,\varphi'(t)\,dt \quad \forall v \in V\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})\,.$$

Bemerkung. Im Allgemeinen ist die verallgemeinerte Zeitableitung $\frac{du}{dt}$ *nicht* mit der schwachen Zeitableitung $\partial_t u$ identisch. Die schwache Ableitung $\partial_t u$ auf $I \times \Omega$ ist nämlich definiert durch:

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u \, \varphi \, dx \, dt = - \int_0^T \int_\Omega u \, \partial_t \varphi \, dx \, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(I \times \Omega) .$$

Beide Ableitungen stimmen jedoch überein, falls $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in V liegt.

Im Folgenden bezeichnen wir für $I = [0, T]$

$$\begin{aligned} W &:= \left\{ u \in L^p(I; V) \;\Big|\; \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I; V^*) \right\} , \\ \|u\|_W &:= \|u\|_{L^p(I;V)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^{p'}(I;V^*)} . \end{aligned} \tag{3.35}$$

Der Raum $(W, \|\cdot\|_W)$ ist ein *Banachraum*. Dieser ist *reflexiv*, falls $1 < p < \infty$ und V reflexiv ist.

3.36 Lemma. *Sei* (V, H, V^*) *ein Gelfand–Tripel und sei* W *in* (3.35) *definiert. Dann gilt die stetige Einbettung*

$$W \hookrightarrow C(I; H) ,$$

und für alle $u \in W$ *und alle* $s, t \in I$ *gilt:*

$$\int_s^t \left\langle \frac{du}{dt}(\tau) \, , \, u(\tau) \right\rangle_V d\tau = \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2} \|u(s)\|_H^2 . \tag{3.37}$$

Beweis. Der Beweis ist technisch und benutzt viele Approximationsargumente. Er findet sich z.B. in [12, Satz IV.1.17] oder in [24, Satz 23.23]. ∎

Bemerkung. Die Formel (3.37) ist das Analogon zu folgender Rechnung für reellwertige Funktionen $u \colon I \to \mathbb{R}$:

$$\int_s^t u'(t) u(t) \, dt = \int_s^t \frac{1}{2} (u^2(t))' \, dt = \frac{1}{2} |u(t)|^2 - \frac{1}{2} |u(s)|^2 .$$

3.38 Lemma. *Sei* (V, H, V^*) *ein Gelfand–Tripel, und sei der Raum* W *in* (3.35) *definiert. Ferner sei* $L \colon D(L) \subseteq L^p(I; V) \to L^{p'}(I; V^*)$*, definiert durch*

$$\begin{aligned} Lu &:= \frac{du}{dt} , \\ D(L) &:= \{ u \in W \mid u(0) = 0 \} . \end{aligned}$$

Dann ist L *ein linearer, maximal monotoner Operator auf* $D(L)$*.*

Beweis. 1. L ist per Definition linear.

2. L ist monoton: Seien u, $v \in D(L)$, dann gilt nach Lemma 3.36

$$\begin{aligned}\langle Lu - Lv, u - v\rangle_{L^p(I;V)} &= \int_0^T \Big\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v\Big\rangle_V \, dt \\ &= \frac{1}{2}\|(u-v)(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u-v)(0)\|_H^2 \geq 0\,,\end{aligned}$$

da u, $v \in D(L)$, und somit $u(0) = v(0) = 0$.

3. L ist maximal monoton: Sei $v \in L^p(I;V)$, $w \in L^{p'}(I;V^*)$, und es gelte für alle $u \in D(L)$

$$\langle w - Lu, v - u\rangle_{L^p(I;V)} = \int_0^T \langle w - Lu, v - u\rangle_V \, dt \geq 0\,. \tag{3.39}$$

Wir müssen $v \in D(L)$ und $w = \frac{dv}{dt}$ zeigen. Wir wählen $u = \varphi(t) z \in L^p(I;V)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, $z \in V$. Es gilt $u(0) = 0$ und $\frac{du}{dt} = \varphi'(t) z \in L^{p'}(I;V^*)$, da $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, und damit ist $u \in D(L)$. Außerdem haben wir

$$\langle Lu, u\rangle_{L^p(I;V)} = \int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}, u\Big\rangle_V \, dt = \frac{1}{2}\Big(\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2\Big) = 0\,, \tag{3.40}$$

da $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$. Wenn wir u in (3.39) einsetzen und (3.40) benutzen, erhalten wir

$$0 \leq \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle w, \varphi\, z\rangle_V - \langle \varphi' z, v\rangle_V \, dt + 0\,.$$

Nun gilt aber $\langle z, u\rangle_V = \langle u, z\rangle_V$ für alle u, $z \in V$ und somit

$$0 \leq \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle \varphi' v + \varphi\, w, z\rangle_V \, dt\,.$$

Da $z \in V$ beliebig war, gilt die Ungleichung auch für $-z$ und für λz, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig groß gewählt werden kann. Außerdem ist $\langle w, v\rangle_V$ unabhängig von z. Damit die Ungleichung für alle z richtig ist, muss daher gelten

$$\int_0^T \varphi \langle w, z\rangle_V + \varphi'(v, z)_H \, dt = 0 \qquad \forall z \in V\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})\,.$$

Dies ist aber gerade die Definition der verallgemeinerten Zeitableitung von v und somit erhalten wir $w = \frac{dv}{dt}$ sowie $\frac{dv}{dt} \in L^{p'}(I;V^*)$, d.h. $v \in W$. Zu zeigen bleibt, dass $v \in D(L)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $u \in D(L)$

$$0 \le \langle Lv - Lu, v - u \rangle_{L^p(I;V)} = \int_0^T \left\langle \frac{d(v-u)}{dt}, v - u \right\rangle_V dt \tag{3.41}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - u(T)\|_H^2 - \|v(0) - u(0)\|_H^2 \Big)\,,$$

da $v \in W$. Wir wählen eine Folge $(a_n) \subset V$ mit $a_n T \to v(T)$ in H $(n \to \infty)$. Wir definieren nun $u_n(t) = a_n t$, $u_n \in D(L)$, setzen u_n in (3.41) ein, und erhalten

$$0 \le \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - u_n(T)\|_H^2 - \|v(0) - u_n(0)\|_H^2 \Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - a_n T\|_H^2 - \|v(0)\|_H^2 \Big)\,.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daraus

$$0 \le -\frac{1}{2}\|v(0)\|_H^2\,,$$

d.h. $v(0) = 0$ und somit $v \in D(L)$. ■

3.3.3 Der Satz von Browder

Ähnlich wie in den vorangegangenen Abschnitten wollen wir die Lösbarkeit von

$$b \in Au + Bu\,, \qquad u \in C\,, \tag{3.42}$$

untersuchen, wobei $A\colon C \subseteq X \to 2^{X^*}$ ein maximal monotoner Operator und $B\colon C \to X^*$ ein pseudomonotoner Operator ist. Die Beziehung (3.42) bedeutet, wenn A eine mehrdeutige Abbildung ist, dass wir für ein gegebenes $b \in X^*$ ein Element $u \in C$ suchen, so dass gilt:

$$b = v + Bu\,, \qquad \text{mit } v \in Au\,.$$

Wenn A und B Operatoren sind, dann ist (3.42) äquivalent zu

$$b = Au + Bu\,, \qquad u \in C\,.$$

3.43 Satz (Browder 1968). *Sei $C \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines reflexiven, reellen Banachraumes X und sei $b \in X^*$. Ferner sei $A\colon C \to 2^{X^*}$ ein maximal monotoner Operator und $B\colon C \to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter, demistetiger Operator. Falls C unbeschränkt ist, sei der Operator B koerziv bzgl. des Operators A und des Elements $b \in X^*$, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$, und eine Zahl $r > 0$, so dass für alle $u \in C$ mit $\|u\| > r$ gilt:*

$$\langle Bu, u - u_0 \rangle > \langle b, u - u_0 \rangle\,.$$

Dann existiert eine Lösung $u \in C \cap D(A)$ des Problems (3.42).

Beweis. Die Strategie, die diesem Beweis zugrunde liegt, ist folgende:

- Galerkin–Approximation; aber dieses Mal führen wir sie nicht mit Gleichungen sondern mit Ungleichungen durch.
- Lösbarkeit der Galerkin–Ungleichungen; hierzu verwenden wir ein Abschneide–Argument.
- Apriori Abschätzungen für die Lösung der Galerkin–Ungleichungen; diese folgen aus der Koerzivität von B.
- Konvergenz der Galerkin–Methode; diese basiert auf der Pseudomonotonie von B.

Da $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist und C nichtleer, ist auch der Graph von A nicht leer. In der Tat, angenommen er sei leer, dann ist die Bedingung

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall\,(v, v^*) \in A$$

für ein beliebiges Paar $(u, u^*) \in C \times X^*$ erfüllt, da der Graph von A leer ist. Daraus folgt, dass $(u, u^*) \in A$ gilt, da A maximal monoton ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also existiert $(u_0, u_0^*) \in A$.

Man sieht sofort, dass für beschränkte Mengen C der Operator B koerziv bzgl. des Operators A und jedes Elements $b \in X^*$ ist, da für genügend großes r gilt: $C \cap \big(X \setminus B_r(0)\big) = \emptyset$.

Da der Graph von A nicht leer ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(0, 0) \in A$. Ansonsten gehen wir von dem Problem

$$b \in Au + Bu\,, \qquad\qquad u \in C\,,$$

über zu

$$b - u_0^* \in \bar{A}v + \bar{B}v\,, \qquad\qquad v \in C - u_0\,,$$

wobei $\bar{A}v := A(v + u_0)$ und $\bar{B}v := B(v + u_0) - u_0^*$. Aufgrund der Definition von $\bar{A}$ erhalten wir, dass $(v, v^*) \in \bar{A} \;\Leftrightarrow\; (v + u_0, v^*) \in A$ gilt. Sei nun $(u, u^*) \in (C - u_0) \times X^*$ derart, dass für alle $(v, v^*) \in \bar{A}$ gilt:

$$0 \leq \langle u^* - v^*, u - v\rangle = \langle u^* - v^*, u + u_0 - (v + u_0)\rangle\,.$$

Dies zusammen mit der maximalen Monotonie von $A : C \to 2^{X^*}$ impliziert, dass auch $\bar{A}\colon C - u_0 \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist. Da auch $\bar{B}$ nur eine Verschiebung von B ist, sieht man sofort, dass $\bar{B}\colon C - u_0 \to X^*$ demistetig und beschränkt ist. Um die Pseudomonotonie von $\bar{B}$ zu zeigen, wählen wir eine Folge $(u_n) \subset C - u_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ und

$$0 \geq \limsup_{n\to\infty} \langle \bar{B}u_n, u_n - u\rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle B(u_n + u_0) - u_0^*, u_n + u_0 - (u + u_0)\rangle\,.$$

Aufgrund der Pseudomonotonie von B erhalten wir für alle $w \in X$

$$\langle B(u + u_0) - u_0^*, u + u_0 - w\rangle \leq \liminf_{n\to\infty} \langle B(u_n + u_0) - u_0^*, u_n + u_0 - w\rangle\,,$$

was mit der Bezeichnung $\tilde{w} = w - u_0$ die Ungleichung

$$\langle \bar{B}u, u - \tilde{w} \rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle \bar{B}u_n, u_n - \tilde{w} \rangle$$

impliziert, d.h. $\bar{B}$ ist pseudomonoton. Aus der Koerzivität von B bezüglich A und b folgt für $v = u - u_0 \in C - u_0$, mit $\|v\| > r - \|u_0\|$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{B}v, v \rangle &= \langle B(v + u_0) - u_0^*, v \rangle = \langle Bu - u_0^*, u - u_0 \rangle \\ &> \langle b - u_0^*, u - u_0 \rangle = \langle b - u_0^*, v \rangle \,,\end{aligned}$$

d.h. $\bar{B}$ ist koerziv bezüglich $\bar{A}$ und $b - u_0^*$. Also erfüllt auch $\bar{B}$ die Voraussetzungen des Satzes.

1. Äquivalente Variationsungleichung: Wir suchen ein $u \in C$ mit:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v \rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A\,. \tag{3.44}$$

Dieses Problem ist äquivalent zu unserem ursprünglichen Problem (3.42). Wenn nämlich $u \in C$ die Ungleichung (3.44) löst, dann folgt aus der maximalen Monotonie von A, dass $(u, b - Bu) \in A$, d.h. insbesondere $b \in Au + Bu$ und $u \in D(A)$. Falls umgekehrt u eine Lösung von (3.42) ist, dann ist $b - Bu \in Au$ und die Ungleichung gilt aufgrund der Monotonie von A.

2. Apriori Abschätzung: Sei $u \in C$ eine Lösung (3.44). Da $(0, 0) \in A$, gilt

$$\langle b - Bu, u \rangle \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle Bu - b, u \rangle \le 0\,.$$

Andererseits ist B koerziv bezüglich A und b mit $u_0 = 0$. Daher gibt es ein $r > 0$ mit $\langle Bu - b, u \rangle > 0$ für alle $\|u\| > r$. Diese und die obige Ungleichung liefern die *apriori Abschätzung*

$$\|u\| \le r\,, \tag{3.45}$$

falls $u \in C$ eine Lösung von (3.44) ist.

3. Galerkin–Ungleichung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ die Menge aller endlich–dimensionalen linearen Unterräume Y von X. Wir wählen ein festes $Y \in \mathcal{L}$. Anstelle von (3.44) betrachten wir das approximative Problem: Wir suchen $u_Y \in C \cap Y$, das die Ungleichung

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v \rangle_Y \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y \tag{3.46}$$

löst. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass aus $Y \subseteq X$ die Relation $X^* \subseteq Y^*$ folgt. Dies ist so zu verstehen, dass für $v^* \in X^*$ die Einschränkung auf $Y \subseteq X$ sofort ein Element aus Y^* liefert, d.h. die Dualitätsprodukte auf beiden Räumen werden miteinander identifiziert, und es gilt für alle $v \in Y$:

$$\langle v^*, v \rangle_Y := \langle v^*, v \rangle_X\,.$$

4. Lösung von (3.46): Wir müssen eine weitere Approximation des Problems (3.46) durchführen. Dazu setzen wir für $R > 0$

$$
\begin{aligned}
K_R &:= \{v \in C \cap Y \,\big|\, \|v\|_X \leq R\}\,,\\
G_R &:= \{(v, v^*) \in A \,\big|\, v \in K_R\}\,.
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass beide Mengen nichtleer sind, da $(0,0) \in A$. Wir approximieren (3.46) durch das *abgeschnittene Problem*: Suche $u_R \in K_R$:

$$
\langle b - Bu_R - v^*, u_R - v\rangle_Y \geq 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in G_R\,. \tag{3.47}
$$

(a) Lösung des abgeschnittenen Problems: Auf das Problem (3.47) wollen wir Lemma 1.2.27 anwenden. Dazu setzen wir:
   - (α) $K = K_R$. Die Menge $K \subset Y$ ist konvex aufgrund der Definition und kompakt, da sie eine abgeschlossene Teilmenge des endlich–dimensionalen Raumes Y ist.
   - (β) $M = G_R$. Die Menge M ist monoton, da der Operator A insbesondere monoton ist.
   - (γ) $T\colon K \to X^*\colon\ u \mapsto b - Bu$. Der Operator T ist stetig, da B demistetig ist, d.h. aus $u_n \to u\,(n \to \infty)$, folgt $Bu_n \rightharpoonup Bu$ $(n \to \infty)$. Wir betrachten aber B eingeschränkt auf Y, d.h. $B\colon C \cap Y \to X^* \subseteq Y^*$ mit $\dim Y^* < \infty$. In endlich–dimensionalen Räumen impliziert schwache Konvergenz aber starke Konvergenz (cf. Lemma A.8.8). Also erhalten wir $Bu_n \to Bu$ $(n \to \infty)$, d.h. T ist stetig.

   Nach Lemma 1.2.27 hat das abgeschnittene Problem (3.47) demnach eine Lösung $u_R \in K_R$.

(b) Lösung der Galerkin–Ungleichung (3.46): Wir setzen

$$
\mathcal{S}_R := \big\{u_R \in K_R \,\big|\, u_R \text{ ist eine Lösung von (3.47)}\big\}\,,
$$

   d.h. $\mathcal{S}_R \subseteq K_R$ für alle $R > 0$. Aus der Koerzivität von B bezüglich A und b (cf. Schritt 2) folgt:

$$
\|u_R\| \leq r, \tag{3.48}
$$

   wobei r unabhängig von R und $Y \in \mathcal{L}$ ist. Die Menge $\mathcal{S}_R$ hat folgende Eigenschaften:
   - (α) $\mathcal{S}_R$ ist abgeschlossen: Sei $(u_n) \subset \mathcal{S}_R$, mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Da B demistetig ist folgt also $Bu_n \rightharpoonup Bu$ $(n \to \infty)$. Somit bleibt die Ungleichung (3.47) beim Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten, d.h. $u \in \mathcal{S}_R$.
   - (β) $\mathcal{S}_R$ ist kompakt: Die Menge $\mathcal{S}_R$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von K_R, und K_R, als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des endlich–dimensionalen Raumes Y, ist selbst kompakt.
   - (γ) $\mathcal{S}_{R'} \subseteq \mathcal{S}_R$ für alle R', R mit $R' \geq R \geq r$: Für $R' \geq R \geq r$ gilt aufgrund der Konstruktion: $G_R \subseteq G_{R'}$.

Für eine Folge $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ bilden also die Mengen $\mathcal{S}_{R_n}$ eine absteigende Folge kompakter Mengen und somit (cf. endliches Durchschnittsprinzip Lemma A.1.3) folgt die Existenz eines Elements u_Y mit

$$u_Y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{R_n} \,.$$

Aus (3.48) und der Definition von $K_R \subseteq C$ erhalten wir sofort

$$\|u_Y\| \le r \qquad \text{und} \qquad u_Y \in C\,. \tag{3.49}$$

Außerdem ist u_Y eine Lösung von (3.46), denn für $(v, v^*) \in A, v \in C \cap Y$ gilt: Es existiert ein R_{n_0}, so dass $\|v\| \le R_{n_0}$. Damit ist u_Y eine Lösung von (3.47) für R_{n_0}. Da aber u_Y für alle R_n $(n \to \infty)$ in $\mathcal{S}_{R_n}$ liegt und v beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y.$$

5. Konvergenz der Galerkin–Lösungen u_Y: Wir wollen zeigen, dass in einem gewissem Sinne gilt: "$u_Y \to u$", wobei u eine Lösung von (3.44) sein wird. Hierbei tritt das Problem auf, dass Pseudomonotonie nur über (abzählbare) Folgen definiert ist, das System $\mathcal{L}$ aber überabzählbar ist. Also ist eine weitere Approximation nötig. Seien $Y, Z \in \mathcal{L}$. Wir setzen

$$M_Z := \{(u_Y, Bu_Y) \in C \times X^* \,\big|\, u_Y \text{ Lösung von (3.46) mit } Y \supseteq Z\}\,.$$

Zuerst zeigen wir, dass es ein Element

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^{w} \tag{3.50}$$

gibt, wobei $\overline{M}_Z^{w}$ der Abschluss von M_Z in $X \times X^*$ bzgl. der schwachen Topologie ist. Dieses u wird letztendlich die gesuchte Lösung sein.

(a) Beweis von (3.50): Aus der apriori Abschätzung (3.49) erhalten wir, dass für alle $Y \in \mathcal{L}$ gilt $\|u_Y\| \le r$. Da $B\colon X \to X^*$ beschränkt ist, ist die Bildmenge $B(B_r)$ auch beschränkt. Also gibt es einen abgeschlossenen Ball $K \subseteq X \times X^*$, so dass

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} M_Z \subseteq K\,.$$

Da X reflexiv ist, sind es auch X^* und $X \times X^*$ (cf. Lemma A.7.4). Da K stark abgeschlossen, beschränkt und konvex ist, ist K auch schwach kompakt (cf. Folgerung A.8.14). Nun ist aber für alle $Z \in \mathcal{L}$ die Menge $\overline{M}_Z^{w}$ schwach abgeschlossen und es gilt: $\overline{M}_Z^{w} \subseteq K$. Demzufolge ist auch

$\overline{M}_Z^w$ schwach kompakt, und

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^w \subseteq K\,.$$

Seien nun $Y, Z \in \mathcal{L}$ beliebig aber fest. Wir setzen $S = \operatorname{span}\{Y, Z\}$ und erhalten $M_Y \cap M_Z \supseteq M_S$. In der Tat, sei $(u_S, Bu_S) \in M_S$. Dann ist u_S eine Lösung von (3.46) in einem Raum $U \supseteq S = \operatorname{span}\{Y, Z\} \supseteq Y$ und $U \supseteq S \supseteq Z$. Das bedeutet aber $(u_S, Bu_S) \in M_Z \cap M_Y$. Wiederholen wir dieses Argument endlich oft, erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^{N} \overline{M}_{Y_i}^w \neq \emptyset \qquad\qquad \forall\, N \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, Y_i \in \mathcal{L}\,.$$

Aus dem endlichen Durchschnittsprinzip (cf. Lemma A.1.3) folgt somit (3.50).

(b) Konstruktion eines speziellen Paares (v_0, v_0^*): Es existiert $(v_0, v_0^*) \in A$, so dass gilt:

$$\langle b - u^* - v_0^*, u - v_0 \rangle \leq 0\,. \tag{3.51}$$

Sei dem nicht, so dann gilt für alle $(v, v^*) \in A$:

$$\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle > 0\,.$$

Da A maximal monoton ist, folgt $b - u^* \in Au$. Somit können wir $v = u$ und $v^* = b - u^*$ wählen und erhalten $\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also gilt (3.51).

(c) Spezielle Approximation: Wir wählen nun $Y \in \mathcal{L}$ fest: Die Menge $\overline{M}_Y^w$ ist schwach abgeschlossen in $X \times X^*$, und $(u, u^*) \in \overline{M}_Y^w$ wegen (3.50). Aufgrund von Lemma A.8.17 gibt es eine Folge $(u_n, u_n^*) \subset M_Y$ mit $(u_n, u_n^*) \rightharpoonup (u, u^*)$ in $X \times X^*\, (n \to \infty)$. Nach Konstruktion von M_Y ist $u_n^* = Bu_n$ und insbesondere $u_n \in C$. Die Menge C ist stark abgeschlossen und konvex, also auch schwach abgeschlossen (cf. Satz A.8.9), daher liegt auch u in C. Nach Lemma A.8.17 gibt es eine Folge $(u_n) \subset C$, so dass

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{in } X \\ Bu_n &\rightharpoonup u^* \quad \text{in } X^* \end{aligned} \qquad (n \to \infty)\,, \tag{3.52}$$

und

$$\langle b - Bu_n - v^*\,,\ u_n - v \rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,, \tag{3.53}$$

denn $u_n \in M_Y$, und Elemente von M_Y sind Lösungen von (3.46).

(d) Pseudomonotonie von B: Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$\langle Bu, u - v \rangle \leq \langle b - v^*, u - v \rangle \qquad \forall\, (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,,$$

denn damit haben wir gezeigt, dass (3.44) und damit auch (3.42) für alle $v \in Y \cap C$ gilt. Wir beschränken uns dazu auf solche $Y \in \mathcal{L}$ mit $v_0 \in Y$, wobei v_0 das Element aus 5. (b) ist. Wir wählen ein festes, aber beliebiges Y mit dieser Eigenschaft. Aus (3.53) folgt für alle $w \in C$, $(v, v^*) \in A, v \in Y \cap C$, und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle Bu_n, u_n - w\rangle \leq \langle b - v^*, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle . \tag{3.54}$$

Wir wählen insbesondere $w = v$. Dies ist möglich, da $D(A) \subseteq C$. Somit folgt aus (3.54)

$$\langle Bu_n, u_n - v\rangle \leq \langle b - v^*, u_n - v\rangle \qquad \forall\, (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,. \tag{3.55}$$

Nun wählen wir $w = u$, $v = v_0$ und $v^* = v_0^*$, wobei (v_0, v_0^*) das spezielle Paar aus 5. (b) ist, und erhalten aus (3.54)

$$\langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq \langle b - v_0^*, u_n - v_0\rangle + \langle Bu_n, v_0 - u\rangle$$

und somit mit Hilfe von (3.52) und (3.51)

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq \langle b - v_0^* - u^*, u - v_0\rangle \leq 0\,,$$

d.h. $\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \leq 0$. Da der Operator B pseudomonoton ist und $u_n \rightharpoonup u\, (n \to \infty)$, folgt mit Hilfe von (3.55) für alle $(v, v^*) \in A, v \in Y \cap C$

$$\begin{aligned}\langle Bu, u - v\rangle &\leq \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v\rangle \\ &\leq \langle b - v^*, u - v\rangle\,,\end{aligned}$$

d.h. für alle $(v, v^*) \in A$, und $v \in Y \cap C$ gilt:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0\,.$$

Zu beliebigem $(v, v^*) \in A$ gibt es ein $Y \in \mathcal{L}$ mit $v \in Y$, denn $\bigcup\limits_{\substack{Y\in\mathcal{L}\\ v_0\in Y}} Y = X$.

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A\,,$$

d.h. $u \in C$ ist eine Lösung von (3.44).

Der Beweis des Satzes ist vollständig. ■

Bemerkungen. (i) Wie wir bereits im Beweis des Satzes bemerkt haben sind die Voraussetzungen des Satzes 3.43 für alle $b \in X^*$ erfüllt, falls die Menge C beschränkt ist.

(ii) Die Voraussetzungen von Satz 3.43 sind auch für alle $b \in X^*$ erfüllt, falls B **koerziv bezüglich** A ist, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$, so dass

$$\lim_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in C}} \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} = \infty\,. \tag{3.56}$$

Dann gibt es für alle $b \in X^*$ eine Lösung von (3.44), d.h. $R(A+B) = X^*$. In der Tat haben wir für $\|u\| > r$

$$\begin{aligned}\frac{\langle Bu-b, u-u_0\rangle}{\|u\|} &\geq \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\|\,\|u-u_0\|}{\|u\|} \\ &\geq \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} - \|b\|\frac{\|u\|+\|u_0\|}{\|u\|} \\ &\geq \frac{\langle Bu, u-u_0\rangle}{\|u\|} - 2\|b\|\,.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert gegen ∞ für $\|u\| \to \infty$. Somit gilt $\langle Bu, u-u_0\rangle > \langle b, u-u_0\rangle$ für alle $\|u\| > r$ mit r groß genug, d.h. die Bedingungen des Satzes 3.43 sind für alle $b \in X^*$ erfüllt.

3.3.4 Variationsungleichungen

Wir wollen nun Satz 3.43 auf Variationsungleichungen anwenden. Gegeben sei ein Operator $A\colon C \to X^*$, wobei $C \subseteq X$ eine konvexe, abgeschlossene Menge ist, und $b \in X^*$. Wir suchen ein $u \in C$ so, dass

$$\langle b - Au, u - v\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall v \in C\,. \tag{3.57}$$

Eine äquivalente Formulierung von (3.57) ist: Suche ein $u \in C$, so dass

$$b \in \partial\chi(u) + Au\,, \tag{3.58}$$

wobei χ die Indikatorfunktion von C ist, d.h.

$$\chi(u) = \begin{cases} 0 & u \in C\,, \\ \infty & u \in X \setminus C\,. \end{cases}$$

Wir haben gezeigt, dass das Subdifferential $\partial\chi$ gegeben ist durch:

$$\partial\chi(u) = \begin{cases} \{u^* \in X^* \,|\, \langle u^*, u-v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in C\} & u \in C\,, \\ \emptyset & u \in X \setminus C\,. \end{cases}$$

Daher ist $u \in C$ mit $b \in \partial\chi(u) + Au$ äquivalent zu $\langle b - Au, u-v\rangle \geq 0$ für alle $v \in C$. Falls $C = X$, so ist (3.57) äquivalent zur Operatorgleichung $Au = b$.

3.59 Satz. *Sei $C \neq \emptyset$ eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge eines reflexiven, reellen Banachraumes X. Der Operator $A\colon C \to X^*$ sei pseudomonoton, demistetig und beschränkt. Falls C unbeschränkt ist, existiere ein $u_0 \in C$, so dass*

$$\lim_{\substack{\|u\|\to\infty\\ u\in C}} \frac{\langle Au, u-u_0\rangle}{\|u\|} = \infty\,.$$

Dann gilt:

(i) *Für alle $b \in X^*$ gibt es eine Lösung u von* (3.57)*.*

(ii) *Falls $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist die Lösungsmenge von* (3.57) *abgeschlossen und konvex.*

(iii) *Falls $A\colon C \to X^*$ strikt monoton ist, ist* (3.57) *eindeutig lösbar.*

Beweis. ad (i): Die Menge C ist konvex, abgeschlossen und nichtleer, daher ist nach Lemma 3.29 das Subdifferential der Indikatorfunktion $\partial\chi : C \to 2^{X^*}$ maximal monoton. Wir haben auch gezeigt, dass für $u \in C$ gilt $\partial\chi(u) \neq \emptyset$ (cf. (3.17)). Um Satz 3.43 und die Bemerkungen nach diesem Satz anwenden zu können, wählen wir $A = \partial\chi$ und $B = A$. Also existiert ein $u \in C$, so dass

$$b \in \partial\chi(u) + Au\,.$$

Dies ist aufgrund obiger Überlegungen äquivalent zur Existenz einer Lösung von (3.57).

ad (ii): Wenn $A\colon C \to X^*$ monoton ist, ist (3.57) äquivalent zu: Suche $u \in C$, so dass

$$\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall v \in C\,. \tag{3.60}$$

In der Tat, sei u eine Lösung von (3.57), dann haben wir aufgrund der Monotonie von A

$$\begin{aligned}\langle Av, v-u\rangle &= \langle Au, v-u\rangle + \langle Av - Au, v-u\rangle\\ &\geq \langle Au, v-u\rangle \overset{(3.57)}{\geq} \langle b, v-u\rangle\,,\end{aligned}$$

d.h. u ist eine Lösung von (3.60). Sei umgekehrt u eine Lösung von (3.60). Wir setzen $v = (1-t)u + tw$, $w \in C$, $0 < t < 1$. Da C konvex ist, folgt $v \in C$. Die Ungleichung (3.60) impliziert daher

$$\langle b - A((1-t)u + tw)), u - w\rangle t \geq 0$$

oder äquivalent

$$\langle b - A((1-t)u + tw), u - w\rangle \geq 0\,.$$

Im Grenzübergang $t \to 0^+$ folgt, da A demistetig ist,

$$\langle b - Au, u - w\rangle \geq 0\,.$$

Das ist aber gerade (3.57).

Sei S die Lösungsmenge von (3.60) und seien $u, \bar{u} \in S$. Dann gilt für $w = (1-t)u + t\bar{u}$:

$$\begin{aligned}\langle b - Av, w - v\rangle &= \langle b - Av, (1-t)u + t\bar{u} - ((1-t)v + tv)\rangle \\ &= (1-t)\langle b - Av, u - v\rangle + t\langle b - Av, \bar{u} - v\rangle \geq 0\,,\end{aligned}$$

aufgrund von (3.60), d.h. die Lösungsmenge S ist konvex. Sei $(u_n) \subseteq S$ eine Folge mit $u_n \to u$ $(n \to \infty)$. Dann gilt:

$$\langle b - Av, u_n - v\rangle \geq 0\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt $\langle b - Av, u - v\rangle \geq 0$ und damit $u \in S$. Also ist S abgeschlossen.

ad (iii): Für $u, \bar{u} \in S$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle b - Au, u - v\rangle &\geq 0\,, \\ \langle b - A\bar{u}, \bar{u} - v\rangle &\geq 0\,.\end{aligned}$$

Wir setzen $v = \bar{u}$ in die 1. Ungleichung ein und $v = u$ in die 2. Ungleichung, danach addieren wir beide Ungleichungen. Dies ergibt

$$\langle -Au + A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle Au - A\bar{u}, u - \bar{u}\rangle \leq 0\,.$$

Da A strikt monoton ist, folgt daraus $u = \bar{u}$. ■

Beispiel. Wir betrachten folgendes *Hindernisproblem*: Gesucht ist ein Element $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \\ u &\geq g && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.61}$$

wobei f, g gegebene Funktionen sind und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet ist. Diese Gleichungen beschreiben das Verhalten einer elastischen Membran unter dem Einfluss einer Kraft f, falls die Bewegung durch ein Hindernis g beeinflusst wird.

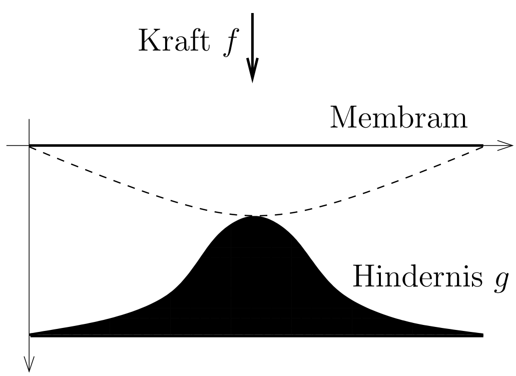


Abb. 2

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
C &:= \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, u \geq g \right\}, \\
\langle Au, v \rangle &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \,, \\
\langle b, v \rangle &:= \int_\Omega f v \, dx \,,
\end{aligned}
$$

und betrachten die folgende *Variationsungleichung*: Suche ein $u \in C$ mit

$$
\langle b - Au, u - v \rangle \geq 0 \,, \qquad \forall v \in C \,, \tag{3.62}
$$

d.h. suche ein $u \in C$ mit

$$
\int_\Omega f(u - v) \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (u - v) \, dx \geq 0 \qquad \forall v \in C \,.
$$

3.63 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert für alle $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in W^{1,2}(\Omega)$, $g \leq 0$ auf $\partial\Omega$, genau eine Lösung $u \in C$ der Variationsungleichung* (3.62).

Beweis. 1. Die Menge C ist nichtleer, da für

$$
v = \max(g, 0) = g^+
$$

offensichtlich $v \geq g$ gilt und man zeigen kann, dass v zum Raum $W^{1,2}(\Omega)$ gehört (cf. [10, Satz 4.2.4 (iii)]). Da auf dem Rand $\partial\Omega$ aufgrund unserer Voraussetzungen $v = 0$ gilt, ist also $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Offensichtlich ist C konvex. Die Menge C ist auch abgeschlossen, da für eine Folge $(u_n) \subseteq C$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,2}(\Omega)$ $(n \to \infty)$ folgt, dass es eine Teilfolge gibt mit $u_{n_k}(x) \to u(x)$ fast überall in Ω $(k \to \infty)$ (cf. Satz A.12.23, Satz A.11.12). Daraus folgt, dass auch $u \in C$.

2. Der Operator A ist stetig, strikt monoton und koerziv, wie wir in Lemma 1.28 gezeigt haben $(p = 2, s = 0)$.

Satz 3.59 liefert also sofort die Behauptung. ■

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Lösung der *Variationsungleichung* (3.62) und der Lösung unseres *ursprünglichen Problems* (3.61)? Falls die Lösung u und die Daten f, g glatt sind, dann erhalten wir, dass

$$
O := \{ x \in \Omega \,|\, u(x) > g(x) \}
$$

offen ist und dass

$$
B := \{ x \in \Omega \,|\, u(x) = g(x) \}
$$

abgeschlossen ist. Wir setzen $v = u + \tau\varphi$ mit $\varphi \in C_0^\infty(O)$ und $|\tau|$ klein. Da u und g glatt sind, ist $v \in C$, und es folgt

$$-\tau \int_\Omega f\varphi\,dx + \tau \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \tau \int_O \nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi\,dx \geq 0\,.$$

Wir ersetzen τ durch $-\tau$, und erhalten insgesamt

$$\int_O f\varphi\,dx - \int_O \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(O)\,.$$

Daraus folgt durch partielle Integration (cf. (12.17)), dass

$$\int_O (f + \Delta u)\,\varphi\,dx = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(O)\,,$$

woraus wir schließen

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } O\,.$$

Sei nun $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$, $0 < \tau \leq 1$. Wir setzen $v = u + \tau\varphi$. Dann ist $v \in C$ und es gilt:

$$-\tau \int_\Omega f\varphi\,dx + \tau \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx \geq 0\,.$$

Partielle Integration der Gleichung ergibt

$$-\int_\Omega (f + \Delta u)\,\varphi\,dx \geq 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \varphi \geq 0\,,$$

woraus wir schließen können

$$-\Delta u \geq f \qquad \text{in } \Omega\,.$$

Wir haben also gezeigt, dass eine glatte Lösung u der Variationsungleichung (3.62) das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &\geq f, \quad u \geq g && \text{in } \Omega\,, \\ -\Delta u &= f, \quad u > g && \text{in } O\,. \end{aligned}$$

löst. Man vergleiche dies mit dem Originalproblem (3.61).

3.3.5 Evolutionsprobleme

Satz 3.43 kann man auch auf Evolutionsprobleme anwenden. Wir betrachten folgendes *Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} + Au(t) = b(t)\,, \qquad & \forall\, t \in I := [0,T] \\ u(0) = 0\,. & \end{aligned} \tag{3.64}$$

Sei L definiert durch $Lu = \frac{du}{dt}$ mit

$$D(L) = \big\{u \in W \,\big|\, u(0) = 0\big\}\,,$$

wobei

$$W = \Big\{u \in L^p(I;V) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;V^*)\Big\}\,,$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Die Norm in W ist gegeben durch

$$\|u\|_W := \|u\|_{L^p(I;V)} + \left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L^{p'}(I;V^*)}\,.$$

Mithilfe von L schreibt sich (3.64) als

$$Lu + Au = b\,, \qquad u \in D(L)\,. \tag{3.65}$$

3.66 Satz. *Sei (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel. Wir setzen $X = L^p(I;V)$, $1 < p < \infty$, wobei $I = [0,T]$ mit $T < \infty$. Sei $A\colon X \to X^*$ ein pseudomonotoner, koerziver, demistetiger, beschränkter Operator. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in D(L)$ von* (3.64). *Falls A strikt monoton ist, ist diese eindeutig bestimmt.*

Beweis. 1. Existenz einer Lösung: Nach Lemma 3.38 ist L maximal monoton auf $D(L)$. Mithilfe von Lemma 3.36 zeigt man leicht, dass $D(L)$ konvex ist und abgeschlossen bzgl. der Norm von W. Mit $C = D(L)$, $u_0 = 0$, $A = L$ und $B = A$ sind die Voraussetzungen von Satz 3.43 und der Bemerkung danach erfüllt. Daher gibt es ein $u \in D(L)$, das (3.64) löst.

2. Eindeutigkeit der Lösung: Seien u_1, $u_2 \in D(L)$ Lösungen von (3.64). Dann gilt

$$\begin{aligned} Lu_1 + Au_1 &= b\,, \\ Lu_2 + Au_2 &= b\,. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, folgt mithilfe von Lemma 3.36

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|(u_1 - u_2)(T)\|_H^2 - \|(u_1 - u_2)(0)\|_H^2\Big) + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle \\ &\geq \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle\,, \end{aligned}$$

wobei wir $u_1(0) = u_2(0) = 0$ benutzt haben. Da A strikt monoton ist, folgt daraus $u_1 = u_2$. ■

3.3.6 Quasilineare parabolische Gleichungen

Zur Illustration der allgemeinen Theorie betrachten wir nun folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f && \text{in } I \times \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } I \times \partial\Omega\,, \\ u(0) &= 0 && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.67}$$

wobei f eine gegebene rechte Seite ist und g die Bedingungen (2.18) und (2.23) erfüllt. Mit $I = [0,T]$ bezeichnen wir ein endliches Zeitintervall und Ω sei ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$. Wir setzen $V = W_0^{1,p}(\Omega), H = L^2(\Omega)$ und $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$, wobei wir V mit der äquivalenten Norm $\|\nabla u\|_p$ versehen (cf. (A.12.26)). In Analogie zur quasilinearen elliptischen Gleichung (2.13) definieren wir für alle $u, v \in X$:

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, v\rangle_X &:= \int\limits_I \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \, dx\, dt\,, \\ \langle A_2 u, v\rangle_X &:= \int\limits_I \int\limits_\Omega g(u)\, v \; dx\, dt\,. \end{aligned}$$

Im Folgenden bezeichnen wir die Gleichung (2.13) und die dazugehörigen Operatoren $A_1 \colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ und $A_2 \colon W_0^{1,p}(\Omega) \to (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ als den *stationären* Fall und die Gleichung (3.67) und die gerade definierten Operatoren A_1 und A_2 als den *instationären* Fall. Wie wir in den Lemmata 1.28 und 1.26 ($s = 0$) gezeigt haben, ist der Operator A_1 im stationären Fall stetig, monoton, beschränkt und koerziv. Weiterhin wissen wir aus Lemma 2.17, dass der Operator A_2 im stationären Fall beschränkt und stark stetig ist, falls $r < \frac{dp}{d-p}$. In Lemma 2.22 wurde gezeigt, dass im stationären Fall der Operator $A_1 + A_2$ pseudomonoton, koerziv, stetig und beschränkt ist.

Im hier vorliegenden instationären Fall müssen wir einerseits zeigen, dass der Operator $A_1 + A_2$ den Raum $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$ in seinen Dualraum $X^* = (L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)))^* = L^{p'}(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ abbildet, und andererseits überprüfen, inwieweit sich die Eigenschaften der Operatoren vom stationären Fall auf den instationären Fall übertragen lassen.

3.68 Lemma. *Sei $1 < p < \infty$ und $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$. Dann bildet der Operator A_1 den Raum X in seinen Dualraum X^* ab.*

Beweis. Mithilfe der Hölder–Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle A_1 u, v\rangle_X &\le \int\limits_I \int\limits_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v|\, dx\, dt \\ &\le \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(I\times\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(I\times\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Damit folgt $A_1 \colon X \to X^*$. ■

3.69 Lemma. *Für alle* $1 < p < \infty$ *ist der Operator* $A_1 \colon X \to X^*$ *strikt monoton, stetig, koerziv und beschränkt.*

Beweis. Dies folgt völlig analog zum Beweis von Lemma 1.26 und Lemma 1.28 mit $s = 0$, allerdings muss beim Beweis der Stetigkeit und der Koerzivität anstatt mit den Räumen $L^p(\Omega)$ bzw. $L^{p'}(\Omega)$ mit den Räumen $L^p(I\times\Omega)$ bzw. $L^{p'}(I \times \Omega)$ gearbeitet werden. ∎

Im Beweis von Lemma 2.17 wurde für den Nachweis der starken Stetigkeit von A_2 die *kompakte* Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)$, $r < \frac{dp}{d-p}$, benutzt (cf. Satz A.12.24). Im Allgemeinen gilt allerdings *nicht*, dass die Einbettung

$$X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^p(I; L^r(\Omega))\,,$$

mit $r < \frac{dp}{d-p}$, kompakt ist. Dies sieht man sofort, wenn man eine Folge $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ betrachtet, die schwach in $L^p(I)$ gegen ein $f \in L^p(I)$ konvergiert, für die aber nicht $f_n \to f$ stark in $L^p(I)\,(n \to \infty)$ gilt. Für ein beliebiges, aber festes, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ kann dann die Folge

$$u_n(t,x) = f_n(t)v(x) \ \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$$

nicht stark in $L^p(I; L^r(\Omega))$ konvergieren. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|^p_{L^p(I;L^r(\Omega))} &= \int\limits_0^T \bigg(\int\limits_\Omega |f_n(t) - f(t)|^r \, |v(x)|^r \, dx \bigg)^{\frac{p}{r}} dt \\
&= \|v\|^p_{L^r(\Omega)} \, \|f_n - f\|^p_{L^p(I)}
\end{aligned}$$

und somit konvergiert $u_n \to u$ in $L^p(I; L^r(\Omega))\,(n \to \infty)$ genau dann, wenn $f_n \to f$ in $L^p(I)$ $(n \to \infty)$. Wenn wir allerdings A_2 nur auf dem Raum

$$W = \big\{ u \in L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \,\big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}\big(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big) \big\} \tag{3.70}$$

betrachten, erhalten wir eine kompakte Einbettung für W.

Wir betrachten folgende allgemeinere Situation. Seien B, B_0, B_1 Banachräume, wobei B_0 und B_1 reflexiv sind und folgende Einbettungen gelten:

$$B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \hookrightarrow B_1\,, \tag{3.71}$$

d.h. insbesondere bettet B_0 kompakt in B ein. Wir bezeichnen

$$W_0 := \Big\{ u \in L^{p_0}(I; B_0) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(I; B_1) \Big\}\,, \tag{3.72}$$

mit $1 < p_0, p_1 < \infty$, und versehen W_0 mit der Norm

$$\|u\|_{W_0} := \|u\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + \Big\| \frac{du}{dt} \Big\|_{L^{p_1}(I;B_1)}\,.$$

Offensichtlich ist W_0 ein reflexiver Banachraum und es gilt:

$$W_0 \hookrightarrow L^{p_0}(I;B)\,. \tag{3.73}$$

Allerdings haben wir folgendes stärkere Resultat:

3.74 Lemma (Aubin 1963, Lions 1969). *Unter den Voraussetzungen* (3.71) *und* $1 < p_0, p_1 < \infty$ *ist die Einbettung* (3.73) *kompakt, d.h.*

$$W_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_0}(I;B)\,. \tag{3.75}$$

Bevor wir dies beweisen, benötigen wir noch folgendes Resultat:

3.76 Lemma. *Unter den Voraussetzungen* (3.71) *gibt es für alle* $\eta > 0$ *eine Konstante* $d(\eta)$*, so dass für alle* $v \in B_0$ *gilt:*

$$\|v\|_B \le \eta \|v\|_{B_0} + d(\eta)\|v\|_{B_1}\,. \tag{3.77}$$

Beweis. Falls (3.77) nicht gilt, gibt es ein $\eta > 0$ und Folgen $(v_n) \subset B_0$ und $(d_n) \subset \mathbb{R}^+, d_n \to \infty\,(n \to \infty)$, so dass

$$\|v_n\|_B \ge \eta \|v_n\|_{B_0} + d_n \|v_n\|_{B_1}\,.$$

Wir setzen $w_n = v_n/\|v_n\|_{B_0}$ und erhalten

$$\|w_n\|_B \ge \eta + d_n\|w_n\|_{B_1}\,. \tag{3.78}$$

Aufgrund der Einbettung (3.71) und der Definition von w_n gilt:

$$\|w_n\|_B \le c\,\|w_n\|_{B_0} = c\,,$$

und somit folgt aus (3.78) und $d_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, dass

$$\|w_n\|_{B_1} \to 0 \qquad (n \to \infty)\,. \tag{3.79}$$

Allerdings gilt nach Konstruktion: $\|w_n\|_{B_0} = 1$. Somit folgt aus der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$, dass es eine Teilfolge (w_{n_k}) gibt, so dass

$$w_{n_k} \to w \ \text{ in } B \qquad (k \to \infty)\,.$$

Aus der Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ ergibt sich sofort

$$w_{n_k} \to w \ \text{ in } B_1 \qquad (k \to \infty)\,,$$

was zusammen mit (3.79) $w = 0$ liefert. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass gilt:

$$\|w_{n_k}\|_B \to 0 \qquad (k \to \infty)\,,$$

was ein Widerspruch zu (3.78) ist, da $\eta > 0$. ■

Beweis (Lemma 3.74). Sei (v_n) eine beschränkte Folge in W_0. Da W_0 reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}), für die gilt:

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{in } W_0 \qquad (k \to \infty)\,.$$

Wenn wir zur Folge $u_k = v_{n_k} - v$ übergehen, erhalten wir also

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup 0 && \text{in } W_0 \qquad (n \to \infty)\,, \\ &\|u_n\|_{W_0} \le c && \forall n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Aufgrund von Lemma 3.76 gibt es für alle $\eta > 0$ ein $d(\eta)$ mit

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \eta \|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + d(\eta)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)}\,. \tag{3.81}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $(3.80)_2$ und (3.81) mit $\eta = \frac{\varepsilon}{2c}$ erhalten wir

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \frac{\varepsilon}{2} + d(\varepsilon)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)}\,.$$

Um den Satz zu beweisen, reicht es also zu zeigen, dass

$$u_n \to 0 \qquad \text{in } L^{p_0}(I;B_1) \qquad\qquad (n \to \infty)\,. \tag{3.82}$$

Aus der Definition von W_0 und der Einbettung $W^{1,p_1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ (cf. Satz A.12.23, Satz A.12.6) folgt sofort

$$W_0 \hookrightarrow W^{1,p_1}(I;B_1) \hookrightarrow C(\bar{I};B_1)\,. \tag{3.83}$$

Aus dieser Einbettung und $(3.80)_2$ erhalten wir weiter, dass für alle $t \in I$ gilt:

$$\|u_n(t)\|_{B_1} \le c\,. \tag{3.84}$$

Wir definieren für $0 < \lambda < 1$ fest, aber beliebig,

$$w_n(t) = u_n(\lambda t) \tag{3.85}$$

und erhalten unter Benutzung von $(3.80)_2$

$$\begin{aligned} w_n(0) &= u_n(0)\,, \\ \|w_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p_0}}}\|u_n\|_{L^{p_0}(0,\lambda T;B_0)} \le c\,\lambda^{-\frac{1}{p_0}}\,, \\ \Big\|\frac{d}{dt}w_n\Big\|_{L^{p_1}(I;B_1)} &= \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{1}{p_1}}}\Big\|\frac{d}{dt}u_n\Big\|_{L^{p_1}(0,\lambda T;B_1)} \le c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}}\,. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Sei $\varphi \in C^1(I)$ derart, dass $\varphi(T) = 0\,, \varphi(0) = -1$. Dann gilt:

$$w_n(0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\big(w_n(t)\varphi(t)\big)\,dt = \int_0^T \varphi(t)\,\frac{dw_n(t)}{dt}\,dt + \int_0^T \frac{d\varphi(t)}{dt}\,w_n(t)\,dt\,,$$

was zusammen mit $(3.86)_3$ liefert

$$\begin{aligned}\|w_n(0)\|_{B_1} &\le c(\varphi)\Big\|\frac{dw_n}{dt}\Big\|_{L^{p_1}(I;B_1)} + \Big\|\int_0^T \frac{d\varphi}{dt} w_n\,dt\Big\|_{B_1}\\ &\le c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} + \Big\|\int_0^T \frac{d\varphi}{dt} w_n\,dt\Big\|_{B_1}\,.\end{aligned} \tag{3.87}$$

Da $p_1 > 1$ ist, können wir $\lambda \in (0,1)$ derart wählen, dass

$$c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.88}$$

gilt. Aufgrund von $(3.86)_2$ gilt $w_n \in L^{p_0}(I;B_0) \hookrightarrow L^1(I;B_0)$, und somit erhalten wir mithilfe von (2.1.16), dass für alle $g \in B_0^*$ gilt:

$$\begin{aligned}\Big\langle g, \int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\,dt\Big\rangle_{B_0} &= \int_0^T \langle g, w_n\rangle_{B_0} \frac{d\varphi}{dt}\,dt\\ &= \int_0^{\lambda T} \Big\langle g\,\frac{d\varphi}{ds}\big(\frac{s}{\lambda}\big), u_n(s)\Big\rangle_{B_0} ds \to 0 \qquad (n\to\infty)\,,\end{aligned}$$

da $\frac{d\varphi}{ds}\, g \in L^{p_0'}(0,\lambda T;B_0^*)$ und $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^{p_0}(0,\lambda T;B_0)$ $(n\to\infty)$, aufgrund von (3.80). Also haben wir gezeigt, dass

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\,dt \rightharpoonup 0 \ \text{ in } B_0 \qquad (n\to\infty)\,,$$

was aufgrund der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$ impliziert

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\,dt \to 0 \ \text{ in } B \qquad (n\to\infty)\,.$$

Dies zusammen mit (3.87), (3.88) und $B \hookrightarrow B_1$ ergibt, da ε beliebig war,

$$u_n(0) = w_n(0) \to 0 \ \text{ in } B_1 \qquad (n\to\infty)\,.$$

Sei nun $s \in I$ beliebig. Ein völlig analoges Vorgehen mit w_n ersetzt durch

$$\widetilde{w}_n(t) = u_n(s+\lambda t)\,,$$

liefert sofort für alle $s \in I$

$$u_n(s) \to 0 \ \text{ in } B_1 \qquad (n\to\infty)\,.$$

Dies zusammen mit (3.84) und dem Satz über majorisierte Konvergenz (cf. Satz A.11.10), angewendet auf die reelle Funktionenfolge $\big(\|\mathbf{u}_n(\cdot)\|_{B_1}^{p_0}\big)$, liefert (3.82) und der Satz ist bewiesen. ∎

Durch eine entsprechende Wahl von B, B_0, B_1 und p_0, p_1 erhalten wir kompakte Einbettungen für den Raum W, definiert in (3.70). Wir benötigen allerdings einen weiteren Einbettungssatz für den Raum W.

3.89 Lemma. *Sei $\frac{2d}{d+2} \le p < d$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \ge 2$, ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Für alle Funktionen u aus dem Raum W, der in* (3.70) *mithilfe des Gelfand–Tripels $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ definiert wurde, gilt:*

$$\int_I \int_\Omega |u(t,x)|^q \, dx \, dt \le c \int_I \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^p \, dx \, dt \left(\sup_{t \in I} \int_\Omega |u(t,x)|^2 \, dx \right)^{\frac{p}{d}}, \tag{3.90}$$

wobei

$$q = \frac{d+2}{d} \, p \,. \tag{3.91}$$

Beweis. Aus Lemma 3.36 folgt die Einbettung $W \hookrightarrow C(I;H)$, d.h.

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\|_{L^2} \le c \, \|u\|_W \,. \tag{3.92}$$

Mithilfe der Hölder–Ungleichung erhalten wir für $r \ge 2$

$$\|u\|_{L^r} = \left(\int_\Omega |u|^{r\alpha} |u|^{r(1-\alpha)} \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \le \|u\|_{L^{r\alpha\delta}}^{\alpha} \|u\|_{L^{r(1-\alpha)\delta'}}^{1-\alpha} \,, \tag{3.93}$$

für $\alpha \in (0,1)$ und $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} = 1$ mit $1 < \delta < \infty$. Die Forderungen

$$r\alpha\delta = \frac{dp}{d-p} \,, \qquad r(1-\alpha)\delta' = 2 \tag{3.94}$$

liefern

$$\alpha = \frac{dp(r-2)}{r(dp + 2p - 2d)} \,. \tag{3.95}$$

Aus (3.93) zur Potenz r, folgt nach Integration über das Zeitintervall I und mithilfe der Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{dp}{d-p}}(\Omega)$ und der Äquivalenz der Normen in $W_0^{1,p}(\Omega)$ (cf. (A.12.26))

$$\begin{aligned} \int_I \|u(t)\|_{L^r}^r \, dt &\le c \int_I \|\nabla u(t)\|_{L^p}^{\alpha r} \, \|u(t)\|_{L^2}^{(1-\alpha)r} \, dt \\ &\le c \sup_{t \in I} \|u(t)\|_{L^2}^{(1-\alpha)r} \int_I \|\nabla u(t)\|_{L^p}^{\alpha r} \, dt \,. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Nun müssen wir sicherstellen, dass $\alpha r = p$ gilt, was zusammen mit (3.94) und (3.95) liefert

$$r = p\,\frac{d+2}{d}\,, \qquad \delta = \frac{d}{d-p}\,, \qquad \alpha = \frac{d}{d+2}\,, \qquad (1-\alpha)r = \frac{2}{d}\,p\,.$$

Dies, eingesetzt in (3.96), liefert (3.90). ∎

Bemerkung. Aufgrund von (3.92) kann man die Behauptung aus Lemma 3.89 auch schreiben als

$$\|u\|_{L^q(I\times\Omega)} \le c\,\|u\|_W\,, \qquad q = p\,\frac{d+2}{d}\,. \tag{3.97}$$

3.98 Folgerung. *Unter den Bedingungen von Lemma 3.89 ist die Einbettung*

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I\times\Omega)$$

kompakt falls

$$q < p\,\frac{d+2}{d}\,. \tag{3.99}$$

Beweis. Wenn man im Beweis von Lemma 3.89 anstatt (3.94) fordert, dass

$$r\alpha\delta = s < \frac{dp}{d-p} \qquad r(1-\alpha)\,\delta' = 2\,,$$

erhält man

$$\alpha = \frac{s(2-r)}{r(s-2)}\,.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.89 folgt dann

$$\int\limits_I \|u\|_{L^r}^r\,dt \le c\,\sup_{t\in I}\|u(t)\|_{L^2}^{r-p}\int\limits_I \|u(t)\|_{L^s}^p\,dt \tag{3.100}$$

für alle $r < p\,\frac{d+2}{d}$. Aufgrund von Satz 3.74 mit $B_0 = W_0^{1,p}(\Omega), B = L^s(\Omega)$, $s < \frac{dp}{d-p}$, $B_1 = (W_0^{1,p}(\Omega))^*, p_0 = p, p_1 = p'$ ergibt sich

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I;L^s(\Omega))\,. \tag{3.101}$$

Sei nun $(u_n) \subseteq W$ eine beschränkte, schwach konvergente Folge. Aufgrund von (3.101) gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$u_{n_k} \to u \ \text{ in } L^p(I;L^s(\Omega)) \quad (k\to\infty)\,. \tag{3.102}$$

Aus (3.100), (3.92) und (3.102) folgt also

$$\begin{aligned}\int\limits_I \|u_{n_k}(t)-u(t)\|_{L^r}^r\,dt &\le c\,\|u_{n_k}-u\|_W^{r-p}\int\limits_I \|u_{n_k}(t)-u(t)\|_{L^s}^p\,dt\\ &\le c\int\limits_I \|u_{n_k}(t)-u(t)\|_{L^s}^p\,dt \;\to 0 \quad (k\to\infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. $u_{n_k}\to u$ in $L^r(I\times\Omega)$ $(k\to\infty)$, falls $r<p\,\frac{d+2}{d}$. ■

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um den Operator A_2 zu betrachten (cf. Lemma 2.17).

3.103 Lemma. *Sei* $1<p<\infty\,, X=L^p(I;W_0^{1,p}(\Omega))$ *und genüge die stetige Funktion* g *der Bedingung* (2.18), *d.h.* g *besitzt* $(r-1)$–*Wachstum. Wenn* $r\le p\,\frac{d+2}{d}$ *gilt, dann bildet der Operator* A_2 *den in* (3.70) *definierten Raum* W *in seinen Dualraum ab und ist beschränkt. Für* $r<p\,\frac{d+2}{d}$ *ist* A_2 *stark stetig.*

Beweis. 1. Aufgrund der Wachstumsbedingung (2.18) haben wir für alle $u,v\in W$ und $q=p\,\frac{d+2}{d}$

$$\begin{aligned}|\langle A_2u,v\rangle| &\le c\int\limits_I\int\limits_\Omega (1+|u|)^{r-1}|v|\,dx\,dt\\ &\le c\left(1+\|u\|_{L^{(r-1)q'}(I\times\Omega)}^{r-1}\right)\|v\|_{L^q(I\times\Omega)}\,.\end{aligned}$$

Sofern $(r-1)\,q'\le q$ gilt, erhalten wir aufgrund von (3.97)

$$|\langle A_2u,v\rangle|\le c\left(1+\|u\|_W^{r-1}\right)\|v\|_W\,. \tag{3.104}$$

Die Forderung $(r-1)\,q'\le q$ ist äquivalent zu $r\le q=p\,\frac{d+2}{d}$. Somit folgt aus (3.104) und der Definition der dualen Norm in W^*, dass $A_2:W\to W^*$ und dass A_2 beschränkt ist.

2. Sei $(u_n)\subseteq W$ eine schwach konvergente Folge. Aufgrund von Folgerung 3.98 gibt es eine Teilfolge mit

$$u_{n_k}\to u \text{ in } L^r(I\times\Omega) \qquad (k\to\infty)\,,$$

wobei $r<p\,\frac{d+2}{d}$. Wir setzen (cf. Beweis von Lemma 2.17, Teil 2)

$$F(u)=g(u)$$

und erhalten aus Lemma 1.19, dass der Nemyckii–Operator

$$F:L^r(I\times\Omega)\to L^{r'}(I\times\Omega)$$

stetig ist, d.h.

$$\|F(u_{n_k})-F(u)\|_{L^{r'}(I\times\Omega)}\to 0 \qquad (k\to\infty)\,.$$

Daraus, aus der Einbettung $W \hookrightarrow L^r(I\times\Omega)$ und aus der Definition der Norm in W^* erhalten wir sofort

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{\varphi\in W\\ \|\varphi\|\le 1}} |\langle A_2 u_{n_k} - A_2 u, \varphi\rangle| &\le \sup_{\substack{\varphi\in W\\ \|\varphi\|\le 1}} \int_I\int_\Omega |g(u_{n_k}) - g(u)||\varphi|\,dx\,dt \\
&\le \sup_{\substack{\varphi\in W\\ \|\varphi\|\le 1}} \|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}(I\times\Omega)}\|\varphi\|_{L^r(I\times\Omega)} \\
&\le c\,\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}} \to 0 \quad (k\to\infty)\,,
\end{aligned}
$$

d.h.

$$
A_2 u_{n_k} \to A_2 u \ \text{ in } W^* \qquad (k\to\infty)\,.
$$

Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 liefert, dass $A_2 : W \to W^*$ stark stetig ist. ■

In Lemma 3.68 wurde gezeigt, dass der Operator A_1 den Raum X in seinen Dualraum X^* abbildet. Da $W \subseteq X$ ist, erhalten wir sofort, dass

$$
A_1 : W \to W^*
$$

und dass $A_1 : W \to W^*$ ein stetiger, strikt monotoner, koerziver und beschränkter Operator ist.

3.105 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 3.103 erfülle g die Koerzivitätsbedingung* (2.23). *Dann ist der Operator $A_1+A_2\colon W\to W^*$ koerziv.*

Beweis. Der Beweis verläuft genau wie der Beweis von Lemma 2.22, wenn man $L^p(\Omega)$ durch $L^p(I\times\Omega)$ ersetzt. ■

3.106 Satz. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega\in C^{0,1}$ und sei $I=[0,T]$ ein endliches Zeitintervall. Sei ferner $\frac{2d}{d+2}\le p<d$ und die stetige Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ erfülle die Bedingungen* (2.18) *und* (2.23) *mit $1\le r<p\,\frac{d+2}{d}$. Dann gibt es für alle $f\in L^{p'}(I\times\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, eine Lösung $u\in D(L)=\{u\in W\,|\,u(0)=0\}$ des Problems* (3.67), *d.h. für alle $\varphi\in C_0^\infty(I\times\Omega)$ gilt:*

$$
\begin{aligned}
\int_I \Big\langle \frac{du(t)}{dt}, \varphi(t)\Big\rangle_{W_0^{1,p}} dt &+ \int_I\int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)\cdot\nabla\varphi(t)\,dx\,dt \\
&+ \int_I\int_\Omega g(u(t))\,\varphi(t)\,dx\,dt = \int_I\int_\Omega f(t)\,\varphi(t)\,dx\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Beweis. Offensichtlich ist $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ ein Gelfand–Tripel, da $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p\ge\frac{2d}{d+2}$. Der Operator $A\colon W\to W^*$ ist koerziv nach Lemma 3.105 und pseudomonoton, demistetig und beschränkt aufgrund von Lemma 2.6 und Lemma 3.69, sowie Lemma 3.103 (cf. Beweis von Satz 2.24). Da $L : D(L) \subseteq W \to W^* : u \mapsto \frac{du}{dt}$ ein maximal monotoner Operator ist (cf. Lemma 3.38), folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.66. ■

Bemerkung. Man kann auch nichttriviale Anfangsdaten behandeln, d.h. man betrachtet das Problem

$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f && \text{in } I \times \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } I \times \partial\Omega\,, \\ u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.107}$$

wobei u_0 eine gegebene Anfangsbedingung ist. In diesem Fall muss man den Operator $Lu = \frac{du}{dt}$ auf dem ganzen Raum W (cf. (3.70)) betrachten. Dann ist allerdings L nicht mehr maximal monoton. Um das Problem (3.107) zu lösen, kann man eine „instationäre Variante“ des Satzes von Brezis über pseudomonotone Operatoren (cf. Satz 2.10) benutzen. Man kann zeigen, dass das Problem (3.107) lösbar ist, wenn man zusätzlich zu den Bedingungen in Satz 3.106 fordert, dass $u_0 \in L^2(\Omega)$ gilt (cf. [20, III.4.1]).

4 Der Abbildungsgrad

Der *Abbildungsgrad* ist eine Möglichkeit, die Lösbarkeit von Gleichungen

$$f(x) = y$$

mithilfe topologischer Überlegungen zu untersuchen. Grob gesagt gibt der Abbildungsgrad die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung an. Wir werden den *Abbildungsgrad* definieren für Funktionen $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ und für Operatoren $T\colon X \to X$, wobei X ein Banachraum ist. Mithilfe des Abbildungsgrades können wir einen einfachen Beweis für die Fixpunktsätze von Brouwer (cf. Satz 1.2.17) und von Schauder (cf. Satz 1.2.46) finden.

4.1 Der Abbildungsgrad von Brouwer

In diesem Abschnitt sei immer $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega \neq \emptyset$, eine beschränkte, offene Menge. Wir wollen folgenden Satz beweisen:

1.1 Satz (Brouwer 1912, Nagumo 1951). *Sei $\mathbf{f}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Funktion und sei $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Dann existiert eine ganze Zahl $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})$, der* ***Abbildungsgrad****, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Falls $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) \neq 0$, dann existiert ein $x_0 \in \Omega$, so dass*

$$\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{p}\,.$$

(*Existenz von Lösungen*)

(ii) *Falls $\mathbf{f}(x,t)\colon \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^d$ eine stetige Abbildung ist und für $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ gilt, dass $\mathbf{p} \neq \mathbf{f}(x,t)$ für alle $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0,1]$, dann haben wir:*

$$d(\mathbf{f}(\cdot,0), \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}(\cdot,1), \Omega, \mathbf{p})\,.$$

(*Invarianz unter Homotopien*)

(iii) *Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$, wobei Ω_i offene, paarweise disjunkte, beschränkte Mengen sind mit $\partial\Omega_i \subseteq \partial\Omega$. Dann gilt für alle $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$:*

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m d(\mathbf{f}, \Omega_i, \mathbf{p})\,.$$

(*Zerlegungseigenschaft*)

Satz 1.1 verallgemeinert folgendes Konzept von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^d$. Sei Γ eine geschlossene C^1–Kurve und $a \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$. Die **Umlaufzahl** $n(\Gamma, a)$ von Γ bezüglich a ist definiert durch

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} .$$

Wir setzen

$$\deg(f, \Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(\Gamma)} \frac{dz}{z} .$$

Dabei sei f eine meromorphe Funktion mit $f \neq 0$ auf Γ und Γ eine nullhomologe C^1–Kurve. Dann ist

$$\deg(f, \Gamma, 0) = \sum_{z \in N} k(z) n(\Gamma, z) ,$$

wobei N die Menge der Nullstellen von f ist und $k(z) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z \in N$.Für $d = 2$ stimmen beide Konzepte überein.

4.1.1 Die Konstruktion des Abbildungsgrades von Brouwer

Sei $\mathbf{f} \colon \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Funktion mit $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$. Die Determinante der *Jacobi–Matrix* von $\mathbf{f}$ im Punkte $x \in \Omega$ bezeichnen wir mit $J(\mathbf{f})(x)$, d.h.

$$J(\mathbf{f})(x) := \det\big(\nabla \mathbf{f}(x)\big) .$$

Ferner setzen wir für $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}) := \{x \in \Omega \,\big|\, \mathbf{f}(x) = \mathbf{p}\} .$$

Der Punkt $x \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ heißt **regulär**, wenn $J(\mathbf{f})(x) \neq 0$.

1.2 Lemma. *Sei* $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$, $\mathbf{p} \in \mathbf{f}(\overline{\Omega}) \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$, *und sei jeder Punkt der Menge* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ *regulär. Dann ist* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ *endlich.*

Beweis. Sei $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nicht endlich. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ mit $x_m \neq x_n$ für $m \neq n$. Da Ω beschränkt ist, ist auch die Folge (x_n) beschränkt und es gibt ein $x_0 \in \overline{\Omega}$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$. Für diese Teilfolge gilt:

$$\mathbf{f}(x_{n_k}) = \mathbf{p}$$

und somit $\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{p}$, da $\mathbf{f}$ stetig ist. Nach Voraussetzung haben wir also $x_0 \notin \partial\Omega$ und $x_0 \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$. Da $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nur aus regulären Punkten besteht, erhalten wir $J(\mathbf{f})(x_0) \neq 0$, d.h. der Rang von $\nabla\mathbf{f}(x_0)$ ist d. Demzufolge ist $\nabla\mathbf{f}(x_0)$ ein Homöomorphismus. Nach dem Satz über die inverse Funktion (cf. Satz 2.2.17) folgt, dass es eine Umgebung $V(x_0)$ gibt, so dass $\mathbf{f}\,|_{V(x_0)}$ ebenfalls ein Homöomorphismus und insbesondere eineindeutig ist. Dies ist ein Widerspruch, denn einerseits haben wir $\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{p}$ und andererseits existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $x_{n_k} \in V(x_0)$ und $\mathbf{f}(x_{n_k}) = \mathbf{p}$. ■

1.3 Definition. *Sei* $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ *und sei* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ *derart, dass alle Punkte in* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ *regulär sind. Dann definieren wir den* ***Abbildungsgrad*** *durch*

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) := \sum_{x \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})} \operatorname{sgn} J(\mathbf{f})(x)\,.$$

Bemerkungen. (i) Aus Lemma 1.2 folgt, dass die Summe in der Definition endlich ist.

(ii) Offensichtlich ist $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) \in \mathbb{Z}$.

(iii) Falls $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}) = \emptyset$, dann definieren wir $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) := 0$.

Wir wollen nun die Definition auf solche Fälle verallgemeinern, bei denen

(a) $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nichtreguläre Punkte enthält,

(b) $\mathbf{f}$ nur stetig ist.

In beiden Fällen benutzen wir dazu Approximationsargumente. Wir werden dabei wie folgt vorgehen:

ad (a): Sei K die Menge der nichtregulären Punkte, d.h.

$$K := \{x \in \Omega \,\big|\, J(\mathbf{f})(x) = 0\}$$

und sei $\mathbf{p} \in \mathbf{f}(K) \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Der Satz von Sard (cf. Satz 1.6) liefert, dass $\mu(\mathbf{f}(K)) = 0$, wobei μ das Lebesgue–Maß bezeichnet. Daher hat $\mathbf{f}(K)$ keine inneren Punkte und es gibt eine Folge $\mathbf{p}_n \to \mathbf{p}$ $(n \to \infty)$ mit

$$\mathbf{p}_n \notin \mathbf{f}(K)\,, \qquad \mathbf{p}_n \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)\,. \tag{1.4}$$

Wir werden zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}_n)$$

existiert und zwar unabhängig von der Wahl der Folge $(\mathbf{p}_n)$. Daher können wir für $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$ definieren

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) := \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}_n)\,.$$

ad (b): Sei $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und sei $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Dann gibt es nach dem Approximationssatz von Weierstrass (cf. Satz A.12.1) eine Folge von Polynomen $(\mathbf{f}_n)$, so dass $\mathbf{f}_n \rightrightarrows \mathbf{f}$ auf $\overline{\Omega}$ $(n \to \infty)$ mit

$$\mathbf{f}_n \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d\,, \qquad \mathbf{p} \notin \mathbf{f}_n(\partial\Omega)\,. \tag{1.5}$$

Wir werden beweisen, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{f}_n, \Omega, \mathbf{p})$$

existiert und unabhängig von der Wahl der Folge $(\mathbf{f}_n)$ ist. Daher können wir für $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ definieren

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) := \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{f}_n, \Omega, \mathbf{p})\,.$$

4.1.2 Technische Hilfsmittel

Es folgen nun einige technische Lemmata, die uns die Erweiterung der Definition 1.3 auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen ermöglichen werden.

1.6 Satz (Sard 1942). *Für* $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d$ *gilt:*

$$\mu\big(\mathbf{f}(K)\big) = 0\,,$$

wobei $K = \{x \in \Omega \,\big|\, J(\mathbf{f})(x) = 0\}$ *die Menge aller nichtregulären Punkte ist.*

Beweis. Da Ω beschränkt ist, gibt es einen Würfel $W := [-a, a]^d$, $a > 0$, so dass $\Omega \subseteq W$ gilt. Sei G eine offene Teilmenge von Ω mit $\overline{G} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Wir überdecken den Würfel W mit abgeschlossenen Würfeln w_i der Seitenlänge $l < \frac{1}{2\sqrt{d}} \operatorname{dist}(\overline{G}, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$. Dann gibt es endlich viele Würfel $w_i \subseteq \Omega$, $i = 1, \ldots, N$, mit

$$\overline{G} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} w_i =: G_1\,.$$

Wir zeigen zunächst, dass das Bild der Menge aller nichtregulären Punkte in G, d.h. die Menge $\mathbf{f}(K \cap G)$, eine Lebesgue–Nullmenge ist.

(a) Sei dazu w_i einer der Würfel mit Seitenlänge l. Aufgrund der Voraussetzung ist $\nabla\mathbf{f} \in \big(C(\Omega)\big)^{d\times d}$, also auf G_1 gleichmäßig stetig und beschränkt, d.h. es existiert ein $L > 0$ mit

$$|\nabla\mathbf{f}(x)| \le L \qquad\qquad \forall x \in G_1\,, \tag{1.7}$$

und es existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle $y_1, y_2 \in G_1$ mit $|y_1 - y_2| < \frac{l}{m}\sqrt{d} =: \delta$ gilt:

$$|\nabla\mathbf{f}(y_1) - \nabla\mathbf{f}(y_2)| \le \varepsilon\,. \tag{1.8}$$

Also gilt nach dem Mittelwertsatz für alle x_1, $x_2 \in G_1$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2) - \nabla\mathbf{f}(x_2)(x_1 - x_2)| \\
&\le \int_0^1 |\nabla\mathbf{f}(x_2 + t(x_1 - x_2)) - \nabla\mathbf{f}(x_2)|\,|x_1 - x_2|\,dt \\
&\le \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{d} = \varepsilon\,\delta\,.
\end{aligned}$$

(b) Nun zerlegen wir den Würfel w_i in m^d Würfel w_{ij} der Seitenlänge $\frac{l}{m} = \frac{\delta}{\sqrt{d}}$ und wählen einen festen aber beliebigen Würfel w_{ij}. Nach Schritt (a) gilt für alle $x_1, x_2 \in w_{ij}$:

$$\mathbf{f}(x_1) = \mathbf{f}(x_2) + \nabla\mathbf{f}(x_2)(x_1 - x_2) + \mathbf{R}(x_2, x_1) \tag{1.9}$$

mit

$$|\mathbf{R}(x_2, x_1)| \leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{d} = \varepsilon\,\delta\,. \tag{1.10}$$

Sei nun $x_2 \in w_{ij}$ ein nichtregulärer Punkt. Wir bezeichnen den um $-x_2$ verschobenen Würfel w_{ij} mit

$$w_{ij} - x_2 := \{y - x_2 \in \mathbb{R}^d \,\big|\, y \in w_{ij}\}\,.$$

und definieren eine Abbildung $\mathbf{T}\colon w_{ij} - x_2 \to \mathbb{R}^d\colon x \mapsto \mathbf{T}(x)$ durch

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(x) &= \mathbf{f}(x_2 + x) - \mathbf{f}(x_2)\\ &= \nabla\mathbf{f}(x_2)\,x + \widetilde{\mathbf{R}}(x)\,,\end{aligned}$$

mit $\widetilde{\mathbf{R}}(x) := \mathbf{R}(x_2, x+x_2)$. Aus (1.9) und (1.10) (ersetze x_1 durch $x+x_2$) erhalten wir

$$|\widetilde{\mathbf{R}}(x)| \leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{d} = \varepsilon\,\delta\,. \tag{1.11}$$

Da x_2 ein nichtregulärer Punkt ist, gilt $\det(\nabla\mathbf{f}(x_2)) = 0$, d.h. der Rang von $\nabla\mathbf{f}(x_2)$ ist höchstens $d-1$. Also ist das Bild der Menge $w_{ij} - x_2$ unter $\nabla\mathbf{f}(x_2)$ in einem $(d-1)$–dimensionalen Raum enthalten. Deshalb gibt es einen Vektor $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^d\,, |\mathbf{b}_1| = 1$ mit

$$(\mathbf{b}_1, y) = 0 \qquad \forall y \in (\nabla\mathbf{f}(x_2))(w_{ij} - x_2)\,,$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$ steht. Wir ergänzen $\mathbf{b}_1$ durch $\mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_d$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$. Dann können wir schreiben

$$\mathbf{T}(x) = \sum_{k=1}^{d} (\mathbf{T}(x), \mathbf{b}_k)\,\mathbf{b}_k\,.$$

Es gilt für alle $x \in w_{ij} - x_2$

$$\begin{aligned}|(\mathbf{T}(x), \mathbf{b}_1)| &\leq |(\nabla\mathbf{f}(x_2)\,x, \mathbf{b}_1)| + |(\widetilde{\mathbf{R}}(x), \mathbf{b}_1)|\\ &\leq 0 + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{d} = \varepsilon\,\delta\,,\end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned}|(\mathbf{T}(x), \mathbf{b}_k)| &\leq |(\nabla\mathbf{f}(x_2)\,x, \mathbf{b}_k)| + |(\widetilde{\mathbf{R}}(x), \mathbf{b}_k)| \qquad k = 2, \dots, d\\ &\leq L\,|x|\,|\mathbf{b}_k| + |\widetilde{\mathbf{R}}(x)|\,|\mathbf{b}_k|\\ &\leq L\,\frac{l}{m}\sqrt{d} + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{d}\\ &\leq L\,\delta + \varepsilon\,\delta\,,\end{aligned} \tag{1.13}$$

da $|x| \le \frac{l}{m}\sqrt{d}$. Aufgrund der Definition der Abbildung $\mathbf{T}(\cdot)$ gilt:

$$\mathbf{T}(w_{ij} - x_2) = \mathbf{f}(w_{ij}) - \mathbf{f}(x_2)\,.$$

Da das Lebesgue–Maß μ invariant gegenüber Verschiebungen ist, erhalten wir aus (1.12) und (1.13)

$$\mu(\mathbf{f}(w_{ij})) = \mu(\mathbf{T}(w_{ij} - x_2)) \le 2^d \left(L\frac{l}{m}\sqrt{d} + \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{d}\right)^{d-1} \varepsilon\frac{l}{m}\sqrt{d}\,.$$

falls w_{ij} einen nichtregulären Punkt enthält.

(c) Aufgrund von Schritt (b) gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbf{f}(w_i \cap K)) &\le \sum_{j=1}^{m^d} \mu(\mathbf{f}(w_{ij} \cap K)) \\
&\le 2^d\, m^d \frac{1}{m^d} \big(L\,l\,\sqrt{d} + \varepsilon\,l\,\sqrt{d}\big)^{d-1} \varepsilon\,l\,\sqrt{d} \\
&\le c(d, G, \Omega, \mathbf{f})\,\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt $\mu(\mathbf{f}(w_i \cap K)) = 0$. Somit erhalten wir

$$\mu(\mathbf{f}(G \cap K)) = 0\,,$$

da die Würfel w_i die Menge G überdecken.

Um zu zeigen, dass

$$\mu(\mathbf{f}(K)) = 0$$

gilt, wobei $K = \{x \in \Omega \,|\, J(\mathbf{f})(x) = 0\}$, wählen wir

$$G_n = \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \operatorname{dist}(\partial\Omega, x) \ge \tfrac{1}{n}\right\}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wir haben $\overline{G}_n \subseteq \Omega$ und $\Omega \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Aus dem gerade Bewiesenen und den Eigenschaften des Lebesgue–Maßes folgt

$$\mu(\mathbf{f}(K)) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathbf{f}(G_n \cap K)) = 0\,.$$

■

Sei nun $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und $\mathbf{p} \in \mathbf{f}(\overline{\Omega}) \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Die Menge $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ enthalte nur reguläre Punkte. Dann ist diese Menge nach Lemma 1.2 endlich, d.h.

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p}) = \{x_1, \ldots, x_k\}\,.$$

Aufgrund des Beweises von Lemma 1.2 gibt es zu jedem x_i, $i = 1, \ldots, k$, eine offene Umgebung $V(x_i)$, so dass

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \ V(x_i) \subseteq \Omega\,, \\
&(2)\ \ V(x_i) \cap V(x_j) = \emptyset\,, \qquad i \neq j\,, \\
&(3)\ \ J(\mathbf{f})(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i)\,,
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

(4) $\mathbf{f}|_{V(x_i)}$ ist ein Homöomorphismus der Umgebung $V(x_i)$ auf eine Umgebung $\mathbf{f}(V(x_i))$ von $\mathbf{p}$ und ist insbesondere eineindeutig.

Wir setzen

$$\boldsymbol{\psi}(x) := \mathbf{f}(x) - \mathbf{p}\,. \tag{1.15}$$

Dann ist $\boldsymbol{\psi}(V(x_i))$ eine Umgebung von $\mathbf{0}$. Demzufolge existiert ein $\eta > 0$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{k} \boldsymbol{\psi}(V(x_i)) \supseteq B_\eta(\mathbf{0})\,. \tag{1.16}$$

Aufgrund der Konstruktion der Umgebungen $V(x_i)$, $i = 1, \ldots, k$, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i)$ gilt:

$$|\boldsymbol{\psi}(x)| \geq \delta\,. \tag{1.17}$$

In der Tat, da die Funktion $x \mapsto |\boldsymbol{\psi}(y)|$ stetig ist, nimmt sie auf dem Kompaktum $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i)$ ein Minimum an. Weiterhin haben wir $|\boldsymbol{\psi}(x)| > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} V(x_i)$, und somit folgt (1.17).

1.18 Lemma. *Sei* $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$, *sei* $\mathbf{p} \in \mathbf{f}(\overline{\Omega}) \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ *und enthalte* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ *nur reguläre Punkte. Ferner sei* $\varphi \in C([0,\infty)) \cap C^\infty(0,\infty)$ *eine Funktion mit*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(|x|)\, dx = 1 \tag{1.19}$$

und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, \min(\delta, \eta))$ *mit* δ, η *wie in* (1.17) *und* (1.16). *Dann gilt:*

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}|) J(\mathbf{f})(x)\, dx = d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})\,. \tag{1.20}$$

Beweis. Wenn wir wie oben $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{f} - \mathbf{p}$ setzen, erhalten wir

$$J(\mathbf{f})(x) = J(\boldsymbol{\psi})(x)\,.$$

Dies zusammen mit (1.17) und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, \min(\eta, \delta))$, der Eigenschaft $\operatorname{sgn} J(\boldsymbol{\psi})(x) = \operatorname{sgn} J(\boldsymbol{\psi})(x_i)$ für alle $x \in V(x_i)$, dem Transformationssatz (cf. Satz A.11.17), sowie $\boldsymbol{\psi}(V(x_i)) \supseteq B_\eta(\mathbf{0}) \supset \operatorname{supp}\big(\varphi(|\cdot|)\big)$ und (1.19) liefert

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(|\mathbf{f}(x)-\mathbf{p}|)J(\mathbf{f})(x)\,dx &= \int_\Omega \varphi(|\boldsymbol{\psi}(x)|)J(\boldsymbol{\psi})(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{V(x_i)} \varphi(|\boldsymbol{\psi}(x)|)J(\boldsymbol{\psi})(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} J(\boldsymbol{\psi})(x_i) \int_{V(x_i)} \varphi(|\boldsymbol{\psi}(x)|)J(\boldsymbol{\psi})(x)|\,dx \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} J(\boldsymbol{\psi})(x_i) \int_{\boldsymbol{\psi}(V(x_i))} \varphi(|x|)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} J(\boldsymbol{\psi})(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn} J(\mathbf{f})(x_i) \\
&= \sum_{x\in\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})} J(\mathbf{f})(x) = d(\mathbf{f},\Omega,\mathbf{p})\,,
\end{aligned}$$

d.h. (1.20) ist bewiesen. ■

Um Lemma 1.18 zu verallgemeinern, benötigen wir folgendes Resultat:

1.21 Lemma. *Sei* $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ *und* $\mathbf{0} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$. *Sei* $\varepsilon > 0$ *so, dass für alle* $x \in \partial\Omega$ *gilt:*

$$|\mathbf{f}(x)| > \varepsilon\,. \tag{1.22}$$

Ferner sei $\varphi \in C_0^\infty(0,\infty)$ *eine Funktion mit* $\varphi(r) = 0$ *für* $r \geq \varepsilon$ *und*

$$\int_0^\infty r^{d-1}\varphi(r)\,dr = 0\,. \tag{1.23}$$

Dann gilt:

$$\int_\Omega \varphi(|\mathbf{f}(x)|)J(\mathbf{f})(x)\,dx = 0\,. \tag{1.24}$$

Beweis. 1. Sei zunächst $\mathbf{f} \in \big(C^\infty(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$. Wir setzen

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{-d}\displaystyle\int_0^r s^{d-1}\,\varphi(s)\,ds\,, & \text{falls } 0 < r < \infty\,, \\ 0\,, & \text{falls } r = 0\,. \end{cases} \tag{1.25}$$

Aufgrund unserer Voraussetzungen ist auch ψ eine Funktion aus $C_0^\infty(0,\infty)$ mit $\psi(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$. Weiterhin erfüllt ψ für $0 \leq r < \infty$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$r\,\psi'(r) + d\,\psi(r) = \varphi(r)\,. \tag{1.26}$$

Die Funktionen

$$g^i(y) := \psi(|y|)\,y_i\,, \qquad i = 1,\dots,d\,, \tag{1.27}$$

gehören zum Raum $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und es gilt $\mathbf{g}(y) = (g^1(y),\dots,g^d(y)) = \mathbf{0}$ für alle $|y| \geq \varepsilon$. Aufgrund von (1.22) und der Stetigkeit von $\mathbf{f}$ existiert eine offene Menge $M \subseteq\subseteq \Omega$, so dass für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus M$ gilt:

$$|\mathbf{f}(x)| \geq \varepsilon\,.$$

Insgesamt ergibt sich also $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \in (C_0^\infty(\Omega))^d$, d.h. $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ ist identisch Null in einer Umgebung des Randes $\partial\Omega$. Mithilfe von (1.2.12) angewendet auf $\nabla\mathbf{f}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^d \partial_i\Big(\sum_{k=1}^d \big(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{f}(x)\big)_i^k\,g^k\big(\mathbf{f}(x)\big)\Big)\\
&= \sum_{i,k=1}^d \partial_i\big(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{f}(x)\big)_i^k\,g^k\big(\mathbf{f}(x)\big) + \sum_{i,j,k=1}^d \big(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{f}(x)\big)_i^k\,\frac{\partial g^k}{\partial y_j}\big(\mathbf{f}(x)\big)\,\partial_i f^j(x)\\
&= \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial g^k}{\partial y_j}\big(\mathbf{f}(x)\big)\,\delta_{jk}J(\mathbf{f})(x) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial g^j}{\partial y_j}\big(\mathbf{f}(x)\big)\,J(\mathbf{f})(x) \qquad (1.28)\\
&= \big(|\mathbf{f}(x)|\;\psi'(|\mathbf{f}(x)|) + d\,\psi(|\mathbf{f}(x)|)\big)\,J(\mathbf{f})(x)\\
&= \varphi(|\mathbf{f}(x)|)\,J(\mathbf{f})(x)\,,
\end{aligned}$$

wobei wir auch die Eigenschaft der Kofaktormatrix[1]

$$\det(\nabla\mathbf{f}(x))\,\delta_{jk} = \sum_{i=1}^d \big(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{f}(x)\big)_i^k\,\partial_i f^j(x)\,, \qquad j,k = 1,\dots,d\,,$$

sowie (1.27) und (1.26) benutzt haben. Integration von (1.28) über Ω liefert mithilfe partieller Integration und aufgrund von $\mathbf{g}(\mathbf{f}(x)) = \mathbf{0}$ für $x \in \partial\Omega$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(|\mathbf{f}(x)|)\,J(\mathbf{f})(x)\,dx &= \int_\Omega \sum_{i=1}^d \partial_i\Big(\sum_{k=1}^d \big(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{f}(x)\big)_i^k\,g^k\big(\mathbf{f}(x)\big)\Big)\,dx\\
&= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^d \Big(\sum_{k=1}^d \big(\operatorname{cof}\nabla\mathbf{f}(x)\big)_i^k\,g^k\big(\mathbf{f}(x)\big)\Big)\nu^i\,dS = 0\,,
\end{aligned}$$

[1] Dies folgt sofort aus (1.2.13), wenn man beachtet, dass $\det(\mathsf{P}) = \det(\mathsf{P}^\top)$ und $(\operatorname{cof}\mathsf{P})^\top = (\operatorname{cof}\mathsf{P}^\top)$ gilt, und die Symmetrie der Matrix $(\operatorname{cof}\mathsf{P})\mathsf{P}^\top = \det(\mathsf{P})\,\mathsf{I}$ benutzt.

wobei $\boldsymbol{\nu} = (\nu^1, \dots, \nu^d)$ die äußere Normale an $\partial\Omega$ ist. Somit gilt (1.24) für $\mathbf{f} \in \big(C^\infty(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$.

2. Sei nun $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$. Aufgrund von (1.22) und der Stetigkeit von $\mathbf{f}$ existiert eine offene Menge $M \subseteq\subseteq \Omega$, so dass für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus M$ gilt:

$$|\mathbf{f}(x)| \geq \varepsilon + \frac{1}{2}\Big(\min_{y\in\partial\Omega} |\mathbf{f}(y)| - \varepsilon\Big) > \varepsilon\,. \tag{1.29}$$

Der Satz von Weierstrass (cf. Satz A.12.1) liefert die Existenz einer Folge $\mathbf{f}_n \subset \big(C^\infty(\Omega)\big)^d$, so dass $\mathbf{f}_n \rightrightarrows \mathbf{f}$ auf $\overline{\Omega}$ und $\nabla\mathbf{f}_n \rightrightarrows \nabla\mathbf{f}$ auf allen Mengen $K \subseteq\subseteq \Omega$. Insbesondere existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega} \setminus M$ gilt:

$$|\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{f}(x)| \leq \frac{1}{2}\Big(\min_{y\in\partial\Omega} |\mathbf{f}(y)| - \varepsilon\Big)\,.$$

Dies zusammen mit (1.29) impliziert, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}\setminus M$ gilt:

$$|\mathbf{f}_n(x)| \geq |\mathbf{f}(x)| - |\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{f}(x)| \geq \varepsilon\,.$$

Aufgrund der Eigenschaften von φ erhalten wir somit, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega} \setminus M$ gilt $\varphi(|\mathbf{f}_n(x)|) = 0$. Dies und Schritt 1 des Beweises liefern:

$$0 = \int\limits_{\Omega} \varphi(|\mathbf{f}_n(x)|)\, J(\mathbf{f}_n)(x)\, dx = \int\limits_{\Omega\setminus M} \varphi(|\mathbf{f}_n(x)|)\, J(\mathbf{f}_n)(x)\, dx\,.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$, der aufgrund der Eigenschaften der Folge $(\mathbf{f}_n)$ möglich ist, liefert somit

$$0 = \int\limits_{\Omega\setminus M} \varphi(|\mathbf{f}(x)|)\, J(\mathbf{f})(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} \varphi(|\mathbf{f}(x)|)\, J(\mathbf{f})(x)\, dx\,,$$

wobei wir benutzt haben, dass für alle $x \in \overline{\Omega} \setminus M$ gilt $\varphi(|\mathbf{f}(x)|) = 0$. Also ist (1.24) bewiesen. ∎

1.30 Lemma. *Sei $G \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, beschränkte Menge. Sei $\mathbf{g} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{g}(\partial\Omega)$. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:*

$$|\mathbf{g}(x) - \mathbf{p}| > \varepsilon\,. \tag{1.31}$$

Ferner seien $\varphi_i \in C_0^\infty(0,\infty)$, $i = 1, 2$, Funktionen mit $\varphi_i(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$, $i = 1, 2$, und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_i(|x|)\, dx = 1\,, \qquad i = 1, 2\,. \tag{1.32}$$

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \varphi_1(|\mathbf{g}(x) - \mathbf{p}|) J(\mathbf{g})(x)\, dx = \int_{\Omega} \varphi_2(|\mathbf{g}(x) - \mathbf{p}|) J(\mathbf{g})(x)\, dx\,. \tag{1.33}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit D den linearen Unterraum von $C_0^\infty(0,\infty)$ von Funktionen φ mit $\varphi(r) = 0$ für $r \geq \varepsilon$ und setzen für $\varphi \in D$:

$$\begin{aligned} L(\varphi) &:= \int_0^\infty r^{d-1} \varphi(r)\, dr\,, \\ M(\varphi) &:= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(|x|)\, dx\,, \\ N(\varphi) &:= \int_G \varphi(|\mathbf{g}(x) - \mathbf{p}|) J(\mathbf{g})(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Dies sind offensichtlich lineare Funktionale auf D. Wenn wir Lemma 1.21 auf $\mathbf{f}(x) = x$, $\Omega = B_{2\varepsilon}(0)$, bzw. $\mathbf{f}(x) = \mathbf{g}(x) - \mathbf{p}$, $\Omega = G$, anwenden, erhalten wir, dass für $\varphi \in D$ gilt:

$$L(\varphi) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad M(\varphi) = N(\varphi) = 0\,. \tag{1.34}$$

Seien nun φ_i, $i = 1, 2$, zwei Funktionen aus D, die (1.32) erfüllen. Da L ein lineares Funktional auf D ist erhalten wir

$$L\big(L(\varphi_1)\, \varphi_2 - L(\varphi_2)\, \varphi_1\big) = 0\,,$$

also liefert die Implikation (1.34):

$$\begin{aligned} 0 &= M\big(L(\varphi_1)\, \varphi_2 - L(\varphi_2)\, \varphi_1\big) \\ &= L(\varphi_1)\, M(\varphi_2) - L(\varphi_2)\, M(\varphi_1) \\ &= L(\varphi_1) - L(\varphi_2) \\ &= L(\varphi_1 - \varphi_2)\,, \end{aligned}$$

da (1.32) sich als $M(\varphi_1) = M(\varphi_2) = 1$ schreiben lässt. Aus (1.34) folgt somit $N(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, d.h.

$$N(\varphi_1) = N(\varphi_2)$$

und das Lemma ist bewiesen. ■

1.35 Lemma. *Sei* $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$, *sei* $\mathbf{p} \in \mathbf{f}(\overline{\Omega}) \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ *und enthalte* $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ *nur reguläre Punkte. Sei* $\varepsilon > 0$ *so, dass für alle* $x \in \partial\Omega$ *gilt:*

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| > \varepsilon\,. \tag{1.36}$$

Ferner sei $\varphi \in C_0^\infty(0,\infty)$ *eine Funktion mit* $\varphi(r) = 0$ *für* $r \geq \varepsilon$ *und*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(|x|)\, dx = 1\,. \tag{1.37}$$

Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \varphi(|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}|) J(\mathbf{f})(x)\, dx = d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})\,. \tag{1.38}$$

Beweis. Wir setzen $\varphi_1 = \varphi$ und wählen eine Funktion $\varphi_2 \in C_0^\infty(0,\infty)$ so, dass (1.37) und $\operatorname{supp}(\varphi_2) \subset \big(0, \min(\varepsilon, \delta, \eta)\big)$ gilt mit η, δ aus (1.17) und (1.16). Somit erfüllt φ_2 die Voraussetzungen vom Lemma 1.18 und φ_i, $i = 1, 2$, erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1.30. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) &= \int_{\Omega} \varphi_2(|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}|) J(\mathbf{f})(x)\, dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi_1(|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}|) J(\mathbf{f})(x)\, dx \end{aligned}$$

und das Lemma ist bewiesen, da $\varphi_1 = \varphi$. ∎

1.39 Lemma (Heinz 1959). *Sei* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ *und seien die Funktionen* $\mathbf{f}_i \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$, *Elemente des Raumes* $\big(C(\overline{\Omega})\big)^d \cap \big(C^1(\Omega)\big)^d$. *Sei* $\varepsilon > 0$ *so, dass*

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{p}| &\geq 7\varepsilon \qquad && \textit{für } i = 1, 2 \textit{ und } x \in \partial\Omega\,, \\ |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_2(x)| &< \varepsilon && \textit{für } x \in \overline{\Omega}\,. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Ferner seien alle Punkte aus $\mathbf{f}_i^{-1}(\mathbf{p})$, $i = 1, 2$, *regulär. Dann gilt:*

$$d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p})\,. \tag{1.41}$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. Wir wählen eine glatte Abschneidefunktion $\gamma\colon [0,\infty) \to [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= 1\,, \qquad && \text{falls } 0 \leq r \leq 2\,\varepsilon\,, \\ \gamma(r) &= 0\,, && \text{falls } 3\,\varepsilon \leq r\,, \end{aligned}$$

und definieren

$$\mathbf{f}_3(x) := \big(1 - \gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\big)\mathbf{f}_1(x) + \gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\mathbf{f}_2(x)\,.$$

Offensichtlich haben wir $\mathbf{f}_3 \in \big(C^1\big(\Omega \backslash \mathbf{f}_1^{-1}(\mathbf{0})\big)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$. Für alle $x \in \mathbf{f}_1^{-1}(\mathbf{0})$ existiert aufgrund der Stetigkeit von $\mathbf{f}_1$ eine Umgebung $V(x)$, so dass für alle $x \in V(x)$ gilt $|\mathbf{f}_1(x)| \leq 2\,\varepsilon$. Für alle $x \in V(x)$ erhalten wir somit $\mathbf{f}_3(x) = \mathbf{f}_2(x)$. Also ist auch $\mathbf{f}_3$ im Punkt $x \in \mathbf{f}_1^{-1}(\mathbf{0})$ stetig differenzierbar.

Folglich ist $\mathbf{f}_3 \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$. Darüber hinaus gilt aufgrund von (1.40) für $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1,2$:

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{f}_3(x)| \\
&= \Big|\big(1-\gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\big)\mathbf{f}_i(x) + \gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\mathbf{f}_i(x) \\
&\qquad - \big(1-\gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\big)\mathbf{f}_1(x) - \gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\mathbf{f}_2(x)\Big| \\
&\le \big(1-\gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\big)\,\big|\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{f}_1(x)\big| + \gamma(|\mathbf{f}_1(x)|)\,\big|\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{f}_2(x)\big| \\
&\le \varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Da $7\,\varepsilon \le |\mathbf{f}_1(x)| \le |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_3(x)| + |\mathbf{f}_3(x)| \le \varepsilon + |\mathbf{f}_3(x)|$ gilt, haben wir

$$|\mathbf{f}_3(x)| \ge 6\,\varepsilon \qquad \text{für } x \in \partial\Omega\,, \tag{1.43}$$

und somit $\mathbf{0} \notin \mathbf{f}_3(\partial\Omega)$. Aufgrund der Definition von $\mathbf{f}_3$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_3(x) &= \mathbf{f}_1(x)\,, &\qquad &\text{falls } |\mathbf{f}_1(x)| > 3\,\varepsilon\,, \\
\mathbf{f}_3(x) &= \mathbf{f}_2(x)\,, &\qquad &\text{falls } |\mathbf{f}_1(x)| < 2\,\varepsilon\,.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Sei $x_0 \in \mathbf{f}_3^{-1}(\mathbf{0})$ und sei $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in B_\delta(x_0)$ gilt $|\mathbf{f}_3(x)| < \varepsilon$. Für diese x erhalten wir aufgrund von (1.42)

$$|\mathbf{f}_1(x)| \le |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_3(x)| + |\mathbf{f}_3(x)| < 2\,\varepsilon\,.$$

Dies zusammen mit (1.44) liefert $\mathbf{f}_2(x) = \mathbf{f}_3(x)$ für alle $x \in B_\delta(x_0)$, insbesondere $\mathbf{f}_2(x_0) = \mathbf{0}$, d.h. x_0 ist ein regulärer Punkt. Zusammen mit (1.43) und den Voraussetzungen für $\mathbf{f}_i$, $i = 1,2$, erhalten wir, dass $\mathbf{f}_i$, $i = 1,2,3$, und der Punkt $\mathbf{0}$ die Voraussetzungen von Lemma 1.35 und Lemma 1.30 erfüllen, und dass gilt:

$$|\mathbf{f}_i(x)| \ge 6\,\varepsilon \qquad \text{für } x \in \partial\Omega\,, i = 1,2,3\,.$$

Wir wählen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(0,\infty)$, so dass $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset (0, 6\,\varepsilon)$, $i = 1,2$, und (1.37) gilt, sowie mit

$$\begin{aligned}
\varphi_1(r) &= 0\,, &\qquad &\text{für } r \in [0, 4\,\varepsilon] \cup [5\,\varepsilon, \infty)\,, \\
\varphi_2(r) &= 0\,, &\qquad &\text{für } r \in [\varepsilon, \infty)\,,
\end{aligned}$$

d.h. φ_i, $i = 1,2$, erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1.35 und Lemma 1.30. Weiterhin erhalten wir

$$\varphi_1(|\mathbf{f}_3(x)|)J(\mathbf{f}_3)(x) = \varphi_1(|\mathbf{f}_1(x)|)J(\mathbf{f}_1)(x)\,, \tag{1.45}$$

denn $\varphi_1(r)$ ist nur ungleich Null, falls $r > 4\,\varepsilon$. Aber für $|\mathbf{f}_3(x)| > 4\,\varepsilon$ gilt:

$$|\mathbf{f}_1(x)| \ge |\mathbf{f}_3(x)| - |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_3(x)| > 4\,\varepsilon - \varepsilon = 3\,\varepsilon\,,$$

und deshalb erhalten wir $\mathbf{f}_1(x) = \mathbf{f}_3(x)$. Weiterhin haben wir

$$\varphi_2(|\mathbf{f}_3(x)|)J(\mathbf{f}_3)(x) = \varphi_2(|\mathbf{f}_2(x)|)J(\mathbf{f}_2)(x)\,, \tag{1.46}$$

denn $\varphi_2(r)$ ist nur ungleich Null, falls $r < \varepsilon$. Sei also $|\mathbf{f}_3(x)| < \varepsilon$, dann gilt:

$$|\mathbf{f}_1(x)| \leq |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_3(x)| + |\mathbf{f}_3(x)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon\,,$$

also $\mathbf{f}_3(x) = \mathbf{f}_2(x)$. Aufgrund von Lemma 1.35, (1.45), Lemma 1.30, (1.46) und nochmals Lemma 1.35 folgt

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{0}) &= \int\limits_\Omega \varphi_1(|\mathbf{f}_1(x)|)J(\mathbf{f}_1)(x)\,dx \\ &= \int\limits_\Omega \varphi_1(|\mathbf{f}_3(x)|)J(\mathbf{f}_3)(x)\,dx \\ &= \int\limits_\Omega \varphi_2(|\mathbf{f}_3(x)|)J(\mathbf{f}_3)(x)\,dx \\ &= \int\limits_\Omega \varphi_2(|\mathbf{f}_2(x)|)J(\mathbf{f}_2)(x)\,dx \;=\; d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{0})\,, \end{aligned}$$

und somit ist die Behauptung bewiesen. ■

1.47 Lemma. *Seien* $\mathbf{f}_i \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d, \mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d, i = 1,2$ *und sei* $\varepsilon > 0$ *so, dass*

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{p}_j| &\geq 7\varepsilon\,, && \textit{für } i,j = 1,2 \textit{ und } x \in \partial\Omega\,, \\ |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_2(x)| &< \varepsilon\,, && \textit{für } x \in \overline{\Omega}\,, \\ |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ferner seien alle Punkte von $\mathbf{f}_i^{-1}(\mathbf{p}_j),\ i,j = 1,2,$ *regulär. Dann gilt:*

$$d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}_1) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p}_2)\,.$$

Beweis. Nach Lemma 1.39 gilt $d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}_1) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p}_1)$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1(x) &:= \mathbf{f}_2(x)\,, \\ \mathbf{g}_2(x) &:= \mathbf{f}_2(x) + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\,. \end{aligned}$$

Die Funktionen $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und der Punkt $\mathbf{p}_1$ erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1.39, denn es gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_1(x) - \mathbf{p}_1| &= |\mathbf{f}_2(x) - \mathbf{p}_1| \geq 7\varepsilon\,, \\ |\mathbf{g}_2(x) - \mathbf{p}_1| &= |\mathbf{f}_2(x) + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| \geq 7\varepsilon\,, \\ |\mathbf{g}_2(x) - \mathbf{g}_1(x)| &= |\mathbf{f}_2(x) + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{f}_2(x)| < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

sowie $\mathbf{g}_1^{-1}(\mathbf{p}_1) = \mathbf{f}_2^{-1}(\mathbf{p}_1)$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2^{-1}(\mathbf{p}_1) &= \{x \in \overline{\Omega} \,|\, \mathbf{f}_2(x) + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1\} \\ &= \{x \in \overline{\Omega} \,|\, \mathbf{f}_2(x) = \mathbf{p}_2\} \\ &= \mathbf{f}_2^{-1}(\mathbf{p}_2)\,, \end{aligned} \tag{1.48}$$

d.h. alle Punkte von $\mathbf{g}_i^{-1}(\mathbf{p}_1)$, $i = 1, 2$, sind regulär. Lemma 1.39 liefert also

$$d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p}_1) = d(\mathbf{f}_2 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \Omega, \mathbf{p}_1)\,.$$

Außerdem haben wir $\nabla \mathbf{f}_2 = \nabla \mathbf{g}_2$ und somit folgt aus (1.48)

$$\sum_{x \in \mathbf{f}_2^{-1}(\mathbf{p}_2)} \operatorname{sgn} J(\mathbf{f}_2)(x) = \sum_{x \in \mathbf{g}_2^{-1}(\mathbf{p}_1)} \operatorname{sgn} J(\mathbf{g}_2)(x)\,,$$

d.h.

$$d(\mathbf{f}_2 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \Omega, \mathbf{p}_1) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p}_2)\,.$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}_1) &= d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p}_1) \\ &= d(\mathbf{f}_2 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2), \Omega, \mathbf{p}_1) \\ &= d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p}_2)\,, \end{aligned}$$

somit ist die Behauptung des Lemmas bewiesen. ∎

4.1.3 Erweiterung auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen

Nun können wir die Idee zur Konstruktion des Abbildungsgrades $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})$ für Punkte $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$, deren Urbild $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nichtreguläre Punkte enthält, rigoros ausführen.

Sei $\mathbf{f} \in \left(C^1(\Omega)\right)^d \cap \left(C(\overline{\Omega})\right)^d$ und sei $\mathbf{p} \in \mathbf{f}(K) \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$, wobei

$$K = \{x \in \Omega \,|\, J(\mathbf{f})(x) = 0\}$$

die Menge aller nichtregulären Punkte ist. Der Rand $\partial\Omega$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Folglich erhalten wir, da $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$, dass gilt:

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| > 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega\,,$$

und somit gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| \geq 8\,\varepsilon\,.$$

Aus dem Satz von Sard (cf. Satz 1.6) folgt, dass $\mu(\mathbf{f}(K)) = 0$ gilt. Also hat $\mathbf{f}(K)$ keine inneren Punkte und es gibt eine Folge $(\mathbf{p}_n)$ mit

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{p}_n \to \mathbf{p} && (n \to \infty)\,,\\
&|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}| \le \varepsilon\,, && n \in \mathbb{N}\,,\\
&\mathbf{p}_n \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)\,, && n \in \mathbb{N}\,,\\
&\mathbf{p}_n \notin \mathbf{f}(K)\,, && n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

Daraus ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \partial\Omega$:

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}_n| \ge |\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| - |\mathbf{p} - \mathbf{p}_n| \ge 7\varepsilon\,.$$

Lemma 1.47 impliziert daher, dass für alle n, $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}_k) = d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}_n)\,.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}_n)$ existiert also, und wir setzen

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) := \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}_n)\,.$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folge $(\mathbf{p}_n)$ ist. Sei dazu $(\mathbf{q}_n)$ eine weitere Folge mit $\mathbf{q}_n \to \mathbf{p}\,(n \to \infty)$, die (1.49) erfüllt. Dann gibt es ein n_0, so dass für alle $n \ge n_0$ gilt: $|\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_n| \le \varepsilon$ und somit liefert Lemma 1.47

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{q}_n) = d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}_n)\,.$$

Damit ist nun $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})$ für $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d \cap \big(C^1(\Omega)\big)^d$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$ eindeutig definiert.

Um den Abbildungsgrad auf Funktionen $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ zu verallgemeinern, benötigen wir noch ein Lemma.

1.50 Lemma. *Seien* $\mathbf{f}_i \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d \cap \big(C^1(\Omega)\big)^d$, $i = 1, 2$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ *und sei* $\varepsilon > 0$ *klein genug. Wir nehmen an, dass gilt:*

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{p}| &\ge 8\,\varepsilon && \forall x \in \partial\Omega\,,\ i = 1, 2\,,\\
|\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_2(x)| &< \varepsilon && \forall x \in \overline{\Omega}\,.
\end{aligned}
$$

Dann gilt auch:

$$d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p})\,.$$

Beweis. 1. Falls $\mathbf{f}_1^{-1}(\mathbf{p}) \cup \mathbf{f}_2^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält, folgt die Behauptung aus Lemma 1.39.

2. Falls $\mathbf{f}_1^{-1}(\mathbf{p}) \cup \mathbf{f}_2^{-1}(\mathbf{p})$ nichtreguläre Punkte enthält, wählen wir eine Folge $(\mathbf{p}_n)$, die (1.49) bezüglich $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ erfüllt. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{p}_n| \ge |\mathbf{f}_i(x) - \mathbf{p}| - |\mathbf{p} - \mathbf{p}_n| \ge 7\varepsilon \qquad i = 1, 2\,.$$

Aus Lemma 1.39 folgt daher $d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}_n) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p}_n)$. Im Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich die Behauptung

$$d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p})\,. \qquad \blacksquare$$

Sei jetzt $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Da $\partial\Omega$ abgeschlossen und beschränkt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| \geq 9\,\varepsilon\,.$$

Also gibt es nach dem Approximationssatz von Weierstrass (cf. Satz A.12.1) eine Folge von Funktionen mit

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}_n \rightrightarrows \mathbf{f} \ \text{ in } \overline{\Omega} \quad (n \to \infty)\,,\\ &\mathbf{f}_n \in \big(C^1(\Omega)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega})\big)^d\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Ferner existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle n, $k \geq n_0$ und $x \in \overline{\Omega}$ gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{f}_k(x)| &< \varepsilon\,,\\ |\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{f}(x)| &< \varepsilon\,, \end{aligned}$$

da $\mathbf{f}_n \rightrightarrows \mathbf{f}$ auf $\overline{\Omega}$ $(n \to \infty)$. Also ergibt sich für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \partial\Omega$

$$|\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{p}| \geq |\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| - |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_n(x)| \geq 8\,\varepsilon\,,$$

und insbesondere gilt:

$$\mathbf{p} \notin \mathbf{f}_n(\partial\Omega)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.52}$$

Lemma 1.50 liefert somit für alle n, $k \geq n_0$:

$$d(\mathbf{f}_k, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}_n, \Omega, \mathbf{p})\,,$$

und daher existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(\mathbf{f}_n, \Omega, \mathbf{p})$. Er ist unabhängig von der Wahl der Folge $(\mathbf{f}_n)$: Für eine weitere Folge $(\mathbf{g}_n)$, die (1.51) und (1.52) erfüllt, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\mathbf{g}_n(x) - \mathbf{f}_n(x)| \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_1,\ \forall x \in \overline{\Omega}\,,$$

und Lemma 1.50 liefert:

$$d(\mathbf{g}_n, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}_n, \Omega, \mathbf{p})\,.$$

Daher können wir definieren

$$d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) := \lim_{n\to\infty} d(\mathbf{f}_n, \Omega, \mathbf{p})\,.$$

Somit ist nun für $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$ der Abbildungsgrad definiert.

4.1.4 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Brouwer

1.53 Satz. *Seien Ω_1, Ω_2 disjunkte, beschränkte, offene Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, sei $\mathbf{f}\colon \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^d$ stetig und für $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ gelte: $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$. Dann gilt auch:*

$$d(\mathbf{f}, \Omega_1 \cup \Omega_2, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}, \Omega_1, \mathbf{p}) + d(\mathbf{f}, \Omega_2, \mathbf{p}) .$$

Beweis. 1. Sei $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)\big)^d$ und sei $\mathbf{p}$ so, dass $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält. Dann gilt:

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})\\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2}} J(\mathbf{f})(x) = \sum_{\substack{\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})\\ x\in\Omega_1}} J(\mathbf{f})(x) + \sum_{\substack{\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})\\ x\in\Omega_2}} J(\mathbf{f})(x)$$

aufgrund der Disjunktheit der Mengen Ω_1 und Ω_2.

2. Sei $\mathbf{f} \in \big(C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2)\big)^d \cap \big(C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)\big)^d$ und sei $\mathbf{p}$ so, dass $f^{-1}(\mathbf{p})$ nichtreguläre Punkte enthält. Wir wählen eine Folge $(\mathbf{p}_n)$, die (1.49) für $\Omega_1 \cup \Omega_2$ erfüllt. Nach 1. gilt die Behauptung für jedes $\mathbf{p}_n$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daher die Behauptung für $\mathbf{p}$, da die Folge $(\mathbf{p}_n)$ (1.49) sowohl bezüglich Ω_1 als auch bezüglich Ω_2 erfüllt.

3. Sei $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)\big)^d$. Wir wählen eine Folge $(\mathbf{f}_n)$, die (1.51) für $\Omega_1 \cup \Omega_2$ erfüllt. 2. liefert die Behauptung für jedes $\mathbf{f}_n$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann das Gewünschte, da die Folge $(\mathbf{f}_n)$ (1.51) sowohl bezüglich Ω_1 als auch bezüglich Ω_2 erfüllt. ∎

1.54 Satz. *Sei $\mathbf{f} \in C(\overline{\Omega})$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Falls $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) \neq 0$ ist, dann existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $\mathbf{f}(x_0) = \mathbf{p}$.*

Beweis. Angenommen die Behauptung sei falsch und es gelte $\mathbf{f}(x) \neq \mathbf{p}$ für alle $x \in \overline{\Omega}$. Damit haben wir $|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$. Da $\mathbf{f}$ und der Betrag $|\cdot|$ stetig sind und $\overline{\Omega}$ kompakt ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| \geq 2\,\varepsilon .$$

Sei $(\mathbf{f}_n)$ eine Folge, die (1.51) und (1.52) erfüllt. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt:

$$|\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{f}(x)| \leq \varepsilon .$$

Somit gilt für alle $x \in \overline{\Omega}$ und alle $n \geq n_0$

$$|\mathbf{f}_n(x) - \mathbf{p}| \geq |\mathbf{f}(x) - \mathbf{p}| - |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_n(x)| \geq \varepsilon .$$

Also ist $\mathbf{f}_n^{-1}(\mathbf{p}) = \emptyset$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}_n(\partial\Omega)$. Aufgrund der Bemerkung nach Definition 1.3 erhalten wir

$$d(\mathbf{f}_n, \Omega, \mathbf{p}) = 0 .$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt die Behauptung. ∎

1.55 Satz. *Sei* $\mathbf{f}(x,t)\colon \overline{\Omega} \times [a,b] \to \mathbb{R}^d$ *stetig und sei* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ *ein Punkt so, dass für alle* $x \in \partial\Omega$ *und alle* $t \in [a,b]$ *gilt* $\mathbf{f}(x,t) \neq \mathbf{p}$. *Dann ist* $t \mapsto d(\mathbf{f}(\cdot,t),\Omega,\mathbf{p})$ *konstant auf* $[a,b]$.

Beweis. Da $\partial\Omega \times [a,b]$ kompakt ist, existiert nach den Voraussetzungen ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in \partial\Omega$ und alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$|\mathbf{f}(x,t) - \mathbf{p}| \geq 9\,\varepsilon\,.$$

Außerdem ist $\mathbf{f}(x,t)$ gleichmäßig stetig auf $\overline{\Omega} \times [a,b]$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $x \in \overline{\Omega}$ und alle t_1, t_2 mit $|t_1 - t_2| < \delta$ gilt:

$$|\mathbf{f}(x,t_1) - \mathbf{f}(x,t_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Für t_1, t_2, mit $|t_1 - t_2| < \delta$, wählen wir zwei Folgen $(\mathbf{f}_{1,n})$ und $(\mathbf{f}_{2,n})$, die (1.51) und (1.52) erfüllen, insbesondere

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1,n}(\cdot) &\rightrightarrows \mathbf{f}(\cdot,t_1) \ \text{ in } \overline{\Omega} \quad (n \to \infty)\,,\\ \mathbf{f}_{2,n}(\cdot) &\rightrightarrows \mathbf{f}(\cdot,t_2) \ \text{ in } \overline{\Omega} \quad (n \to \infty)\,. \end{aligned}$$

Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$, gilt:

$$|\mathbf{f}(x,t_i) - \mathbf{f}_{i,n}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_{i,n}(x) - \mathbf{p}| &\geq |\mathbf{p} - \mathbf{f}(x,t_i)| - |\mathbf{f}_{i,n}(x) - \mathbf{f}(x,t_i)|\\ &\geq 8\,\varepsilon\,, \qquad i = 1,2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}_{1,n}(x) - \mathbf{f}_{2,n}(x)| &\leq |\mathbf{f}_{1,n}(x) - \mathbf{f}(x,t_1)| + |\mathbf{f}(x,t_1) - \mathbf{f}(x,t_2)|\\ &\qquad + |\mathbf{f}(x,t_2) - \mathbf{f}_{2,n}(x)|\\ &< \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 1.50 erfüllt, welches

$$d(\mathbf{f}_{1,n},\Omega,\mathbf{p}) = d(\mathbf{f}_{2,n},\Omega,\mathbf{p})$$

liefert. Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt für alle t_1, t_2, mit $|t_1 - t_2| < \delta$,

$$d(\mathbf{f}(\cdot,t_1),\Omega,\mathbf{p}) = d(\mathbf{f}(\cdot,t_2),\Omega,\mathbf{p})\,.$$

Eine endliche Überdeckung von $[a,b]$ mit Intervallen der Länge kleiner δ liefert sofort, dass $d(\mathbf{f}(\cdot,t),\Omega,\mathbf{p})$ konstant auf $[a,b]$ ist. ∎

Mithilfe dieses Satzes können wir die Aussage von Lemma 1.50 verschärfen.

1.56 Satz. *Seien* $\mathbf{f}_i\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$, *stetig und gelte für* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ *und alle* $x \in \partial\Omega$*:*

$$|\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_2(x)| < |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{p}|\,.$$

Dann gilt:

$$d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}) = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p})\,.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle $x \in \partial\Omega$:

$$|\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{p}| > 0$$

und

$$|\mathbf{f}_2(x) - \mathbf{p}| \geq |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{p}| - |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_2(x)| > 0\,.$$

Wir setzen $\mathbf{f}(x,t) := \mathbf{f}_1(x) + t(\mathbf{f}_2(x) - \mathbf{f}_1(x))$, $0 \leq t \leq 1$. Offensichtlich ist $\mathbf{f}$ stetig auf $\overline{\Omega} \times [0,1]$. Seien $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0,1]$ so, dass $\mathbf{f}(x,t) = \mathbf{p}$. Daraus folgt aufgrund der Voraussetzung:

$$|\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{p}| = t\,|\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{f}_2(x)| < |\mathbf{f}_1(x) - \mathbf{p}|\,,$$

was nicht möglich ist. Also gilt $\mathbf{f}(x,t) \neq \mathbf{p}$ für alle $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0,1]$. Die Funktion $\mathbf{f}(x,t)$ und der Punkt $\mathbf{p}$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.55, und somit ist der Abbildungsgrad konstant für alle $t \in [0,1]$, d.h.

$$d(\mathbf{f}(\cdot,t), \Omega, \mathbf{p}) = d\big(\mathbf{f}_1(\cdot) + t\big(\mathbf{f}_2(\cdot) - \mathbf{f}_1(\cdot)\big), \Omega, \mathbf{p}\big) = C\,.$$

Wenn wir $t = 0$ und $t = 1$ einsetzen, erhalten wir

$$d(\mathbf{f}_1, \Omega, \mathbf{p}) = C = d(\mathbf{f}_2, \Omega, \mathbf{p})\,.$$

■

Ein triviales Beispiel für eine Funktion mit nichttrivialem Abbildungsgrad ist die identische Abbildung $\mathbf{id}$, denn es gilt offensichtlich:

$$d(\mathbf{id}, \Omega, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } \mathbf{p} \notin \overline{\Omega}\,, \\ 1\,, & \text{falls } \mathbf{p} \in \Omega\,. \end{cases}$$

Der folgende Satz liefert nichttriviale Beispiele für Funktionen deren Abbildungsgrad nicht identisch Null ist.

1.57 Satz (Borsuk 1933). *Sei* Ω *eine symmetrische, d.h. aus* $x \in \Omega$ *folgt* $-x \in \Omega$, *offene beschränkte Menge im* $\mathbb{R}^d$. *Sei* $0 \in \Omega$ *und* $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^d$ *eine ungerade Funktion auf* $\partial\Omega$, *d.h. für alle* $x \in \partial\Omega$ *gilt* $\mathbf{f}(x) = -\mathbf{f}(-x)$. *Falls* $0 \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$, *dann ist* $d(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{0})$ *eine ungerade Zahl.*

Beweis. Der Beweis beruht auf speziellen Konstruktionen zur Fortsetzung von Funktionen (cf. [11, S. 24–29]). ■

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir, wie angekündigt, den Satz von Brouwer auf eine andere Weise als im Kapitel 1 beweisen.

1.58 Satz (Brouwer). *Sei* $\mathbf{f}\colon \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^d \to \overline{B_1(0)}$ *eine stetige Funktion. Dann existiert ein Fixpunkt in* $\overline{B_1(0)}$*, d.h. es existiert ein* $x_0 \in \overline{B_1(0)}$ *mit*

$$\mathbf{f}(x_0) = x_0\,.$$

Beweis. Nehmen wir an, dass für alle $x \in \overline{B_1(0)}$ gilt $\mathbf{f}(x) \neq x$. Wir definieren $\mathbf{F}(x,t) = x - t\,\mathbf{f}(x)$ für $x \in \overline{B_1(0)}$ und $0 \leq t \leq 1$. Unsere Annahme impliziert

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(x,t)| = |x - t\,\mathbf{f}(x)| \geq |x| - t|\mathbf{f}(x)| &\geq 1 - t \quad && \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1]\,, \\ &> 0 && \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1)\,, \end{aligned}$$

d.h. $\mathbf{0} \notin \mathbf{F}(\partial B_1(0), t)$, $0 \leq t < 1$. Für $t = 1$ folgt $|\mathbf{F}(x,1)| > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ aufgrund unserer Annahme. Demnach sind die Voraussetzungen von Satz 1.55 für $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ erfüllt und wir erhalten

$$d(\mathbf{F}(\cdot,0), B_1(0), \mathbf{0}) = d(\mathbf{F}(\cdot,1), B_1(0), \mathbf{0})\,.$$

Nun ist aber $\mathbf{F}(\cdot,0)$ die Identität und somit erhalten wir $d(\mathbf{F}(\cdot,0), B_1(0), \mathbf{0}) = 1$. Nach Satz 1.54 existiert daher ein $x_0 \in B_1(0)$ mit

$$x_0 - \mathbf{f}(x_0) = 0\,.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also besitzt $\mathbf{f}$ einen Fixpunkt. ■

Beispiel. Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + \sin(x+y) &= 0 \\ x - 2y + \cos(x+y) &= 0 \end{aligned} \tag{1.59}$$

besitzt eine Lösung in $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^2$, falls $1 < 5r^2$. Um dies zu zeigen, definieren wir $f, g\colon [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &:= 2x + y + t\sin(x+y)\,, \\ g(t,x,y) &:= x - 2y + t\cos(x+y)\,. \end{aligned}$$

Für $t = 0$ besitzt das homogene, lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

die eindeutige Lösung $(x,y) = (0,0)$, da die zugehörige Koeffizientenmatrix Rang 2 hat und deren Determinante -1 ist. Somit erhalten wir nach Definition 1.3, dass für alle $r > 0$ und $\mathbf{F}(t,x,y) := \big(f(t,x,y), g(t,x,y)\big)$ gilt:

$$d(\mathbf{F}(0,\cdot,\cdot), B_r(0), \mathbf{0}) = -1\,. \tag{1.60}$$

Nehmen wir an es gäbe ein $(x,y) \in \partial B_r(0)$ mit $f(t,x,y) = g(t,x,y) = 0$.

Dann erhielten wir

$$t^2\big(\sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)\big) = (-2x-y)^2+(2y-x)^2\,,$$

also

$$t^2 = 5r^2\,.$$

Für $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $t \in [0,1]$ ist dies nicht möglich, d.h. $\mathbf{F}(t,x,y) \neq \mathbf{0}$ für alle $t \in [0,1]$ und alle $(x,y) \in \partial B_r(0)$, $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Satz 1.55 und (1.60) liefern also

$$d(\mathbf{F}(1,\cdot,\cdot), B_r(0), \mathbf{0}) = -1\,.$$

Aufgrund von Satz 1.54 besitzt also das Gleichungssystem (1.59) eine Lösung.

4.2 Der Abbildungsgrad von Leray–Schauder

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des Abbildungsgrades auf unendlich–dimensionale Räume ausweiten. Bei diesem Schritt können jedoch Probleme auftreten. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, dass die Einheitskugel in unendlich–dimensionalen Räumen nicht kompakt ist – im Gegensatz zur Einheitskugel in endlich–dimensionalen Räumen. In Abschnitt 1.2.2 haben wir aus dem Gegenbeispiel von Kakutani (cf. Satz 1.2.33) bereits gelernt, dass im Allgemeinen eine stetige Funktion auf einem Banachraum, die die Einheitskugel auf sich selbst abbildet, keinen Fixpunkt haben muss. Dieses Gegenbeispiel zeigt auch, dass es unmöglich ist, einen Abbildungsgrad für nur stetige Funktionen auf Banachräumen zu definieren, der dieselben Eigenschaften hat wie in endlich–dimensionalen Räumen. Diese Eigenschaften implizieren nämlich die Existenz eines Fixpunktes von stetigen Abbildungen, die die Einheitskugel auf sich selber abbilden.

Die Grundidee bei der Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray–Schauder ist, die betrachteten Operatoren durch Operatoren mit endlich–dimensionalen Wertebereich zu approximieren. Dabei hilft uns Satz 1.2.37. Dieser besagt:

$$\begin{aligned} &T\colon \overline{M} \subseteq X \to X \text{ kompakt, } M \text{ beschränkt und offen.}\\ &\Longrightarrow \exists\, P_n\colon \overline{M} \to X \text{ kompakt mit } \dim R(P_n) < \infty \ \text{ und}\\ &\qquad |Tx - P_n x| \le \frac{1}{n} \quad \forall x \in \overline{M}\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Daher ist es sinnvoll, für kompakte Operatoren einen Abbildungsgrad zu definieren. Im Weiteren werden wir mit den im Beweis von Satz 1.2.37 konstruierten Schauder–Operatoren P_n arbeiten.

4.2.1 Abbildungsgrad für endlich–dimensionale Vektorräume

Bisher haben wir einen Abbildungsgrad auf $\mathbb{R}^d$ definiert. Jetzt wollen wir dies auf beliebige endlich–dimensionale normierte Vektorräume verallgemeinern. Sei X ein normierter Vektorraum mit $\dim X < \infty$. Dann gibt es eine Zahl $d \in \mathbb{N}$ und einen *isometrischen Isomorphismus* $\mathbf{h}\colon X \to \mathbb{R}^d$, d.h. $\mathbf{h}$ ist eine stetige, lineare, bijektive Abbildung mit $|\mathbf{h}(x)|_{\mathbb{R}^d} = \|x\|_X$.

Sei $f\colon \overline{\Omega} \subseteq X \to X$ eine stetige Abbildung, wobei die Menge Ω offen und beschränkt ist, und sei $p \notin f(\partial\Omega)$. Wir definieren den **Abbildungsgrad** der Abbildung f bezüglich Ω und p durch[2]

$$d_X(f,\Omega,p) := d_{\mathbb{R}^d}\big(\mathbf{h}\circ f\circ \mathbf{h}^{-1}, \mathbf{h}(\Omega), \mathbf{h}(p)\big)\,. \tag{2.2}$$

2.3 Lemma. *Die Definition* (2.2) *ist unabhängig von der Wahl von* $\mathbf{h}$.

Beweis. O.B.d.A. sei $p = 0$. Aufgrund der Theorie, die wir im Abschnitt 4.1 entwickelt haben, können wir annehmen, dass $f \in C^1(\Omega;X)\cap C(\overline{\Omega};X)$ und dass das Urbild von $\mathbf{h}_1(0)$ unter der Abbildung $\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}$ nur reguläre Punkte enthält. Seien nun $\mathbf{h}_i\colon X \to \mathbb{R}^d$, $i = 1,2$, zwei isometrische Isomorphismen. Dann ist $\mathbf{h} := \mathbf{h}_2\circ \mathbf{h}_1^{-1}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$, und insbesondere gilt $|J(\mathbf{h})| = 1$. Da das Urbild von $\mathbf{h}_1(0)$ unter der Abbildung $\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}$ nur reguläre Punkte enthält, enthält auch das Urbild von $\mathbf{h}(\mathbf{h}_1(0)) = \mathbf{h}_2(0)$ unter der Abbildung $\mathbf{h}\circ\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}\circ\mathbf{h}^{-1} = \mathbf{h}_2\circ f\circ \mathbf{h}_2^{-1}$ nur reguläre Punkte. Sei φ eine Funktion mit den Eigenschaften aus Lemma 1.18. Dann gilt aufgrund von Lemma 1.18, des Transformationssatzes (cf. Satz A.11.17) und der Eigenschaften der Isometrie $\mathbf{h}$, insbesondere $|J(\mathbf{h})| = 1$, $\mathbf{h}\circ\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2$ und $|\mathbf{h}(z)| = |z|$:

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}^d}\big(\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}, \mathbf{h}_1(\Omega), \mathbf{h}_1(0)\big) &= \int\limits_{\mathbf{h}_1(\Omega)} \varphi\big(|\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}(x)|\big)\,J\big(\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}\big)(x)\,dx \\
&= \int\limits_{\mathbf{h}(\mathbf{h}_1(\Omega))} \varphi\big(|\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}\circ \mathbf{h}^{-1}(y)|\big)\,J\big(\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}\big)\big(\mathbf{h}^{-1}(y)\big)\,dy \\
&= \int\limits_{\mathbf{h}_2(\Omega)} \varphi(|\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_2^{-1}(y)|)\,J\big(\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}\big)\big(\mathbf{h}^{-1}(y)\big)\,dy \\
&= \int\limits_{\mathbf{h}_2(\Omega)} \varphi(|\mathbf{h}_2\circ f\circ \mathbf{h}_2^{-1}(y)|)\,J\big(\mathbf{h}_1\circ f\circ \mathbf{h}_1^{-1}\big)\big(\mathbf{h}^{-1}(y)\big)\,dy \qquad (2.4)\\
&= \int\limits_{\mathbf{h}_2(\Omega)} \varphi\big(|\mathbf{h}_2\circ f\circ \mathbf{h}_2^{-1}(x)|\big)\,J\big(\mathbf{h}_2\circ f\circ \mathbf{h}_2^{-1}\big)(y)\,dy \\
&= d_{\mathbb{R}^d}\big(\mathbf{h}_2\circ f\circ \mathbf{h}_2^{-1}, \mathbf{h}_2(\Omega), \mathbf{h}_2(0)\big)\,,
\end{aligned}$$

[2] Wir benutzen hier auch für die Inverse der Abbildung $\mathbf{h}\colon X \to \mathbb{R}^d$ die Vektorschreibweise $\mathbf{h}^{-1} = (\mathbf{h})^{-1}\colon \mathbb{R}^d \to X$, obwohl dieses keine Abbildung nach $\mathbb{R}^d$ ist.

wobei wir auch benutzt haben, dass

$$\begin{aligned}
&J\big(\mathbf{h}_2 \circ f \circ \mathbf{h}_2^{-1}\big)(y) \\
&= J\big(\mathbf{h} \circ \mathbf{h}_2 \circ f \circ \mathbf{h}_2^{-1} \circ \mathbf{h}^{-1}\big)(y) \\
&= J\big(\mathbf{h}\big)\big(\mathbf{h}_2 \circ f \circ \mathbf{h}_2^{-1} \circ \mathbf{h}^{-1}(y)\big) \cdot J\big(\mathbf{h}_1 \circ f \circ \mathbf{h}_1^{-1}\big)\big(\mathbf{h}^{-1}(y)\big) \cdot J\big(\mathbf{h}^{-1}\big)(y) \\
&= J\big(\mathbf{h}_1 \circ f \circ \mathbf{h}_1^{-1}\big)\big(\mathbf{h}^{-1}(y)\big)\,,
\end{aligned}$$

da für alle $y, z \in \mathbb{R}^d$ gilt $J(\mathbf{h})(y)\, J(\mathbf{h}^{-1})(z) = 1$. Also folgt die Behauptung aus (2.4), mithilfe von Approximationsargumenten und der Theorie, die wir in Abschnitt 4.1 entwickelt haben. ∎

2.5 Satz (Reduktion). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Sei $m < d$ und $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^d$, d.h. der Raum $\mathbb{R}^m$ wird identifiziert mit dem Teilraum des $\mathbb{R}^d$, für dessen Elemente x gilt:*

$$x_{m+1} = \ldots = x_d = 0\,.$$

Sei $\mathbf{f}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ stetig und $\mathbf{g}\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ definiert durch

$$\mathbf{g}(x) = x + \mathbf{f}(x)\,, \quad x \in \overline{\Omega}\,.$$

Dann gilt für alle $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathbf{p} \notin \mathbf{g}(\partial\Omega)$

$$d_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{g}, \Omega, \mathbf{p}) = d_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{g}|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, \mathbf{p})\,.$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass $\mathbf{g}(\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt und somit die rechte Seite in obiger Formel wohldefiniert ist. Sei $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^m \cap \big(C^1(\Omega)\big)^m$ und sei $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ derart, dass $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält. Sei nun $x \in \Omega$ ein Urbild von $\mathbf{p}$ bzgl. $\mathbf{g}$, d.h. $\mathbf{g}(x) = x + \mathbf{f}(x) = \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$. Diese Gleichung kann man auch schreiben als $x = \mathbf{p} - \mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $x \in \mathbb{R}^m$, x liegt also im Urbild von $\mathbf{p}$ bzgl. $\mathbf{g}|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}$. Somit gilt $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{p}) = (\mathbf{g}|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m})^{-1}(\mathbf{p})$. Zu zeigen ist nun, dass $J(\mathbf{g})(x) = J\big(\mathbf{g}|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}\big)(x)$. Dazu müssen wir die jeweiligen Gradienten berechnen. Es gilt:

$$\nabla \mathbf{g}|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(x) = \mathsf{I}_m + \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m}\,,$$

$$\nabla \mathbf{g}(x) = \left(\begin{array}{c|c} \mathsf{I}_m + \nabla \mathbf{f} & \big(\frac{\partial f^i}{\partial x_k}\big)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=m+1,\ldots,d}} \\ \hline 0 & \mathsf{I}_{d-m} \end{array}\right)\,,$$

wobei I_k, $k \in \mathbb{N}$, die k–dimensionale Einheitsmatrix ist. Entwicklung nach der „rechten unteren Ecke“ liefert $J(\mathbf{g})(x) = J\big(\mathbf{g}|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}\big)(x)$. Somit folgt aus der Definition 1.3 die Behauptung im Falle $\mathbf{f} \in \big(C(\overline{\Omega})\big)^m \cap \big(C^1(\Omega)\big)^m$ und $\mathbf{p}$ derart, dass $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält. Aus der Theorie des Abschnittes 4.1 folgt daher die Behauptung im allgemeinen Fall. ∎

4.2.2 Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray–Schauder

Wir wollen nun einen Abbildungsgrad für *kompakte Perturbationen* der Identität definieren. In diesem Abschnitt sei X ein Banachraum und $M \subset X$ immer eine beschränkte, offene Menge. Ferner sei

$$T : \overline{M} \subset X \to X$$

ein kompakter Operator und sei

$$0 \notin (I - T)(\partial M)\,,$$

wobei $I : X \to X$ die Identität ist.

Der Einfachheit halber definieren wir den Abbildungsgrad nur für den Punkt 0. Es ist jedoch kein Problem, den Begriff des Abbildungsgrades auf beliebige Punkte $p \in X$ zu erweitern.

Zuerst zeigen wir, dass eine positive Zahl $r > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \partial M$ gilt:

$$\|x - Tx\| \geq r\,. \tag{2.6}$$

Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subset \partial M$ mit

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Da die Menge M beschränkt und der Operator T kompakt ist, gibt es ein $x_0 \in X$ und eine Teilfolge, die wiederum mit (x_n) bezeichnet wird, so dass $Tx_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Damit folgt

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - x_0\|\,.$$

Beide Summanden auf der rechten Seite konvergieren gegen 0 für $n \to \infty$, also gilt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Somit erhalten wir

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0\,,$$

wobei wir auch die Stetigkeit von T benutzt haben. Wir haben also gezeigt, dass $x_0 - Tx_0 = 0$ gilt, wobei $x_0 \in \partial M$, da ∂M eine abgeschlossene Menge ist und $(x_n) \subset \partial M$ gilt. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $0 \notin (I - T)(\partial M)$. Also muss (2.6) gelten.

Wir betrachten nun die Schauder–Operatoren $P_n : \overline{M} \to X$. Da diese (2.1) erfüllen, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \partial M$ gilt:

$$\|P_n x - Tx\| \leq \frac{r}{2}\,. \tag{2.7}$$

Aus den Eigenschaften der P_n folgt, dass der Bildraum $R(P_n)$ in einem linearen, endlich–dimensionalen Unterraum von X liegt, den wir mit X_n bezeichnen, d.h. $X_n := \operatorname{span}(R(P_n))$. Man sieht sofort, dass $X_n \cap M =: M_n$

eine offene, beschränkte Menge in X_n ist, für die $\partial M_n \subseteq \partial M$ gilt. Weiterhin haben wir $(I - P_n)(M_n) \subseteq X_n$ und aus (2.6) und (2.7) folgt:

$$\inf_{x\in\partial M} \|x - P_n x\| \geq \inf_{x\in\partial M} \Big(\|x - Tx\| - \|Tx - P_n x\|\Big) \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0\,,$$

d.h. $0 \notin (I - P_n)(\partial M)$. Somit können wir $d_{X_n}(I - P_n, M_n, 0)$ wie in (2.2) definieren. Den **Leray–Schauder Abbildungsgrad** von $I - T$ bezüglich M und 0 definieren wir nun durch

$$d_X(I - T, M, 0) := \lim_{n\to\infty} d_{X_n}(I - P_n, M_n, 0)\,. \tag{2.8}$$

Um diese Definition zu rechtfertigen, müssen wir zeigen, dass der Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der P_n ist.

Seien dazu P_{n_1} und P_{n_2} zwei Abbildungen, so dass für alle $x \in \overline{M},\ i = 1, 2$ gilt:

$$\|P_{n_i} x - Tx\| \leq \frac{r}{2}\,.$$

Außerdem seien X_{n_i} die zugehörigen linearen, endlich–dimensionalen Unterräume von X, und X_m sei der kleinste lineare Unterraum von X, der X_{n_1} und X_{n_2} enthält. Aus Satz 2.5 folgt

$$d(I - P_{n_i}, M_{n_i}, 0) = d(I - P_{n_i}, M_m, 0)\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{2.9}$$

wobei $M_{n_i} = X_{n_i} \cap M$ und $M_m = X_m \cap M$. Wir betrachten die Homotopie $H\colon M_m \times [0, 1] \to X_m$, definiert durch

$$H(x, t) = t(I - P_{n_1})(x) + (1 - t)(I - P_{n_2})(x)\,.$$

Wir haben für alle $x \in \partial M$

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - (I - T)(x)\| &= \|H(x, t) - (t + (1 - t))(I - T)(x)\| \\ &\leq t\|(I - P_{n_1})(x) - (I - T)(x)\| \\ &\qquad + (1 - t)\|(I - P_{n_2})(x) - (I - T)(x)\| \\ &\leq t\,\frac{r}{2} + (1 - t)\,\frac{r}{2} = \frac{r}{2}\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Somit erhalten wir, mithilfe von (2.6) und (2.7), dass für alle $t \in [0, 1]$ und alle $x \in \partial M$ gilt:

$$\begin{aligned} \|H(x, t)\| &\geq \|(I - T)(x)\| - \|H(x, t) - (I - T)(x)\| \\ &\geq r - \frac{r}{2} > 0\,. \end{aligned}$$

Daher folgt nach Satz 1.55 (Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades in X_m), dass $d(H(\cdot, t), M_m, 0)$ auf $[0, 1]$ konstant ist, d.h. für alle $s, t \in [0, 1]$ gilt:

$$d(s(I-P_{n_1})+(1-s)(I-P_{n_2}), M_m, 0) = d(t(I-P_{n_1})+(1-t)(I-P_{n_2}), M_m, 0).$$

Für $s = 0$ und $t = 1$ erhalten wir insbesondere

$$d(I - P_{n_2}, M_m, 0) = d(I - P_{n_1}, M_m, 0)\,.$$

Dies und (2.9) ergeben also

$$d(I - P_{n_1}, M_{n_1}, 0) = d(I - P_{n_2}, M_{n_2}, 0)\,, \tag{2.11}$$

somit ist die Folge in (2.8) für $n \geq n_0$ konstant, der Grenzwert existiert und ist unabhängig von der Wahl der Schauder–Operatoren P_n.

4.2.3 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Leray–Schauder

Jetzt zeigen wir, dass der Abbildungsgrad von Leray–Schauder dieselben Eigenschaften hat wie der Abbildungsgrad von Brouwer.

2.12 Satz. *Falls $d(I - T, M, 0) \neq 0$, dann gibt es ein $x_0 \in M$ mit*

$$Tx_0 = x_0\,.$$

Beweis. Wir wählen Schauder–Operatoren P_n. Da diese (2.1) erfüllen, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass nach Konstruktion des Abbildungsgrades (cf. (2.11)) für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$d(I - P_n, M_n, 0) \neq 0\,.$$

Daher folgt aus Satz 1.54, dass es Elemente $x_n \in M_n$ gibt mit $P_n x_n = x_n$. Für die Folge (x_n) gilt:

$$\begin{aligned} \|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - P_n x_n\| + \|P_n x_n - Tx_n\| \\ &\leq 0 + \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Da T kompakt ist und die Folge $(x_n) \subset M_n \subseteq M$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge, wiederum mit (x_n) bezeichnet, und einen Punkt $y \in \overline{M}$, so dass $Tx_n \to y$ $(n \to \infty)$. Aus obiger Abschätzung folgt, dass $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. Da T stetig ist, gilt außerdem $Tx_n \to Ty$ $(n \to \infty)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes impliziert dies $Ty = y$. Da $0 \notin (I - T)(\partial M)$ ist, gilt also $y \in \overline{M} \setminus \partial M = M$. ■

2.13 Definition. *Für $t \in [0, 1]$ seien die Operatoren $T(t)\colon N \subseteq X \to X$ kompakt. Dann ist $T\colon t \mapsto T(t)$ genau dann eine **Homotopie**, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle beschränkten Teilmengen $G \subseteq N$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle t_1, t_2 mit $|t_1 - t_2| < \delta$ und alle $x \in G$ gilt:*

$$\|T(t_1)(x) - T(t_2)(x)\| \leq \varepsilon\,.$$

2.14 Satz. *Sei T eine Homotopie auf $\overline{M}$, wobei M eine offene, beschränkte Teilmenge von X ist. Sei ferner $T(t)(x) \neq x$ für alle $t \in [0, 1]$ und alle $x \in \partial M$. Dann hat für alle $t \in [0, 1]$ der Abbildungsgrad $d(I - T(t), M, 0)$ denselben Wert.*

Beweis. 1. Zuerst zeigen wir, dass eine Zahl $r > 0$ existiert, so dass für alle $t \in [0,1]$ und alle $x \in \partial M$ gilt:

$$\|(I - T(t))(x)\| \geq r\,.$$

Angenommen dies sei nicht so, dann existieren Folgen $(x_n) \subset \partial M$ und $(t_n) \subset [0,1]$, so dass

$$x_n - T(t_n)(x_n) = y_n\,, \tag{2.15}$$

mit $\|y_n\| \leq \frac{1}{n}$. Aus $(x_n) \subset \partial M$ und der Beschränktheit von M folgt, dass auch die Folge (x_n) beschränkt ist. Weiterhin folgt aus $(t_n) \subset [0,1]$, die Existenz einer Teilfolge, wiederum mit (t_n) bezeichnet, und eines Punktes $t_0 \in [0,1]$ mit $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$. Da der Operator $T(t_0)$ kompakt ist, folgt für eine Teilfolge, wiederum mit (x_n) bezeichnet, $T(t_0)(x_n) \to y \in X$ $(n \to \infty)$. Dies impliziert zusammen mit Definition 2.13 im Grenzübergang $n \to \infty$

$$\|T(t_n)(x_n) - y\| \leq \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - y\| \to 0\,.$$

Also erhalten wir $T(t_n)(x_n) \to y$ $(n \to \infty)$. Dies, zusammen mit (2.15) und $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$, liefert: $x_n \to y \in \partial M$ $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von $T(t_0)$ impliziert dann $T(t_0)(x_n) \to T(t_0)(y)$ $(n \to \infty)$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(y)\| &\leq \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - T(t_0)(y)\| \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. $T(t_n)(x_n) \to T(t_0)(y)$ $(n \to \infty)$. Wenn wir daher in (2.15) den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen, erhalten wir

$$y - T(t_0)(y) = 0\,,$$

wobei $y \in \partial M$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.

2. Wir wählen nun ein festes $t_1 \in [0,1]$ und Schauder–Operatoren P_n. Da diese (2.1) erfüllen, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{M}$ gilt:

$$\|P_n(x) - T(t_1)(x)\| \leq \frac{r}{4}\,.$$

Da T eine Homotopie ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und alle $x \in \overline{M}$ gilt:

$$\|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \leq \frac{r}{4}\,.$$

Daher haben wir für alle t mit $|t - t_1| < \delta$

$$\|P_n(x) - T(t)(x)\| \leq \|P_n(x) - T(t_1)(x)\| + \|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \leq \frac{r}{2}\,,$$

d.h. die Schauder–Operatoren P_n erfüllen (2.1) auch für die Operatoren $T(t)$, $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Die Definition des Abbildungsgrades von Leray–Schauder (2.8) impliziert somit für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und genügend große n

$$d(I - P_n, M_n, 0) = d(I - T(t), M, 0)\,,$$

wobei $M_n = M \cap X_n$ und $X_n = \operatorname{span}(R(P_n))$, d.h. der Abbildungsgrad ist konstant auf dem Intervall $(t_1-\delta, t_1+\delta)$. Nun ist $[0,1] \subseteq \bigcup_{t_1 \in [0,1]}(t_1-\delta, t_1+\delta)$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es $t_1, \ldots, t_m$ mit $[0,1] \subseteq \bigcup_{j=1}^m (t_j - \delta, t_j + \delta)$. Also hat für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad $d(I - T(t), M, 0)$ denselben Wert. ■

2.16 Satz (Schauder). *Sei $M \subset X$ eine offene, konvexe, beschränkte Teilmenge und sei $T\colon \overline{M} \to \overline{M}$ ein kompakter Operator. Dann hat T einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x_0 \in M$ mit $T(x_0) = x_0$.*

Beweis. Die Menge $\overline{M}$ ist homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B_1(0)} \subset X$, d.h. es existiert ein Homöomorphismus $h\colon \overline{B_1(0)} \to \overline{M}$. Der Operator $h^{-1} \circ T \circ h\colon \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ ist offensichtlich kompakt und die Abbildung

$$H(x,t) = x - t\, h^{-1} \circ T \circ h(x)$$

ist offensichtlich eine Homotopie im Sinne von Definition 2.13. Nehmen wir an, dass $h^{-1} \circ T \circ h$ keinen Fixpunkt besitzt. Analog zum Beweis von Satz 1.58 zeigt man dann, dass für alle $x \in \partial B_1(0)$ und alle $t \in [0,1]$ gilt $H(x,t) \neq 0$. Satz 2.14 liefert also

$$1 = d(I, B_1(0), 0) = d(I - h^{-1} \circ T \circ h, B_1(0), 0)\,,$$

und somit folgt aus Satz 2.12 die Existenz eines Punktes $y_0 \in B_1(0)$ mit $T \circ h(y_0) = h(y_0)$, d.h. $x_0 = h(y_0)$ ist der gesuchte Fixpunkt von T. ■

2.17 Satz (Borsuk). *Sei $M \subset X$ eine beschränkte, offene, symmetrische Teilmenge mit $0 \in M$ und sei $T\colon \overline{M} \to \overline{M}$ ein ungerader, kompakter Operator. Ferner sei $T(x) \neq x$ für alle $x \in \partial M$. Dann ist $d(I - T, M, 0)$ ungerade.*

Beweis. Da die Menge $\overline{T(\overline{M})}$ kompakt ist, existiert ein endliches ε–Netz $v_1, \ldots, v_p$ (cf. Abschnitt A.2). Wir setzen $v_{p+1} = -v_1, \ldots, v_{2p} = -v_p$, sowie $v_{2p+1} = v_1, \ldots, v_{3p} = v_p$ und definieren

$$P_n(x) := \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx) v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx)}\,,$$

wobei

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - v_i\| & \text{für } \|x - v_i\| \le \varepsilon\,, \\ 0 & \text{für } \|x - v_i\| > \varepsilon\,. \end{cases}$$

Sei $X_n = \operatorname{span}(R(P_n))$. Man sieht leicht ein, dass $M \cap X_n$ symmetrisch ist und dass $P_n \rightrightarrows T$ $(n \to \infty)$ (cf. Beweis von Satz 1.2.37). Außerdem sind die Schauder–Operatoren P_n ungerade. In der Tat haben wir

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx)v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx)} = \frac{-\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))}\,, \tag{2.18}$$

denn $v_i = -v_{i+p}$, $i = 1, \ldots, 2p$, $Tx = -T(-x)$, und somit gilt für x mit $\|Tx - v_i\| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} m_i(Tx) &= \varepsilon - \|Tx - v_i\| = \varepsilon - \| - T(-x) - v_i\| \\ &= \varepsilon - \|T(-x) - v_{i+p}\| = m_{i+p}(T(-x))\,. \end{aligned}$$

Da $v_i = v_{i+2p}$, $i = 1, \ldots, p$, gilt auch $m_i = m_{i+2p}$, $i = 1, \ldots, p$, also erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2p} m_i(Tx)v_i &= \sum_{i=1}^{p} m_{i+2p}(Tx)v_{i+2p} + \sum_{i=p+1}^{2p} m_i(Tx)v_i \\ &= \sum_{i=p+1}^{2p} m_{i+p}(Tx)v_{i+p} + \sum_{i=1}^{p} m_{i+p}(Tx)v_{i+p} \\ &= \sum_{i=1}^{2p} m_{i+p}(Tx)v_{i+p}\,. \end{aligned}$$

Also kann man $P_n(x)$ auch schreiben als

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(Tx)v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(Tx)}\,,$$

und wir erhalten aus (2.18), dass

$$P_n(x) = -P_n(-x)\,.$$

Mit Satz 1.57 folgt, dass $d(I - P_n, M_n, 0)$ ungerade ist. Demnach ist aufgrund der Definition des Abbildungsgrades $d(I - T, M, 0)$ ungerade. ■

4.2.4 Quasilineare elliptische Gleichungen III

Diesmal wollen wir quasilineare elliptische Gleichungen in Räumen Hölder–stetiger Funktionen $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ betrachten. Dazu betrachten wir zuerst die *lineare* Gleichung

$$Au = f\,, \tag{2.19}$$

wobei X, Y Banachräume sind, $A : X \to Y$ ein linearer Operator ist und $f \in Y$ ein gegebenes Element. Sei $B : X \to Y$ ein weiterer linearer Operator und sei

$$D_t u := tAu + (1-t)Bu\,, \qquad 0 \leq t \leq 1\,. \tag{2.20}$$

Anstelle von (2.19) betrachten wir die Schar von Problemen

$$D_t\, u_t = f\,, \qquad 0 \le t \le 1\,, \tag{2.21}$$

und machen folgende Annahme: Es gibt eine Konstante $c_0 > 0$, die unabhängig von $f \in Y$ und $t \in [0,1]$ ist, so dass für alle Lösungen u von (2.21) für beliebige $f \in Y$ und beliebige $t \in [0,1]$ die *apriori Abschätzung*

$$\|u\|_X \le c_0\, \|f\|_Y \tag{2.22}$$

gilt.

2.23 Satz. *Seien X, Y Banachräume und seien $A, B : X \to Y$ stetige, lineare Operatoren. Ferner gelte für* (2.21) *die apriori Abschätzung* (2.22)*, und das Problem* (2.21) *habe für $t = 0$ und alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung. Dann hat auch das Problem* (2.19) *für alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung.*

Beweis. 1. Sei N die Menge der $t \in [0,1]$, für welche das Problem (2.21) für alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung besitzt. Offensichtlich ist $0 \in N$ und wir wollen zeigen, dass auch $1 \in N$ ist. Sei $\tau > 0$ derart, dass

$$\tau c_0\, (\|A\| + \|B\|) < 1\,. \tag{2.24}$$

Wir werden zeigen, dass dann die Implikation

$$s \in N \qquad \Rightarrow \qquad [s, s+\tau] \subseteq N \tag{2.25}$$

gilt. Da τ unabhängig von s ist, können wir in endlich vielen Schritten von 0 zu 1 gelangen, d.h. $1 \in N$.

2. Es bleibt zu zeigen, dass $[s, s+\tau] \subseteq N$ gilt, falls $s \in N$ und τ wie in (2.24) gewählt wurde. Das Problem (2.21) für $t = s + \tau\delta\,, \delta \in [0,1]$ lässt sich aufgrund der Definition (2.20) von D_t schreiben als

$$D_s u = f - \delta\tau A u + \delta\tau B u\,. \tag{2.26}$$

Da $s \in N$, existiert der inverse Operator $D_s^{-1} : Y \to X$, der linear ist und für den aufgrund von (2.22) gilt:

$$\|D_s^{-1}\| \le c_0\,.$$

Also ist (2.26) äquivalent zu

$$u = D_s^{-1}(f - \delta\tau A u + \delta\tau B u) =: Lu\,. \tag{2.27}$$

Für $L : X \to X$ gilt:

$$\|Lu - Lv\| \le \delta\tau c_0\, (\|A\| + \|B\|)\|u - v\|\,,$$

und somit liefert der Banachsche Fixpunktsatz (cf. Satz 1.1.5), dass (2.27) für alle $\delta \in [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt, d.h. $[s, s+\tau] \subseteq N$. ∎

Wir wollen Satz 2.23 anwenden um zu zeigen, dass das lineare elliptische Problem

$$\begin{aligned} \big(Lu\big)(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u(x) &= f(x) \qquad && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.28}$$

eine Lösung besitzt.

2.29 Satz (Schauder 1934). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Rand $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}, \alpha \in (0,1)$. Seien ferner $f, a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), i,j = 1,\ldots,d$ und gelte*

$$\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}} \le c_1\,, \qquad i,j = 1,\ldots,d\,. \tag{2.30}$$

Der Operator L sei elliptisch, d.h. es existiert ein $\lambda_0 > 0$, so dass für alle $x \in \overline{\Omega}$ und $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\zeta^i\zeta^j \ge \lambda_0\|\boldsymbol{\zeta}\|^2\,. \tag{2.31}$$

Dann besitzt das Problem (2.28) *eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, die der Abschätzung*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_2(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}} \tag{2.32}$$

genügt.

Der Beweis beruht auf folgenden zwei Beobachtungen:

(i) Für die Laplace–Gleichung gilt die Behauptung des Satzes, d.h. für alle $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ existiert eine eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.33}$$

die der Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_3(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}} \tag{2.34}$$

genügt. Der Beweis dieser Aussage sprengt den Rahmen dieses Buches. Man kann ihn in [13] oder [4] nachlesen.

(ii) Für das Problem (2.28) gelten *Schauder–Abschätzungen*, d.h. falls a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,d$, die Bedingungen von Satz 2.29 erfüllen und u eine Lösung von (2.28) ist, dann gilt:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_2(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}}\,. \tag{2.35}$$

Man beachte, dass die Schauder–Abschätzungen (2.35) keine Aussage über die Existenz von Lösungen enthalten. Auch der Beweis dieser Aussage kann in [13] nachgelesen werden.

Beweis (Satz 2.29). Wir wollen Satz 2.23 anwenden. Dazu setzen wir $X = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $Bu = -\Delta u$, und $Au = Lu$. Wir müssen also die apriori Abschätzung (2.22) für den Operator D_t, definiert in (2.21), herleiten. Dazu benötigen wir die folgenden Eigenschaften Hölder–stetiger Funktionen: Seien $g, h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, dann ist auch $g\,h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Dies folgt sofort aus

$$\begin{aligned} |g(x)\,h(x) - g(y)\,h(y)| &= \big|g(x)\big(h(x) - h(y)\big) + h(y)\big(g(x) - g(y)\big)\big| \\ &\leq c\,|g(x)|\,|x-y|^\alpha + c\,|h(y)|\,|x-y|^\alpha\,. \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Eigenschaft und der Definition von D_t erhalten wir für $u \in X$

$$\|D_t u\|_{C^{0,\alpha}} \leq c\,\|u\|_{C^{2,\alpha}}\,,$$

d.h. $D_t : X \to Y$ ist stetig und linear für alle $t \in [0,1]$. Die Gleichung

$$D_0 u = f$$

hat aufgrund obiger Beobachtung (i) eine eindeutige Lösung. Da die apriori Abschätzungen (2.34) und (2.35) nur von λ_0 und c_1 abhängen, erhalten wir für die Lösungen u von

$$D_t u = f\,, \quad t \in [0,1]\,,$$

sofort

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq c\,\|f\|_{C^{0,\alpha}}\,,$$

wobei c von $t \in [0,1]$ unabhängig ist. Satz 2.23 liefert also, dass

$$D_1 u = f$$

genau eine Lösung u in $X = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ besitzt. ■

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammengestellt um folgende quasilineare elliptische Gleichung zu betrachten:

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \varepsilon\,g(x,u,\nabla u) && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.36}$$

wobei ε klein genug ist, $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine $C^{0,\alpha}$–Funktion ist und der Operator L in (2.28) definiert ist.

2.37 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^d$ mit Rand $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ und sei $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ eine $C^{0,\alpha}$–Funktion. Ferner erfülle der in* (2.28) *definierte Operator L die Bedingungen* (2.30) *und* (2.31)*. Dann gibt es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $|\varepsilon|$ klein genug eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ des Problems* (2.36)*.*

Beweis. 1. Wir setzen $X = C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$ beliebig. Aufgrund der Eigenschaften Hölder–stetiger Funktionen erhalten wir für alle Funktionen mit

$$\|u\|_{C^{1,\beta}} \le c_4\,, \tag{2.38}$$

dass für $\gamma := \alpha\,\beta$ gilt:

$$\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}} \le c_5\,, \tag{2.39}$$

wobei die Konstante c_5 nur von c_4 und g abhängt.

2. Aufgrund von Satz 2.29 ist der Operator $L : C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ invertierbar. Wir setzen

$$T(t)u := t\,L^{-1}\big(\varepsilon\,g(x,u,\nabla u)\big)\,, \tag{2.40}$$

mit $T(t) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \subseteq C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, d.h. der Operator $T(t)$ ordnet jedem $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ die Lösung $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ des Problems

$$\begin{aligned} Lv &= t\,\varepsilon\,g(x,u,\nabla u) && \text{in } \Omega\,,\\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.41}$$

zu. Satz 2.29 und die kompakte Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ (cf. Satz A.12.6) liefern, dass die Operatoren $T(t)\colon C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $t \in [0,1]$, kompakt sind. Für alle $t_1, t_2 \in [0,1]$ gilt aufgrund von (2.40), (2.41) und (2.32):

$$\|T(t_1)u - T(t_2)u\|_{C^{2,\gamma}} \le c_2\,|\varepsilon|\,|t_1 - t_2|\,\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}}\,. \tag{2.42}$$

Mithilfe von (2.39) erhalten wir für beliebige Funktionen u mit $\|u\|_{C^{1,\beta}} \le c_4$

$$\|T(t_1)u - T(t_2)u\|_{C^{2,\gamma}} \le c_2\,c_5\,\varepsilon\,|t_1 - t_2|\,.$$

Dies impliziert zusammen mit der Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ dass

$$T\colon t \mapsto T(t)\colon C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$$

eine Homotopie ist.

3. Sei $B_r(0)$ die Kugel mit Radius r in $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Für alle $t \in [0,1]$ und $u \in \partial B_{c_4}(0)$ gilt:

$$T(t)u \ne u \tag{2.43}$$

falls $|\varepsilon|$ klein genug ist. In der Tat, sei $u \in \partial B_{c_4}(0)$ ein Element mit $T(t)u = u$, dann gilt aufgrund von (2.41), (2.32) und (2.39)

$$c_4 = \|u\|_{C^{1,\beta}} \le c_6\,\|u\|_{C^{2,\gamma}} \le c_6\,c_2\,t\,|\varepsilon|\,\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}} \le c_6\,c_2\,c_5\,|\varepsilon|\,,$$

wobei c_6 die Einbettungskonstante von $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ ist. Wir wählen nun $|\varepsilon|$ so klein, dass gilt:

$$c_6\, c_2\, c_5\, |\varepsilon| < c_4\,.$$

Wir erhalten einen Widerspruch und somit ist (2.43) bewiesen.

4. Satz 2.14 besagt nun, dass für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad

$$d(I - T(t), B_{c_4}(0), 0)$$

denselben Wert hat. Aufgrund von (2.41) und der Eindeutigkeitsaussage aus Satz 2.29 ist aber $T(0)$ die triviale Abbildung, d.h. $T(0)u = 0$. Da also

$$d(I - T(0), B_{c_4}(0), 0) = 1$$

gilt, haben wir auch

$$d(I - T(1), B_{c_4}(0), 0) = 1\,,$$

d.h. nach Satz 2.12 existiert eine Lösung $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ der Gleichung (2.36).

5. In Schritt 2 haben wir gezeigt, dass gilt:

$$T(1) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})\,.$$

Aufgrund der Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,1}(\overline{\Omega})$ (cf. Satz A.12.6, Satz A.12.7), sowie (2.38) und (2.39) folgern wir daraus

$$g(x, u, \nabla u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\,.$$

Dies zusammen mit (2.35) liefert

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})\,,$$

und somit ist der Satz bewiesen. ■

A Appendix

Ziel dieses Appendixes ist es, an einer Stelle wichtige grundlegende Konzepte, Hilfsmittel und Resultate aus der linearen Funktionalanalysis zusammenzustellen, die für dieses Buch relevant sind. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser mit diesen Begriffen grundsätzlich vertraut ist und es wird insbesondere auf die Darstellungen in [5], [2] und [7] verwiesen.

A.1 Topologische Räume

Der Begriff des topologischen Raumes ist motiviert durch das System der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$. Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, τ), wobei X eine Menge und τ ein System von Teilmengen von X ist, welches den folgenden Bedingungen genügt:

(O1) $X \in \tau, \emptyset \in \tau$,

(O2) die Vereinigungen einer beliebigen Familie von Mengen aus τ ist wieder eine Menge aus τ ,

(O3) der Durchschnitt einer Familie von endlich vielen Mengen aus τ ist wieder eine Menge aus τ .

Das System τ heißt **Topologie** und die Mengen aus τ heißen **offene Mengen**. Das typische Beispiel eines topologischen Raumes ist der $\mathbb{R}^d$ mit dem üblichen System offener Mengen. Weitere Beispiele sind die *diskrete Topologie*, in der alle Teilmengen von X zu τ gehören, und die *chaotische Topologie*, in der das System τ nur aus X und $\emptyset$ besteht. Wenn auf einer Menge X zwei Topologien τ_1 und τ_2 gegeben sind, so nennt man τ_1 **feiner** als τ_2 (oder τ_2 **gröber** als τ_1), wenn $\tau_2 \subset \tau_1$ gilt. Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff–Raum**, wenn es zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ zwei Mengen $U_1, U_2 \in \tau$ gibt, so dass $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gilt. Im Weiteren nehmen wir an, dass *alle von uns betrachteten topologischen Räume Hausdorff–Räume* sind.

Eine Menge $A \subseteq X$ heißt genau dann **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist. Eine **Umgebung** eines Punktes $x \in X$ ist eine Menge $V(x) \subset X$, für die es eine offene Menge $U \in \tau$ gibt mit $x \in U \subset V(x)$. Eine **Umgebungsbasis** eines Punktes $x \in X$ ist ein System von Umgebungen $(V_i)_{i \in I}$ des Punktes x, so dass jede Umgebung $V(x)$ von x mindestens eine der Mengen V_i enthält. Ein Punkt $x \in X$ heißt **innerer** (bzw.. **äußerer**) Punkt einer Menge A genau dann, wenn es eine Umgebung $V(x)$ von x gibt mit $V(x) \subseteq A$ (bzw. $V(x) \subseteq X \setminus A$). Einen Punkt der weder innerer noch äußerer Punkt von A ist nennt man **Randpunkt** von A. Für eine Menge $M \subset X$ führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \partial M &:= \{x \in X \,|\, x \text{ ist Randpunkt von } M\}\,, \\ \operatorname{int}(M) &:= \{x \in X \,|\, x \text{ ist innerer Punkt von } M\}\,, \\ \overline{M} &:= M \cup \partial M\,. \end{aligned}$$

Diese Mengen werden als **Rand**, **Inneres** und **Abschluss** von M bezeichnet. Der Abschluss von M ist abgeschlossen. Eine Menge A heißt **dicht** in X genau dann, wenn $\overline{A} = X$ gilt. Man nennt den Raum X **separabel** genau dann, wenn es eine abzählbare dichte Menge in X gibt. Sei $M \subsetneq X$ eine Teilmenge von X. Eine Menge $A \subset M$ heißt **relativ offen** in M, wenn es eine Menge $U \in \tau$ gibt, so dass $A = M \cap U$ gilt. Analog heißt eine Menge $A \subset M$ **relativ abgeschlossen** in M, wenn es eine in X abgeschlossene Menge C gibt, so dass $A = M \cap C$ gilt. Das System $\tau(M)$ bestehend aus allen in M relativ offenen Mengen heißt **induzierte Topologie** auf M.

Wenn eine Menge X mit einer Topologie versehen ist kann man Begriffe wie Stetigkeit, Kompaktheit und Konvergenz erklären. Eine Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raumes (X, τ) in einen topologischen Raum (Y, σ) heißt **stetig im Punkt** $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung $V(f(x)) \subset Y$ von $f(x)$ eine Umgebung $V(x) \subset X$ von x gibt, so dass

$$f(V(x)) \subset V(f(x))$$

gilt. Die Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig**, wenn sie in allen Punkten $x \in X$ stetig ist. Wir haben folgende Charakterisierung stetiger Abbildungen.

1.1 Lemma. *Für eine Abbildung $f : X \to Y$ eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum Y sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *Urbilder offener Mengen in Y sind offen in X.*

(iii) *Urbilder abgeschlossener Mengen in Y sind abgeschlossen in X.*

Eine Abbildung $f \colon X \to [-\infty, \infty]$ heißt **unterhalbstetig** (bzw. **oberhalbstetig**) genau dann, wenn für alle $r \in \mathbb{R}$ das Urbild $f^{-1}\big((-\infty, r]\big)$ (bzw. das Urbild $f^{-1}\big([r, \infty)\big)$) eine abgeschlossene Menge in X ist. Offensichtlich ist f stetig genau dann, wenn f sowohl unterhalbstetig als auch oberhalbstetig ist. Man nennt eine Abbildung $f : X \to Y$ einen **Homöomorphismus** genau dann, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch die inverse Abbildung f^{-1} stetig sind. Zwei topologische Räume X, Y heißen **homöomorph** genau dann, wenn ein Homöomorphismus $h \colon X \to Y$ existiert.

Eine Menge K heißt **(überdeckungs-) kompakt** genau dann, wenn jede Überdeckung von K durch offene Mengen $(U_i)_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h.

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \quad \Rightarrow \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,, i_1, \dots, i_N :\; K \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} U_{i_k}\,.$$

Die Menge M heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

1.2 Lemma. *Sei K eine kompakte Teilmenge eines topologischen Hausdorff–Raumes X. Dann gilt:*

(i) *Die Menge K ist abgeschlossen.*

(ii) *Jede Teilmenge $M \subseteq K$ ist relativ kompakt.*

Beweis. Mithilfe der Trennungseigenschaft von Hausdorff–Räumen und der Kompaktheit von K kann man leicht zeigen, dass das Komplement von K offen ist (cf. [9, Satz 3.1.8]). Somit ist Behauptung (i) bewiesen. Behauptung (ii) ist offensichtlich, da man aus jeder offenen Überdeckung von $\overline{M}$, durch Hinzunahme von $X \setminus \overline{M}$, eine offene Überdeckung von K erzeugen kann. ■

Man kann kompakte Mengen auch über Systeme abgeschlossener Mengen charakterisieren. Ein System $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X heißt **zentriert**, wenn der Durchschnitt beliebiger endlicher Teilsysteme $A_{i_k}\,, k = 1, \dots, N$, nichtleer ist.

1.3 Lemma (Endliches Durchschnittsprinzip). *Eine Menge K ist genau dann kompakt, wenn jedes zentrierte System von in K relativ abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.*

Beweis. Dies ist eine einfache Folgerung aus den *de Morganschen Rechenregeln* für Mengensysteme:

$$\bigcap_{i\in I} \big(K \setminus A_i\big) = K \setminus \bigcup_{i\in I} A_i\,, \quad \bigcup_{i\in I} \big(K \setminus A_i\big) = K \setminus \bigcap_{i\in I} A_i\,.$$

■

Für endliche, offene Überdeckungen kompakter Mengen kann man eine **Zerlegung der Eins** konstruieren. Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man definiert den **Träger** von f, in Zeichen $\operatorname{supp}(f)$, als

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\big\{x \in X \,\big|\, f(x) \neq 0\big\}}\,,$$

wobei der Abschluss bzgl. der Topologie in X gebildet wird.

1.4 Satz (Zerlegung der Eins). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge und sei $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ eine endliche Überdeckung durch offene Mengen. Dann existieren stetige Funktionen $\lambda_i\colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle* $x \in X$ *gilt:* $0 \leq \lambda_i(x) \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$.

(ii) *Die Träger der stetigen Funktionen* λ_i, $i = 1, \ldots, n$, *sind kompakt und es gilt:* $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subset U_i$, $i = 1, \ldots, n$.

(iii) *Für alle* $x \in K$ *gilt:* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1$.

Ein solches System von Funktionen $(\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ *heißt die zur Überdeckung* $(U_i)_{i=1,\ldots,n}$ *zugehörige* ***Zerlegung der Eins****.*

Beweis. cf. [18, Satz 2.13] ∎

Stetigkeit und Kompaktheit in einem topologischen Raum (X, τ) kann man auch über Folgen definieren. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt **konvergent** bzgl. der Topologie τ gegen einen Punkt $x \in X$, wenn es zu jeder Umgebung $V(x)$ des Punktes x einen Index n_0 gibt, so dass $x_n \in V(x)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Man schreibt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **folgenstetig** im Punkt $x \in X$ genau dann, wenn $f(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für alle Folgen mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ gilt. Eine Menge M nennt man **folgenkompakt** genau dann, wenn alle Folgen aus M eine in M konvergente Teilfolge besitzen, d.h.

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \qquad \exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} :\ x_{n_k} \to x \in M \quad (k \to \infty)\,.$$

Die Menge $M \subset X$ heißt **relativ folgenkompakt** genau dann, wenn alle Folgen (x_n) aus M eine in X konvergente Teilfolge (x_{n_k}) besitzen.

Im Allgemeinen stimmen in topologischen Räumen die Begriffe „stetig in x“ und „folgenstetig in x“, sowie „kompakt“ und „folgenkompakt“ *nicht* überein. Um eine Äquivalenz dieser und verwandter Begriffe zu erhalten, muss man in den obigen Definitionen den Begriff „Folgen“ durch „verallgemeinerte Folgen“ oder „Netze“ ersetzen (cf. [7, Abschnitt I.B], [9, Abschnitt 1.6]). In metrischen Räumen sind diese Begriffe äquivalent (cf. Satz 2.1).

A.2 Metrische Räume

Die Eigenschaften des topologischen Raumes basieren auf den Eigenschaften des Systems der offenen Mengen. Allerdings ist es nicht möglich, einen *Abstandsbegriff* in allgemeinen topologischen Räumen zu definieren. Um dies zu erreichen führt man *metrische Räume* ein.

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d), wobei X eine Menge ist auf der eine **Abstandsfunktion** $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben ist, welche die folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in X$ besitzt:

(M1) positive Definitheit: $d(x, y) \geq 0$, und es gilt: $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(M2) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Man nennt die Funktion d auch **Metrik** und $d(x, y)$ den **Abstand** zwischen den Punkten x und y. In metrischen Räumen kann man **offene Kugeln** um den Punkt x mit dem Radius $r > 0$ durch

$$B_r(x) := \{y \in X \,\big|\, d(x, y) < r\}$$

definieren. Weiterhin kann man sowohl den **Abstand** zweier nichtleerer Mengen $M, N \subset X$ als auch den **Durchmesser** einer Menge $M \subset X$ durch

$$\begin{aligned} \text{dist } (M, N) &:= \inf\{d(x, y) \,\big|\, x \in M \,, y \in N\}\,, \\ \text{diam } (M) &:= \sup\{d(x, y) \,\big|\, x, y \in M\} \end{aligned}$$

festlegen. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt **offen** genau dann, wenn für alle $x \in M$ eine Kugel $B_r(x)$, $r = r(x) > 0$ gibt, so dass $B_r(x) \subseteq M$. Das System aller offenen Mengen bildet eine Topologie τ_d, welche die durch die Metrik d **induzierte Topologie** genannt wird. Dadurch wird (X, τ_d) ein *topologischer Raum* und alle Begriffe, die wir in topologischen Räumen definiert haben, können auch in metrischen Räumen benutzt werden. Insbesondere nennt man eine Folge $(x_n) \subset X$ **konvergent** gegen ein Element $x \in X$ genau dann, wenn

$$d(x_n, x) \to 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Man schreibt $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ in X oder bzgl. d. Eine Folge (x_n) heißt **Cauchy–Folge** genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 = n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt:

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon\,.$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge (x_n) in X einen Limes bzgl. der Metrik d hat.

In metrischen Räumen stimmen die Begriffe „stetig in x“ und „folgenstetig in x“, „kompakt“ und „folgenkompakt“, sowie weitere verwandte Begriffe überein.

Neben (überdeckungs–)kompakt und folgenkompakt gibt es in metrischen Räumen einen weiteren Kompaktheitsbegriff. Die Menge M heißt **präkompakt** genau dann, wenn sie ein *endliches ε–Netz* besitzt, d.h. wenn sie sich für alle $\varepsilon > 0$ durch endlich viele offene ε–Kugeln überdecken lässt, d.h.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\,, x_1, \ldots, x_N \in M : \quad M \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i)\,.$$

2.1 Satz. *In einem metrischen Raum (X, d) sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *M ist (überdeckungs–) kompakt,*

(ii) *M ist folgenkompakt,*

(iii) *M ist präkompakt und vollständig.*

Weiterhin gilt:

(iv) *M ist relativ kompakt genau dann, wenn M relativ folgenkompakt ist.*

(v) *Wenn M relativ kompakt ist, dann ist M präkompakt. Die umgekehrte Implikation gilt, falls der metrische Raum (X,d) vollständig ist.*

(vi) *Wenn M kompakt ist, dann ist M abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. cf. [2, Paragraph 2.5] oder [28, S. 31–33] . ■

A.3 Vektorräume

Ein **Vektorraum** X über $\mathbb{K}$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ist eine Menge X, in der eine *Addition* und eine *skalare Multiplikation* definiert sind, d.h. für je zwei Elemente $x, y \in X$ ist eine Summe $x + y$ und für alle $x \in X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ ist ein skalares Vielfaches αx so erklärt, dass folgende Rechenregeln für alle $x, y, z \in X$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gelten:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x\,, & (x + y) + z &= x + (y + z)\,,\\ (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x\,, & \alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y\,,\\ \alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x\,, & 1x &= x\,. \end{aligned}$$

Außerdem existiert ein Element 0 in X, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$x + 0 = x\,,$$

und für alle $x \in X$ existiert $-x \in X$ mit

$$x + (-x) = 0\,.$$

Für Mengen $M, N \subseteq X$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ setzen wir:

$$\begin{aligned} M + N &:= \{x + y \,|\, x \in M\,, y \in N\}\,,\\ \alpha\, M &:= \{\alpha\, x \,|\, x \in M\}\,. \end{aligned}$$

Für eine nichtleere Menge $M \subseteq X$ bezeichnen wir mit $\operatorname{span}(M)$ die **lineare Hülle** von M, die als die Menge aller endlichen **Linearkombinationen**

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\,, \tag{3.1}$$

definiert ist, wobei $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in M$ und I eine endliche Indexmenge ist. Eine nichtleere Menge $M \subseteq X$ heißt **linearer Unterraum** von X genau dann, wenn $\operatorname{span}(M) = M$. Die Menge M ist genau dann **konvex**, wenn aus $x, y \in M$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgt: $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$. Die **konvexe Hülle** einer nichtleeren Menge $M \subseteq X$ ist die Menge aller endlichen Linearkombinationen (3.1) mit

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = 1\,, \qquad \alpha_i \in [0,1]\,, \forall\, i \in I\,.$$

Die Elemente $x_i, i = 1,\dots,n$ des Vektorraumes X heißen **linear unabhängig** genau dann, wenn für beliebige $\alpha_i \in \mathbb{K}$ aus

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i = 0$$

immer $\alpha_i = 0\,, i = 1,\dots,n$, folgt. Die **Dimension** des Vektorraumes X, bezeichnet mit $\dim(X)$, ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente aus X, falls diese Zahl endlich ist. In diesem Falle heißt der Vektorraum *endlich–dimensional*. Anderenfalls heißt ein Vektorraum *unendlich–dimensional*, in Zeichen $\dim(X) = \infty$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren n linear unabhängige Elemente $x_i \in X$, $i = 1,\dots,n$. Eine **Basis** eines endlich–dimensionalen Vektorraum X, mit $\dim(X) = n$, $n \in \mathbb{N}$, ist eine Menge $\{x_1,\dots,x_n\}$ linear unabhängiger Vektoren.

A.4 Banachräume

Ein **normierter Vektorraum** ist ein Vektorraum X über $\mathbb{K}$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, der mit einer **Norm** $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ versehen ist, welche die folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in X$ besitzt:

(N1) positive Definitheit: $\|x\| \geq 0$ und es gilt $\|x\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(N2) positive Homogenität: $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

(N3) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Setzt man

$$d(x,y) = \|x - y\|\,, \tag{4.1}$$

so wird auf X eine Metrik definiert. Somit lassen sich alle in metrischen Räumen definierten Begriffe, wie Konvergenz, Vollständigkeit, Umgebung, Offenheit und Abgeschlossenheit von Teilmengen, Kompaktheit, Separabilität und Stetigkeit, auch in normierten Vektorräumen verwenden. Insbesondere **konvergiert** eine Folge $(x_n) \subset X$ gegen $x \in X$ genau dann, wenn

$$\|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)\,. \tag{4.2}$$

Man schreibt $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$. In endlich–dimensionalen normierten Vektorräumen X gilt auch die Umkehrung von Aussage (vi) in Satz 2.1, d.h. für Teilmengen $M \subset X$ gilt:

M ist genau dann kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

Ein **Banachraum** ist ein vollständiger, normierter Vektorraum. Beispiele von Banachräumen, die neben *Hilberträumen* der wichtigste Raumtyp in der Funktionalanalysis sind, finden sich im Abschnitt A.12.

A.5 Hilberträume

Ein **Prä-Hilbertraum** H ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, in dem ein **Skalarprodukt** $(\cdot,\cdot)$ gegeben ist, d.h. eine Abbildung von $H \times H$ nach $\mathbb{K}$, die für alle $u, v, w, z \in H$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(H1) Bilinearität bzw. Sesquilinearität: $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$.

(H2) Symmetrie bzw. Hermitezität: $(u, v) = \overline{(v, u)}$, wobei $\overline{(v, u)}$ die konjugiert komplexe Zahl zu (v, u) ist.

(H3) positive Definitheit: $(u, u) \geq 0$ und es gilt $(u, u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$.

Setzt man

$$\|u\|_H := (u, u)^{\frac{1}{2}},$$

so wird H ein normierter Vektorraum. Falls dieser vollständig ist, d.h. ein Banachraum ist, nennt man H einen **Hilbertraum**. Somit lassen sich alle in Banachräumen definierten Begriffe auch in Hilberträumen verwenden.

Zwei Elemente u, v eines Hilbertraumes H heißen **orthogonal** genau dann, wenn $(u, v) = 0$ gilt. Das **Orthogonalkomplement** $V^\perp$ eines Unterraumes $V \subseteq H$ ist definiert durch

$$V^\perp := \{x \in H \,\big|\, (x, v) = 0 \ \ \forall v \in V\}.$$

Die Menge $\{w_j \in H \,\big|\, j \in I\}$, wobei I eine endliche oder abzählbare Indexmenge ist, nennt man ein **Orthonormalsystem** genau dann, wenn für alle $k, j \in I$ gilt:

$$(w_k, w_j) = \delta_{kj},$$

wobei δ_{kj} das *Kronecker–Symbol* ist, d.h. $\delta_{kj} = 1$ falls $k = j$ und $\delta_{kj} = 0$ falls $k \neq j$. Ein Orthonormalsystem $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ heißt **vollständig** in H, wenn $\operatorname{span}\{w_j \,\big|\, j \in \mathbb{N}\}$ dicht in H ist. Ein vollständiges Orthonormalsystem nennt man auch **Orthonormalbasis**. Man kann zeigen, dass jeder *separable* Hilbertraum eine Orthonormalbasis besitzt und dass sich jedes Element $u \in H$ als konvergente *verallgemeinerte Fourierreihe*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, w_j)\, w_j$$

darstellen lässt, wobei

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(u, w_j)|^2 . \tag{5.1}$$

Umgekehrt gilt: Falls ein Orthonormalsystem die Eigenschaft (5.1) für alle $u \in H$ besitzt, dann ist es vollständig.

A.6 Operatoren

Seien X, Y Banachräume über $\mathbb{K}$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der Operator $A\colon X \to Y$ heißt **beschränkt** genau dann, wenn A beschränkte Mengen in X in beschränkte Mengen in Y abbildet. Ein Operator $A\colon X \to Y$ heißt **linear** genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, Ax + \beta\, Ay .$$

Man kann zeigen, dass lineare Operatoren genau dann stetig sind, wenn sie beschränkt sind. Durch

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \|A\| := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y$$

wird auf dem Raum der stetigen, linearen Operatoren $A\colon X \to Y$, den wir mit $L(X, Y)$ bezeichnen, eine Norm definiert. Diese heißt **Operatornorm** und es gilt für alle $x \in X$:

$$\|Ax\|_Y \le \|A\|_{L(X,Y)}\, \|x\|_X .$$

Der Raum $L(X, Y)$ versehen mit der Operatornorm bildet einen Banachraum. Für $A \in L(X, Y)$ bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(A) &:= \{x \in X \,\big|\, Ax = 0\} , \\ \operatorname{R}(A) &:= \{Ax \in Y \,\big|\, x \in X\} , \end{aligned}$$

den **Kern**, bzw. den **Bildraum** von A. Wenn $A \in L(X, Y)$ bijektiv ist, d.h. $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$ und $\operatorname{R}(A) = Y$, dann existiert der inverse Operator $A^{-1}\colon Y \to X$ und es gilt $A^{-1} \in L(Y, X)$. Einen solchen Operator A nennen wir **Isomorphismus**. Ein Operator $A \in L(X, Y)$ heißt **Isometrie**, falls für alle $x \in X$ gilt: $\|Ax\|_Y = \|x\|_X$.

A.7 Dualität in Banachräumen

Sei X ein Banachraum über $\mathbb{K}$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der **Dualraum** X^* von X ist definiert durch

$$X^* := L(X, \mathbb{K}) .$$

Die Elemente f von X^* nennt man **lineare Funktionale** und man schreibt

$$\langle f, x\rangle_{X^*,X} = \langle f, x\rangle_X = \langle f, x\rangle := f(x)\,, \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Man nennt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X^*,X}$ das **Dualitätsprodukt** zwischen X und X^*. Die Norm eines linearen Funktionals ist definiert durch

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X \le 1} |\langle f, x\rangle|\,.$$

Eine Folge $(f_n) \subset X^*$ **konvergiert** gegen $f \in X^*$ genau dann, wenn

$$\|f_n - f\|_{X^*} \to 0 \quad (n \to \infty)\,. \tag{7.1}$$

Wir haben folgende einfachen Folgerungen aus dem Satz von Hahn–Banach 10.11.

7.2 Lemma. *Sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum. Dann gilt:*

(i) *Zu jedem $x \in X$ existiert ein $f \in X^*$ mit $\|f\|_{X^*} = \|x\|_X$ und $\langle f, x\rangle = \|x\|_X^2$.*
(ii) *Sei $x \in X$. Aus $\langle f, x\rangle = 0$ für alle $f \in N$, wobei $N \subseteq X^*$ eine dichte Teilmenge in X^* ist, folgt $x = 0$.*
(iii) *Sei $f \in X^*$. Aus $\langle f, x\rangle = 0$ für alle $x \in M$, wobei $M \subseteq X$ eine dichte Teilmenge in X ist, folgt $f = 0$.*

Der **Bidualraum** X^{**} eines Banachraumes X ist definiert durch

$$X^{**} := (X^*)^*$$

und wird, versehen mit der *Norm*

$$\|g\|_{X^{**}} := \sup_{\|f\|_{X^*} \le 1} |\langle g, f\rangle_{X^{**},X^*}|\,,$$

zu einem Banachraum. Die **kanonische Isometrie** $J : X \to X^{**}$ wird wie folgt definiert: Für $x \in X$ fest ist die Abbildung $f \mapsto \langle f, x\rangle$ von X^* nach $\mathbb{K}$ ein beschränktes, lineares Funktional auf X^*, d.h. ein Element von X^{**}, das mit Jx bezeichnet wird. Wir haben also

$$\langle Jx, f\rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, x\rangle_{X^*,X} \quad \forall\, x \in X, \forall\, f \in X^*\,. \tag{7.3}$$

Es ist klar, dass J eine lineare Isometrie ist, d.h. $\|Jx\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ gilt für alle $x \in X$. In der Tat haben wir aufgrund von Lemma 7.2:

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \le 1} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\|f\| \le 1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|\,.$$

Allerdings ist J nicht notwendig *surjektiv*. Man kann aber immer mithilfe von J den Raum X mit einem abgeschlossenen Unterraum von X^{**} identifizieren. Der Raum X heißt **reflexiv**, wenn die kanonische Isometrie J aus (7.3) surjektiv ist, d.h. $J(X) = X^{**}$.

7.4 Lemma. *Seien X, Y Banachräume. Dann gilt:*

(i) *Jeder abgeschlossene, lineare Unterraum von X ist reflexiv, falls X reflexiv ist.*
(ii) *Sei $I\colon X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann ist X genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.*
(iii) *X ist genau dann reflexiv, wenn X^* reflexiv ist.*
(iv) *Falls X^* separabel ist, dann ist auch X separabel.*
(v) *Sei X reflexiv. Dann ist X genau dann separabel, wenn X^* separabel ist.*
(vi) *Sei X separabel. Dann ist auch jede Teilmenge $M \subset X$ separabel.*

Beweis. Die Beweise der Behauptungen (i)–(v) kann man in [2, Paragraph 6.8] finden. Da X separabel ist, gibt es eine dichte abzählbare Teilmenge $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle rationalen Zahlen q_n wählen wir ein Elemente $x_{i,n} \in B_{q_n}(\omega_i) \cap M$ aus. Offensichtlich ist die Menge $(x_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}}$ eine dichte abzählbare Teilmenge von M, d.h. M ist separabel (cf. [7, Satz I.6.12]). ■

A.8 Schwache Topologie und schwache Konvergenzen

In normierten Vektorräumen gilt folgende fundamentale Beobachtung:

8.1 Satz (Riesz 1918). *Sei X ein normierter Vektorraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{x \in X \,\big|\, \|x\| \le 1\}$ genau dann kompakt, wenn der Raum X endlich–dimensional ist.*

Beweis. cf. [2, Satz 2.9]. ■

Demzufolge werden auf unendlich–dimensionalen Räumen X weitere Topologien (bzw. Konvergenzen) eingeführt, bzgl. derer die abgeschlossene Einheitskugel kompakt (bzw. folgenkompakt) ist.

Sei X ein Banachraum und X^* sein Dualraum. Die Konvergenz von Folgen $(x_n) \subset X$ bzw. $(f_n) \subset X^*$, definiert in (4.2) bzw. (7.1), bezeichnen wir im Weiterem als **starke Konvergenz**. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt **schwach konvergent** in X gegen ein Element $x \in X$, in Zeichen $x_n \rightharpoonup x$ schwach in X $(n \to \infty)$ genau dann, wenn für alle $f \in X^*$ gilt:

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad (n \to \infty)\,. \tag{8.2}$$

Eine Folge $(f_n) \subset X^*$ heißt $*$–**schwach konvergent** in X^* gegen ein Element $f \in X^*$, in Zeichen $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ $*$–schwach in X^* $(n \to \infty)$ genau dann, wenn für alle $x \in X$ gilt:

$$\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \quad (n \to \infty)\,. \tag{8.3}$$

Man beachte, dass es im Dualraum X^* zwei verschiedene schwache Konvergenzen für eine Folge $(f_n) \subset X^*$ gibt, nämlich

$$f_n \rightharpoonup f \qquad \text{schwach in } X^* \quad (n \to \infty)\,,$$

d.h. für alle $g \in X^{**}$ gilt $\langle g, f_n\rangle_{X^{**},X^*} \to \langle g, f\rangle_{X^{**},X^*}$, und

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \qquad *\text{–schwach in } X^* \quad (n \to \infty)\,,$$

d.h. für alle $x \in X$ gilt $\langle f_n, x\rangle_{X^*,X} \to \langle f, x\rangle_{X^*,X}$. Diese Konvergenzen lassen sich durch entsprechende Topologien charakterisieren. Dazu benötigen wir eine allgemeine *Konstruktion von Topologien.*

Sei X ein Vektorraum und seien $(Y_i)_{i\in I}$ topologische Räume. Für alle $i \in I$ seien $\varphi_i : X \to Y_i$ Abbildungen. Wir suchen die *gröbste* Topologie τ auf X, so dass alle φ_i stetig sind, d.h. die Topologie, die am wenigsten offene Mengen enthält. Seien $U_i \subseteq Y_i$ offene Mengen, dann sind notwendigerweise alle $\varphi_i^{-1}(U_i)$ Elemente von τ. Wir bezeichnen die Familie aller solcher Mengen mit $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Wir suchen nun das kleinste Mengensystem τ, dass $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ enthält und abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen ist. Dazu bilden wir *zuerst* alle möglichen endlichen Durchschnitte von Mengen aus $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, d.h. $\bigcap_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda\,, \Gamma \subseteq \Lambda, \Gamma$ endlich. Dieses System bezeichnen wir mit Φ. Danach bilden wir beliebige Vereinigungen von Mengen aus Φ. Dieses neue System sei $\mathcal{F}$. Es ist klar, dass $\mathcal{F}$ abgeschlossen bzgl. beliebigen Vereinigungen ist. Man kann auch zeigen, dass $\mathcal{F}$ abgeschlossen bzgl. endlicher Durchschnitte ist (cf. [5, Lemma III.1]).

Somit ist die gesuchte *gröbste Topologie* τ gegeben durch endliche Durchschnitte von Mengen der Form $\varphi_i^{-1}(U_i)$, U_i offen in Y_i, und beliebigen Vereinigungen solcher Mengen. In Termen von Umgebungen ausgedrückt heißt dies: Sei $x \in X$, dann ist eine Umgebungsbasis von x bzgl. τ gegeben durch endliche Durchschnitte der Form $\varphi_i^{-1}(V_i)$, V_i Umgebung von $\varphi_i(x)$ in Y_i. Die Konvergenz von Folgen in der Topologie τ ist vollständig durch die Abbildungen φ_i, $i \in I$, charakterisiert.

8.4 Lemma. *Sei $(x_n) \subset X$ eine Folge. Die Folge x_n konvergiert gegen $x \in X$ bzgl. τ genau dann, wenn $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ $(n \to \infty)$ für alle $i \in I$.*

Beweis. cf. [5, Proposition III.1] ∎

Wir wenden diese allgemeine Konstruktion nun an, um die zu schwachen Konvergenzen zugehörigen Topologien zu charakterisieren.

Sei X ein Banachraum und sei $f \in X^*$. Wir definieren $\varphi_f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_f(x) := \langle f, x\rangle$$

und betrachten die Familie $(\varphi_f)_{f\in X^*}$. Die **schwache Topologie** $\omega(X, X^*)$ auf X ist die gröbste Topologie bzgl. derer alle $(\varphi_f)_{f\in X^*}$ stetig sind. (Wir setzten in der obigen Konstruktion $X = X$, $Y_i = \mathbb{R}$, $I = X^*$). Eine offene Umgebungsbasis von $x_0 \in X$ bzgl. $\omega(X, X^*)$ ist durch Mengen der Form

$$V = \{x \in X \,\big|\, |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, i \in J\} \tag{8.5}$$

gegeben, wobei J eine endliche Indexmenge ist, $f_i \in X^*$ und $\varepsilon > 0$. Man kann zeigen, dass X versehen mit der schwachen Topologie $\omega(X, X^*)$ ein Hausdorff–Raum ist (cf. [5, Proposition III.3]).

8.6 Lemma. *Für eine Folge* $(x_n) \subset X$ *gilt:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *bzgl.* $\omega(X, X^*)$ $(n \to \infty)$ *genau dann, wenn* $x_n \rightharpoonup x$ $(n \to \infty)$ *in Sinne von* (8.2).

(ii) *Aus* $x_n \to x$ *stark in* X $(n \to \infty)$ *folgt* $x_n \rightharpoonup x$ *schwach in* X $(n \to \infty)$.

(iii) *Falls* $x_n \rightharpoonup x$ *schwach in* X $(n \to \infty)$, *dann ist die Folge* $(\|x_n\|) \subset \mathbb{R}$ *beschränkt und es gilt:*

$$\|x\| \le \liminf_{n \to \infty} \|x_n\| \,.$$

Beweis. Behauptung (i) folgt aus Lemma 8.4. Behauptung (ii) folgt sofort aus der Abschätzung $|\langle f, x_n - x \rangle| \le \|f\| \, \|x_n - x\|$, wobei $f \in X^*$. Die Beschränktheit der Folge $(\|x_n\|)$ in Behauptung (iii) ist eine Folgerung aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (cf. Satz 10.6, Lemma 3.0.3). Die Ungleichung in Behauptung (iii) folgt mithilfe von Lemma 7.2 (i). ■

8.7 Lemma. *Sei* $M \subset X$ *eine kompakte Menge bzgl. der schwachen Topologie* $\omega(X, X^*)$. *Dann ist* M *bzgl. der Norm in* X *beschränkt.*

Beweis. Dies folgt auch aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Zum Beweis der punktweisen Beschränktheit, d.h. $\sup_{x \in M} |\langle f, x \rangle| \le c(f)$, benutzt man die Überdeckung von M durch die schwach offenen Mengen $U_x = \{z \in X \,\big|\, |\langle f, x - z \rangle|\}$. ■

Aufgrund der Konstruktion der schwachen Topologie ist klar, dass die schwache Topologie $\omega(X, X^*)$ *immer* gröber ist als die, durch die Norm in X definierte, starke Topologie. Im Allgemeinen ist die schwache Topologie *strikt* gröber als die starke Topologie, d.h. es gibt bzgl. der starken Topologie offene Mengen, die aber *nicht* offen bzgl. der schwachen Topologie sind. In endlich–dimensionalen Banachräumen gilt allerdings:

8.8 Lemma. *Sei* X *ein endlich–dimensionaler Banachraum. Dann stimmen die starke und die schwache Topologie überein. Insbesondere konvergiert eine Folge* $(x_n) \subset X$ *genau dann schwach, wenn sie stark konvergiert.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Tatsache, dass die Projektionen $x \mapsto x_i$ stetige lineare Funktionale auf X sind, wobei $x = \sum_{i=1}^n x_i \, e_i$ eine Darstellung bezüglich einer Einheitsbasis $(e_i)_{i=1}^n$ von X ist (cf. [5, Proposition III.6]). ■

8.9 Satz. *Eine konvexe Menge* C *eines Banachraumes* X *ist genau dann bzgl. der starken Topologie abgeschlossen, wenn sie bzgl. der schwachen Topologie abgeschlossen ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der Trennungseigenschaft des Satzes von Hahn–Banach 10.11 und der Charakterisierung der Umgebungsbasis (cf. (8.5)) in der schwachen Topologie (cf. [5, Theorem III.7]). ■

8.10 Folgerung (Satz von Mazur). *Es sei $(u_m) \subset X$ eine schwach konvergente Folge in einem Banachraum X. Dann gibt es eine Folge (v_j) von konvexen Linearkombinationen*

$$v_j = \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j u_k \, , \; c_k^j \geq 0 \, , \; \sum_{k=1}^{N_j} c_k^j = 1 \, , \; N_j \in \mathbb{N} \, ,$$

die stark gegen den schwachen Limes der Folge (u_m) konvergiert.

Beweis. Man betrachtet den Abschluss der Menge aller endlichen konvexen Linearkombinationen von Elementen der Folge (u_m) und benutzt Satz 8.9. ■

Auf dem Dualraum X^* eines Banachraumes kann man neben der starken Topologie (gegeben durch die Norm in X^*) und der schwachen Topologie $\omega(X^*, X^{**})$ noch die $*$–schwache Topologie $\omega(X^*, X)$ definieren. Für $x \in X$ definieren wir $\varphi_x : X^* \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi_x(f) := \langle f, x \rangle$$

und betrachten die Familie $(\varphi_x)_{x \in X}$. Die **$*$–schwache Topologie** $\omega(X^*, X)$ auf den Dualraum X^* eines Banachraumes X ist die gröbste Topologie bzgl. derer alle $(\varphi_x)_{x \in X}$ stetig sind. (Wir setzen $X = X^*$, $Y_i = \mathbb{R}$, $I = X$ in der obigen Konstruktion). Eine Umgebungsbasis von $f_0 \in X^*$ bzgl. $\omega(X^*, X)$ ist durch Mengen der Form

$$V = \{ f \in X^* \, \big| \, |\langle f - f_0, x_i \rangle| < \varepsilon, i \in J \} \, ,$$

gegeben, wobei J eine endliche Indexmenge ist, $x_i \in X$ und $\varepsilon > 0$. Man kann zeigen, dass X^* versehen mit der $*$–schwachen Topologie $\omega(X^*, X)$ ein Hausdorff–Raum ist (cf. [5, Proposition III.10]). In Analogie zu Satz 8.6 hat man:

8.11 Satz. *Für eine Folge $(f_n) \subseteq X^*$ gilt:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *bzgl.* $\omega(X^*, X)$ $(n \to \infty)$ *genau dann, wenn* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ $(n \to \infty)$ *im Sinne von* (8.3).

(ii) *Aus* $f_n \rightharpoonup f$ *schwach in* X^* $(n \to \infty)$ *folgt* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *$*$–schwach in* X^* $(n \to \infty)$.

(iii) *Falls* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *$*$–schwach in* X^* $(n \to \infty)$*, dann ist die Folge* $(\|f_n\|) \subset \mathbb{R}$ *beschränkt und es gilt:*

$$\|f\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\| \, .$$

Für reflexive Banachräume X erhält man sofort, dass schwache Konvergenz und $*$–schwache Konvergenz von Folgen $(f_n) \subset X^*$ übereinstimmen. In der $*$–schwachen Topologie $\omega(X^*, X)$ haben wir folgendes fundamentale Resultat:

8.12 Satz (Banach, Aloaglu, Bourbaki 1938). *Sei X ein Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{f \in X^* \,\big|\, \|f\|_{X^*} \le 1\}$ des Dualraumes X^* kompakt bzgl. der $*$–schwachen Topologie $\omega(X^*, X)$.*

Beweis. cf. [5, Theorem III.15], [14, Satz 69.3] ∎

8.13 Satz. *Sei X ein Banachraum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{x \in X \,\big|\, \|x\|_X \le 1\}$ des Raumes X kompakt bzgl. der schwachen Topologie $\omega(X, X^*)$ genau dann, wenn der Raum X reflexiv ist.*

Beweis. cf. [5, Theorem III.16], [14, Satz 70.4] ∎

8.14 Folgerung. *Sei X ein reflexiver Banachraum und sei $K \subset X$ eine konvexe, abgeschlossene, beschränkte Teilmenge. Dann ist K kompakt bzgl. der schwachen Topologie $\omega(X, X^*)$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz 8.13, Satz 8.9 und Lemma 1.2. ∎

8.15 Satz (Eberlein, Šmuljan 1940). *Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ eine schwach konvergente Teilfolge (x_{n_k}).*

Beweis. cf. [5, Theorem III.27], [2, Satz 6.9] ∎

8.16 Satz. *Sei X ein Banachraum, dessen Dualraum X^* separabel ist. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{x \in X \,\big|\, \|x\|_X \le 1\}$ in der schwachen Topologie $\omega(X, X^*)$ metrisierbar, d.h. es existiert eine Metrik d, deren induzierte Topologie τ_d mit der schwachen Topologie $\omega(X, X^*)$ auf B übereinstimmt.*

Beweis. cf. [5, Satz III.25']. ∎

Mithilfe von (8.5), Satz 8.16, Satz 8.15 und Satz 10.8 kann man zeigen:

8.17 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und sei $M \subset X$ eine beschränkte Teilmenge. Dann gibt es für alle Punkte x des Abschlusses von M bzgl. der schwachen Topologie $\omega(X, X^*)$ eine Folge $(x_n) \subset M$ mit*

$$x_n \rightharpoonup x \qquad (n \to \infty)\,.$$

Beweis. cf. [25, S. 911–912] ∎

A.9 Konvexität und Glattheitseigenschaften der Norm

Sei X ein reeller Banachraum. Der Raum X heißt **strikt konvex**, wenn für alle $x \neq y$, mit $\|x\| = \|y\| = 1$, und $t \in (0,1)$ gilt: $\|(1-t)x + ty\| < 1$. Man nennt den Raum X **lokal gleichmäßig konvex** genau dann, wenn für alle $\varepsilon \in (0,2]$ und alle x mit $\|x\| = 1$ ein $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ existiert, so dass für alle y, mit $\|y\| = 1$ und $\|x - y\| \geq \varepsilon$, gilt: $\|2^{-1}(x+y)\| \leq 1 - \delta$. Diese Definition ist äquivalent zu folgender Aussage: Seien $x_0 \in X$ und $(x_n) \subset X$ Elemente mit $\|x_0\| = 1$, $\|x_n\| = 1$. Dann folgt aus $\|2^{-1}(x_n + x_0)\| \to 1$ $(n \to \infty)$, dass $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Falls man δ unabhängig von x wählen kann, heißt der Raum **gleichmäßig konvex**. Offensichtlich haben wir für einen Raum X folgende Implikationen:

$$\text{gleichmäßig konvex} \quad \Rightarrow \quad \text{lokal gleichmäßig konvex} \quad \Rightarrow \quad \text{strikt konvex}\,.$$

Als direkte Konsequenz der äquivalenten Definition eines lokal gleichmäßig konvexen Raumes und Lemma 8.6 (iii) haben wir:

9.1 Lemma. *Sei X ein lokal gleichmäßig konvexer, reeller Banachraum. Aus $x_n \rightharpoonup x_0$ $(n \to \infty)$ und $\|x_n\| \to \|x_0\|$ $(n \to \infty)$ folgt $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.*

Beweis. cf. [24, S. 258]. ■

Wir haben folgende wichtige Eigenschaft gleichmäßig konvexer reeller Banachräume.

9.2 Satz (Milman 1938, Pettis 1939). *Jeder gleichmäßig konvexe, reelle Banachraum ist reflexiv.*

Beweis. cf. [6, S. 37 ff], [22, S. 125]. ■

Die *Konvexitätseigenschaften* der Norm sind eng mit den *Glattheitseigenschaften* der Norm verbunden.

9.3 Satz. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum. Dann gilt:*

(i) *Falls der Dualraum X^* strikt konvex ist, dann ist die Norm $x \to \|x\|_X$ auf $X \setminus \{0\}$ Gâteaux–differenzierbar.*
(ii) *Falls der Dualraum X^* lokal gleichmäßig konvex ist, dann ist die Norm $x \to \|x\|_X$ auf $X \setminus \{0\}$ Fréchet–differenzierbar.*

Beweis. cf. [6, S. 23, 32], Satz 3.3.21. ■

Es gilt folgendes fundamentale Resultat:

9.4 Satz (Kadec 1958, Troyanski 1971). *In jedem reflexiven, reellen Banachraum X gibt es eine äquivalente Norm, so dass sowohl X bzgl. dieser neuen Norm als auch X^* bzgl. der dadurch induzierten Norm lokal gleichmäßig konvex sind.*

Beweis. cf. [6, S. 164 ff]. ■

A.10 Wichtige Sätze aus der linearen Funktionalanalysis

10.1 Satz. *Es sei $M \subset H$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines Hilbertraumes H. Für alle $u \in H$ gibt es ein eindeutiges Element $v \in M$ mit*

$$\|u - v\| = \inf \left\{ \|u - w\| \,\middle|\, w \in M \right\}.$$

Beweis. cf. [2, Satz 2.2], [5, Theorem V.2], [16, Satz 11.4] ■

10.2 Satz (Projektionssatz). *Sei V ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraumes H. Dann gibt es zu jedem $u \in H$ eine eindeutige Zerlegung*

$$u = v + w\,, \quad v \in V\,, \quad w \in V^{\perp}\,,$$

d.h. es existiert eine Zerlegung $H = V \oplus V^{\perp}$.

Beweis. cf. [5, Folgerung V.4], [16, Satz 11.7] ■

10.3 Satz (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei H ein Hilbertraum. Zu jedem linearen Funktional $F \in H^*$ gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $f \in H$ mit*

$$F(u) = (u, f)\,, \qquad \forall\, u \in H\,,$$

und $\|f\|_H = \|F\|_{H^*}$. Also lässt sich H mit seinem Dualraum H^* identifizieren und man schreibt $H \cong H^*$.

Beweis. cf. [5, Theorem V.5], [16, Satz 11.9] ■

Sei H ein reeller Hilbertraum. Eine **Bilinearform** ist eine Abbildung $[\cdot,\cdot]$ von $H \times H$ nach $\mathbb{R}$, die linear in beiden Argumenten ist. Eine Bilinearform heißt **beschränkt**, wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in H$ gilt:

$$\big|[u, v]\big| \le K\|u\|\,\|v\|\,.$$

Eine Bilinearform heißt **koerziv**, wenn eine Konstante $c_0 > 0$ existiert, so dass für alle $u \in H$ gilt:

$$[u, u] \ge c_0\|u\|^2\,.$$

Man beachte, dass keine Symmetrie für $[\cdot,\cdot]$ vorausgesetzt wird.

10.4 Lemma (Lax, Milgram). *Sei H ein reeller Hilbertraum und $[\cdot,\cdot]$ eine koerzive, beschränkte Bilinearform auf H. Dann gibt es zu jedem beschränkten, linearen Funktional $F \in H^*$ ein eindeutiges $u \in H$ mit*

$$[v, u] = F(v) \qquad \text{für alle } v \in H\,. \tag{10.5}$$

Beweis. cf. [5, Folgerung V.8], [2, Satz 4.2] ■

10.6 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, Banach, Steinhaus). *Sei $(A_i)_{i\in I}$ ein System beschränkter linearer Operatoren, die einen Banachraum X in einen Banachraum Y abbilden. Das System (A_i) sei* ***punktweise beschränkt****, d.h. für alle $x \in X$ gelte*

$$\sup_{i\in I} \|A_i x\|_Y < \infty .$$

Dann sind die Operatornormen ***gleichmäßig beschränkt****, d.h.*

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{L(X,Y)} < \infty .$$

Beweis. cf. [5, Theorem II.1], [2, Satz 5.2] ∎

Der Beweis beruht auf dem *Baireschen Kategoriensatz.*

10.7 Satz (Baire). *Sei M ein vollständiger, metrischer Raum und sei (A_n) eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von M. Jede der Mengen A_n habe ein leeres Inneres, d.h.* $\operatorname{int}(A_n) = \emptyset$. *Dann gilt:*

$$\operatorname{int}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \emptyset .$$

Beweis. cf. [5, Lemma II.1], [2, Satz 5.1] ∎

10.8 Satz (Hahn–Banach, analytische Form). *Sei V ein reeller Vektorraum und $p : V \to \mathbb{R}$ subadditiv und positiv homogen, d.h. $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, sowie $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in V$. Ferner sei W ein linearer Teilraum von V und $\varphi : W \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional mit*

$$\varphi(x) \le p(x) \qquad \text{für alle } x \in W .$$

Dann gibt es eine Fortsetzung $f : V \to \mathbb{R}$ von φ, d.h. $f|_W = \varphi$, so dass

$$f(x) \le p(x) \qquad \text{für alle } x \in V .$$

Beweis. cf. [5, Theorem I.1], [2, Satz 4.14] ∎

10.9 Folgerung. *Sei V ein normierter Raum und $W \subset V$ ein linearer Teilraum. Jedes stetige, lineare Funktional $\varphi \in W^*$ lässt sich zu einem stetigen, linearen Funktional $f \in V^*$ fortsetzen, so dass*

$$\|f\|_{V^*} \le \|\varphi\|_{W^*} .$$

Beweis. cf. [5, Folgerung I.2], [2, Satz 4.15] ∎

Eine **Hyperebene** H in einem reellen Vektorraum V ist eine Menge der Gestalt

$$H = \{x \in V \,|\, \varphi(x) = \alpha\} =: \{\varphi = \alpha\} ,$$

wobei $\varphi : V \to \mathbb{R}$ eine nichttriviale lineare Abbildung ist und $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Hyperebene ist **abgeschlossen** genau dann, wenn die lineare Abbildung φ stetig ist. Seien A, B Teilmengen des normierten, reellen Vektorraumes V. Man sagt, dass die Hyperebene $\{\varphi = \alpha\}$ die Mengen A und B **trennt** genau dann, wenn für alle $x \in A$ und $y \in B$ gilt:

$$\varphi(x) \le \alpha \le \varphi(y) . \tag{10.10}$$

Man spricht von **strikter Trennung**, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\varphi(x) + \varepsilon \le \alpha \le \varphi(y) - \varepsilon , \qquad x \in A,\ y \in B .$$

10.11 Satz (Hahn–Banach, geometrische Form). *Sei V ein normierter, reeller Vektorraum und seien A, B zwei nichtleere, disjunkte, konvexe Teilmengen von V. Die Menge A sei offen. Dann gibt es eine abgeschlossene, A und B trennende Hyperebene.*

Beweis. cf. [5, Theorem I.6] ■

10.12 Satz. *Sei V ein normierter Vektorraum und seien $A, C \subset V$ konvexe, disjunkte, nichtleere Teilmengen von V. Ferner sei A abgeschlossen und C kompakt. Dann gibt es eine abgeschlossene Hyperebene, die A und C strikt trennt.*

Beweis. cf. [5, Theorem I.7] ■

A.11 Lebesgue–Maß und Lebesgue–Integral

Die Theorie des Lebesgue–Maßes und Lebesgue–Integrals kann in vielen Lehrbüchern gefunden werden. Die Beweise aller Behauptungen in diesem Abschnitt können z.B. in [10, Kapitel 1], [2, Anhang 1], [3, Kapitel IX, X] und [19] gefunden werden.

Ein *offenes Intervall* $I \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, ist eine Menge der Form $I = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_d, b_d)$, $a_i < b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, d$. Das *Volumen* eines offenen Intervalls wird durch

$$\operatorname{vol}(I) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_d - a_d)$$

definiert. Für jede beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$\mu^*(A) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(I_k) \,\Big|\, A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ ist ein offenes Intervall} \Big\} .$$

Die so definierte Funktion $\mu^* : 2^{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ heißt **äußeres Lebesgue–Maß**, wobei $2^{\mathbb{R}^d}$ die Menge aller Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ ist. Allgemeiner, sei X eine Menge, dann bezeichnet man jede Funktion $\nu^* : 2^X \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, die monoton und nichtnegativ ist, sowie $\nu^*(\emptyset) = 0$ und für beliebige Teilmengen $A_j \subseteq X$

$$\nu^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu^*(A_j)$$

erfüllt, als **äußeres Maß**.

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Lebesgue–messbar**, wenn für alle Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt:

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)\,. \tag{11.1}$$

Das System aller Lebesgue–messbaren Mengen bezeichnen wir mit $\mathcal{M}$ und definieren das **Lebesgue–Maß** μ, von Mengen $M \in \mathcal{M}$ durch

$$\mu(M) := \mu^*(M)\,.$$

Man kann zeigen, dass alle offenen Mengen des $\mathbb{R}^d$ und alle Mengen $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mu^*(A) = 0$ im System der Lebesgue–messbaren Mengen $\mathcal{M}$ enthalten sind. Weiterhin kann zeigen, dass für paarweise disjunkte Mengen $A_k \in \mathcal{M}$ gilt:

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)\,.$$

Messbare Mengen $A \in \mathcal{M}$ können beliebig genau durch offene bzw. kompakte Mengen approximiert werden, d.h.

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\,\mu(G) \,\big|\, G \text{ offen}, G \supseteq A\}\,, \\ \mu(A) &= \sup\{\,\mu(K) \,\big|\, K \text{ kompakt}, K \subseteq A\}\,. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Ein System $\mathcal{S}$ von Teilmengen einer Menge X heißt σ–**Algebra**, falls:

(i) $X \in \mathcal{S}$,

(ii) $A \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \mathcal{S}$,

(iii) $A_j \in \mathcal{S} \;\Rightarrow\; \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}$.

Zu jedem System $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X existiert eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{S}$, die das gegebene System $\mathcal{T}$ enthält. Man sagt, dass $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$ generiert wird. Die von den offenen Mengen generierte σ-Algebra heißt **Borel σ-Algebra**. Die Elemente der Borel σ-Algebra heißen **Borel–Mengen**. Man kann zeigen, dass das System aller Lebesgue–messbaren Mengen $\mathcal{M}$ eine σ–Algebra ist, die die Borel σ-Algebra enthält.

Der hier vorgestellte Zugang zur Konstruktion des Lebesgue–Maßes kann völlig analog auf beliebige Mengen X verallgemeinert werden. Für allgemeine Mengen X werden folgende Begriffe und Bezeichnungen benutzt. Sei $\mathcal{S}$ ein System von Teilmengen von X. Eine nichtnegative Funktion $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ heißt **Maß**, falls

(i) $\mathcal{S}$ eine σ–Algebra ist,

(ii) $\nu(\emptyset) = 0$,

(iii) für jede Folge paarweiser disjunkter Mengen $A_j \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)\,.$$

Das Tripel $(X, \mathcal{S}, \nu)$ heißt **Maßraum**. Die Eigenschaft (iii) nennt man σ–**Additivität**. Man sagt, dass ein Maß **endlich** ist, falls $\nu(X) < \infty$. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt σ–**endlich**, falls man Mengen B_k, $\nu(B_k) < \infty$, findet mit $A = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$. Ein Maß ν ist **vollständig**, wenn für alle $B \in \mathcal{S}$ folgende Implikation gilt:

$$\nu(B) = 0 \quad \text{und} \quad A \subseteq B \qquad \Rightarrow \qquad A \in \mathcal{S}\,.$$

Man sagt, dass ein Maß **regulär** ist, falls für alle messbaren Mengen $M \in \mathcal{S}$ (11.2) gilt. Ein Maß ν heißt **Borel–Maß**, wenn ν auf der Borel σ–Algebra definiert ist. Eine Menge mit Maß Null heißt **Nullmenge**. Sei ν ein Maß auf X und $E \in \mathcal{S}$. Um die **Restriktion** des Maßes ν auf E zu definieren, bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_E$ die σ-Algebra $\{M \in \mathcal{S}, \,\big|\, M \subseteq E\}$ von Teilmengen von E. Auf $\mathcal{S}_E$ definieren wir

$$\nu|_E(M) := \nu(M)\,, \qquad M \in \mathcal{S}_E\,.$$

Somit übertragen sich alle Eigenschaften des Maßraumes $(X, \mathcal{S}, \nu)$ auf den Maßraum $(E, \mathcal{S}_E, \nu|_E)$. Eine Funktion $\nu\colon \mathcal{S} \to [-\infty, \infty]$, die obige Eigenschaften (i)–(iii) besitzt nennt man **signiertes Maß**. Man beachte, dass ein signiertes Maß nur einen der Werte ∞ oder $-\infty$ annehmen kann. Alle für Maße eingeführten Begriffe haben eine Entsprechung für signierte Maße.

11.3 Satz (Hahn). *Für jeden signierten Maß $(X, \mathcal{S}, \nu)$ gibt es eine, bis auf Nullmengen, eindeutige, disjunkte Zerlegung $X = P \cup N$, $P, N \in \mathcal{S}$, $P \cap N = \emptyset$, so dass für alle $M \in \mathcal{S}$ gilt:*

$$\nu(P \cap M) \geq 0 \quad \textit{und} \quad \nu(N \cap M) \leq 0\,.$$

Das Lebesgue–Maß μ auf $\mathcal{M} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ ist also ein vollständiges, σ–endliches, reguläres Borel–Maß. Die Restriktion des Lebesgue–Maßes auf beliebige messbare Mengen A hat völlig analoge Eigenschaften wie das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}^d$.

Im Folgenden sei $(X, \mathcal{S}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum. Man stelle sich das Lebesgue–Maß auf $\mathbb{R}^d$ oder messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ vor. Sei $D \in \mathcal{S}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt ν–**messbar** auf D, falls für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge

$$\{x \in D \,\big|\, f(x) > \alpha\} =: \{f > \alpha\}$$

ν–messbar ist. Das System der messbaren Funktionen ist sehr stabil, wie der folgende Satz zeigt:

11.4 Satz (Eigenschaften messbarer Funktionen). *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ messbare Funktionen, $\lambda \in \mathbb{R}$ und φ eine stetige Funktion definiert auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}$. Dann sind auch die folgenden Funktionen messbar*

(i) $\lambda f\,, f+g\,, \max(f,g)\,, \min(f,g)\,, f^+\,, f^-\,, |f|\,, fg\,, f/g$ *falls* $g \neq 0$,

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\,, \limsup\limits_{n\to\infty} f_n\,, \liminf\limits_{n\to\infty} f_n\,, \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *falls der Grenzwert existiert,*

(iii) $\varphi \circ f$, *falls* $f(X) \subseteq G$.

Im Falle des Lebesgue–Maßes μ auf $\mathbb{R}^d$ sind messbare Funktionen bereits auf „großen“ Mengen stetig.

11.5 Satz (Lusin). *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue–messbare Menge mit $\mu(A) < \infty$ und sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbar. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine kompakte Menge $K = K(\varepsilon) \subseteq A$, so dass*

(i) $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$;

(ii) $f|_K$ *ist stetig.*

Eine **Treppenfunktion** $f\colon X \to \mathbb{R}$ ist eine endliche Linearkombination von *charakteristischen Funktionen* messbarer Mengen, d.h. es gibt $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $A_i \in \mathcal{S}$ mit

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, \chi_{A_i}$$

wobei die *charakteristische Funktion* der Menge A durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A\,, \\ 1 & x \in A\,, \end{cases}$$

definiert ist. Es gilt folgender wichtiger Satz:

11.6 Satz. *Sei $f \geq 0$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine monoton steigende Folge (f_n) nichtnegativer Treppenfunktionen mit $f_n \nearrow f$.*

Da im Allgemeinen Nullmengen für die Integration und das Maß keine Rolle spielen, ist der Begriff **fast überall** von fundamentaler Bedeutung. Wir sagen, dass eine Funktion $h\colon D \to \mathbb{R}$ **fast überall** definiert ist, falls der Definitionsbereich $D \in \mathcal{S}$ die Bedingung $\nu(X \setminus D) = 0$ erfüllt. Seien f und g Funktionen, die fast überall auf X definiert sind. Wir sagen $f(x) \leq g(x)$ **fast überall**, falls es eine Nullmenge $N \in \mathcal{S}$ gibt, so dass $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ gilt. Analog wird der Begriff „fast überall“ oder „fast alle“ in anderen Zusammenhängen verstanden, z.B. sagt man, dass eine Folge $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ **fast überall** gegen die Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert, wenn es eine Nullmenge $N \in \mathcal{S}$ gibt, so dass für *alle* $x \in X \setminus N$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Die Relation „$f = g$ fast überall“ ist offensichtlich eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge der messbaren Funktionen. Man kann also eine gegebene Funktion f auf einer beliebigen Nullmenge beliebig umdefinieren und bleibt in der gleichen Äquivalenzklasse. Für messbaren Funktionen unterschieden wir nicht zwischen der Funktion f und ihrer Äquivalenzklasse $[f]$.

Im Falle des Lebesgue–Maßes μ auf $\mathbb{R}^d$ folgt aus der fast überall Konvergenz einer Folge (f_n) bereits die gleichmäßige Konvergenz auf „großen“ Mengen.

11.7 Satz (Egorov). *Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue–messbare Menge mit $\mu(A) < \infty$ und seien $f, f_n \colon A \to \mathbb{R}$ Lebesgue–messbare Funktionen mit $f_n \to f$ fast überall $(n \to \infty)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine messbare Menge $B \subseteq A$ mit*

(i) $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$,

(ii) $f_n \rightrightarrows f$ *gleichmäßig auf* B $(n \to \infty)$.

Das abstrakte **Lebesgue–Integral** für Funktionen $f \colon X \to \mathbb{R}$, wobei $(X, \mathcal{S}, \nu)$ ein vollständiger Maßraum ist, wird wie folgt eingeführt. Sei $D \in \mathcal{S}$ und s eine nichtnegative Treppenfunktion mit einer Darstellung $s = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{B_j}$, wobei B_j paarweise disjunkte, messbare Mengen sind und $\beta_j \geq 0$ gilt. Wir setzen

$$\int_D s\, d\nu := \sum_{j=1}^n \beta_j \nu(D \cap B_j) \,.$$

Aufgrund von Satz 11.6 existiert für jede nichtnegative messbare Funktion f eine Folge von Treppenfunktionen $s_n \geq 0$, $s_n \nearrow f$ $(n \to \infty)$. Demzufolge definieren wir das abstrakte **Lebesgue–Integral** einer nichtnegativen messbaren Funktion $f \geq 0$ über einer Menge $D \in \mathcal{S}$ durch

$$\int_D f\, d\nu := \sup \left\{ \int_D s\, d\nu \,\Big|\, 0 \leq s \leq f \text{ auf } D, s \text{ Treppenfunktion} \right\} .$$

Für eine allgemeine messbare Funktion f und $D \in \mathcal{S}$ setzen wir

$$\int_D f\, d\nu := \int_D f^+\, d\nu - \int_D f^-\, d\nu \,,$$

falls wenigstens eins der Integrale auf der rechten Seite endlich ist. Da für $D \in \mathcal{S}$ offensichtlich gilt:

$$\int_D f\, d\nu = \int_X f \chi_D\, d\nu \,,$$

können wir uns im Weiteren auf Integrale auf ganz X beschränken. Die Menge aller messbaren auf X definierten Funktionen f, deren Integral definiert ist, wird mit $\mathcal{L}^*(\nu)$ bezeichnet. Weiter bezeichnen wir

$$L^1 = L^1(\nu) = L^1(X, \mathcal{S}, \nu) := \Big\{ f \in \mathcal{L}^*(\nu) \,\Big|\, \int\limits_X f\, d\nu \in \mathbb{R} \Big\} ,$$

und sagen, dass Elemente $f \in L^1(\nu)$ **integrierbare Funktionen** sind. Das so definierte Integral hat folgende Eigenschaften:

11.8 Satz. *Seien $f, g \in L^1(\nu)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und h eine messbare Funktion. Dann gilt:*

(i) *Die Funktion f ist fast überall endlich.*

(ii) *Das Lebesgue–Integral ist additiv, d.h.*

$$\int\limits_X (\alpha f + \beta g)\, d\nu = \alpha \int\limits_X f\, d\nu + \beta \int\limits_X g\, d\nu .$$

(iii) *Das Lebesgue–Integral ist absolut stetig, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass für alle messbaren Mengen D mit $\nu(D) \le \delta$ gilt:*

$$\int\limits_D |f|\, d\nu \le \varepsilon .$$

(iv) $|f| \in L^1(\nu)$ *und es gilt die Abschätzung:*

$$\Big| \int\limits_X f\, d\nu \Big| \le \int\limits_X |f|\, d\nu .$$

(v) $\max(f, g), \min(f, g) \in L^1(\nu)$.

(vi) *Aus $|h| \le g$ folgt $h \in L^1(\nu)$.*

Es gelten folgende Sätze über das Vertauschen von Integral und Grenzwert.

11.9 Satz (über monotone Konvergenz, Levi). *Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \nearrow f$ fast überall $(n \to \infty)$ und $\int_X f_1\, d\nu > -\infty$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\nu = \int\limits_X f\, d\nu .$$

11.10 Satz (über majorisierte Konvergenz). *Sei (f_n) eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \to f$ fast überall $(n \to \infty)$. Wenn es eine Funktion $h \in L^1(\nu)$ gibt mit $|f_n| \le h$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt: $f \in L^1(\nu)$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\nu = \int\limits_X f\, d\nu .$$

Man kann diesen Satz wie folgt verallgemeinern.

11.11 Satz. *Seien* (f_n) *und* (h_n) *Folgen aus* $L^1(\nu)$, *die fast überall gegen* f *bzw.* h, *ebenfalls aus* $L^1(\nu)$, *konvergieren. Weiterhin gelte* $|f_n| \le h_n$ *und*

$$\int\limits_X h_n \, d\nu \to \int\limits_X h \, d\nu \qquad (n \to \infty) \, .$$

Dann folgt

$$\int\limits_X |f_n - f| \, d\nu \to 0 \qquad (n \to \infty) \, .$$

Es gilt folgende Umkehrung des Satzes 11.10.

11.12 Satz. *Seien* $f_n, f \in L^1(\nu)$, $n \in \mathbb{N}$, *und gelte*

$$\int\limits_X |f_n - f| \, d\nu \to 0 \qquad (n \to \infty) \, .$$

Dann gibt es eine Teilfolge (f_{n_k}), *die fast überall gegen* f *konvergiert.*

11.13 Lemma (Fatou). *Sei* (f_n) *eine Folge messbarer Funktionen und sei* $g \in L^1(\nu)$. *Aus* $f_n \ge g$ *fast überall für alle* $n \in \mathbb{N}$ *folgt*

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\nu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n \, d\nu \, .$$

Der Satz über majorisierte Konvergenz hat einfache aber wichtige Konsequenzen für *Parameterintegrale.*

11.14 Satz. *Sei* $(X, \mathcal{S}, \nu)$ *ein Maßraum,* P *ein metrischer Raum und* U *eine offene Umgebung eines Punktes* $a \in P$. *Sei* $F : U \times X \to \mathbb{R}$ *eine Funktion, die folgende Carathéodory– und Wachstumsbedingungen erfüllt:*

(i) *Für fast alle Punkte* $x \in X$ *ist die Funktion* $F(\cdot, x)$ *stetig in* a.

(ii) *Für alle* $t \in U$ *ist die Funktion* $F(t, \cdot)$ *messbar.*

(iii) *Es existiert eine Funktion* $g \in L^1(\nu)$, *so dass für alle* $t \in U$ *und fast alle* $x \in X$ *gilt:*
$$|F(t, x)| \le g(x) \, .$$

Dann ist für alle $t \in U$ *die Funktion* $F(t, \cdot)$ *integrierbar, d.h.* $F(t, \cdot) \in L^1(\nu)$, *und die Funktion*

$$f : t \mapsto \int\limits_X F(t, \cdot) \, d\nu$$

ist stetig in a.

11.15 Satz. *Sei $(X, \mathcal{S}, \nu)$ ein Maßraum und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $F : I \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für fast alle $x \in X$ ist $F(\cdot, x)$ differenzierbar in I.*

(ii) *Für alle $t \in I$ ist $F(t, \cdot)$ messbar.*

(iii) *Es existiert eine Funktion $g \in L^1(\nu)$, so dass für alle $t \in I$ und für fast alle $x \in X$ gilt:*

$$\left| \frac{d}{dt} F(t, x) \right| \leq g(x) .$$

(iv) *Es gibt ein $t_0 \in I$, so dass $F(t_0, \cdot) \in L^1(\nu)$.*

Dann ist $F(t, \cdot)$ integrierbar für alle $t \in I$ und die Funktion

$$f : t \mapsto \int\limits_X F(t, \cdot)\, d\nu$$

ist differenzierbar auf I mit der Ableitung

$$f'(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_X F(t, \cdot)\, d\nu = \int\limits_X \frac{d}{dt} F(t, \cdot)\, d\nu .$$

Seien $(X, \mathcal{S}, \nu)$ und $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ Maßräume. Wir definieren das **äußere Produktmaß** $(\nu \times \lambda)^* \colon 2^{X \times Y} \to [0, \infty]$ für beliebige Teilmengen $S \subseteq X \times Y$ durch

$$(\nu \times \lambda)^*(S) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)\, \lambda(B_i) \,\Big|\, A_i \in \mathcal{S}, B_i \in \mathcal{T}, i \in \mathbb{N}, S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \right\} .$$

Die Restriktion von $(\nu \times \lambda)^*$ auf alle bezüglich $(\nu \times \lambda)^*$–messbaren Mengen (cf. (11.1)) bezeichnen wir als **Produktmaß** $\nu \times \lambda$.

11.16 Satz (Fubini). *Seien $(X, \mathcal{S}, \nu)$ und $(Y, \mathcal{T}, \lambda)$ vollständige Maßräume und sei $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \nu \times \lambda)$. Dann gilt für ν–fast alle $x \in X$*

$$f(x, \cdot) \in L^1(Y, \mathcal{T}, \lambda) ,$$

und die für ν–fast alle $x \in X$ erklärte Funktion

$$x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\lambda(y)$$

ist ein Element von $L^1(X, \mathcal{S}, \nu)$. Für λ–fast alle $y \in Y$ gilt:

$$f(\cdot, y) \in L^1(X, \mathcal{S}, \nu) ,$$

und die für λ–fast alle $y \in Y$ erklärte Funktion

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\nu(x)$$

ist ein Element von $L^1(Y, \mathcal{T}, \lambda)$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\nu \times \lambda) &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\nu(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\lambda(y) \right) d\nu(x)\,.\end{aligned}$$

11.17 Satz (Transformationssatz). *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, offene Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Ferner sei $\varphi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue–messbare Funktion. Dann ist $f \in L^1(V)$ genau dann, wenn $(f \circ \varphi)\, |\det(\nabla\varphi)| \in L^1(U)$. In diesem Fall gilt die Transformationsformel:*

$$\int_{\varphi(U)} f(y)\, dy = \int_U f\big(\varphi(x)\big) \big| \det \big(\nabla\varphi(x)\big) \big|\, dx\,.$$

A.12 Funktionenräume

A.12.1 Räume stetiger Funktionen

Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, heißt **Gebiet**, falls Ω offen und zusammenhängend ist. In diesem Abschnitt setzen wir grundsätzlich voraus, dass Ω ein Gebiet ist. Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| \leq \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Mit $C(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Versehen mit der Norm

$$\|f\|_0 := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$$

bildet $C(\overline{\Omega})$ einen *Banachraum* (cf. [15, Kapitel 1]). Im Falle eines beschränkten Gebietes Ω ist $C(\overline{\Omega})$ *separabel.* Dies beweist man mithilfe folgenden Satzes.

12.1 Satz (Weierstrass). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert für alle $f \in C(\overline{\Omega})$ ein Polynom p, so dass*

$$\|f - p\|_0 \leq \varepsilon\,.$$

Beweis. cf. [2, Satz 7.10] ∎

Der Dualraum von $C(\overline{\Omega})$ kann mithilfe von Borel–Maßen charakterisiert werden. Allerdings ist der Raum $C(\overline{\Omega})$ *nicht reflexiv* (cf. [15, Satz 1.7.3]).

12.2 Satz (Riesz–Radon). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und sei f ein stetiges, lineares Funktional auf $C(\overline{\Omega})$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes reguläres, signiertes, endliches Borel–Maß ν, so dass für alle $u \in C(\overline{\Omega})$ gilt:*

$$\langle f, u\rangle_{C(\overline{\Omega})} = \int\limits_{\Omega} u \, d\nu \,.$$

Darüber hinaus gilt:

$$\|f\|_{(C(\overline{\Omega}))^*} = \operatorname{var}(\nu) := \sup \sum_{i=1}^{n} |\nu(M_i)| \,, \tag{12.3}$$

wobei das Supremum über alle endlichen Systeme von paarweise disjunkten Borel–Mengen M_i, $i = 1, \dots, n$, gebildet wird.

Beweis. cf. [2, Satz 4.22] ■

Eine Teilmenge M von $C(\overline{\Omega})$ heißt **gleichgradig stetig** genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

für alle $f \in M$ und alle $x, y \in \Omega$ mit $|x - y| \le \delta$ gilt.

12.4 Satz (Arzelà, Ascoli). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Eine Teilmenge M von $C(\overline{\Omega})$ ist genau dann relativ kompakt, wenn M beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

Beweis. cf. [15, Satz 1.5.3], [2, Satz 2.11] ■

Um Räume stetig differenzierbarer Funktionen definieren zu können, benötigen wir **partielle Ableitungen**, die durch

$$\partial_i f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\mathbf{e}_i) - f(x)}{h}$$

definiert sind, wobei $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, d$ ein Vektor der kanonischen Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^d$ ist. Der **Gradient** einer Funktion f ist definiert durch

$$\nabla f(x) := \big(\partial_1 f(x), \dots, \partial_d f(x)\big) \,. \tag{12.5}$$

Partielle Ableitungen *höherer Ordnung* werden mithilfe von Multiindizes erklärt. Für einen **Multiindex** $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \dots, d$, setzen wir $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ und definieren

$$\partial^\alpha f(x) := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_d^{\alpha_d} f(x) \,,$$

wobei $\partial_i^{\alpha_i} f(x) := \frac{\partial^{\alpha_i} f(x)}{\partial x_i^{\alpha_i}}$, $\partial^0 f(x) := f(x)$. Mit $C^k(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}_0$, bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in C(\overline{\Omega})$, deren partielle Ableitungen $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \le k$, bis zur Ordnung k inklusive, zum Raum $C(\overline{\Omega})$ gehören. Versehen mit der Norm

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_k := \sum_{|\alpha| \le k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha f(x)|$$

bildet $C^k(\overline{\Omega})$ einen *Banachraum* (cf. [15, Kapitel 1]), der *separabel* ist, falls Ω beschränkt ist. Ein Analogon von Satz 12.4 gilt auch im Raum $C^k(\overline{\Omega})$. Wir setzen

$$C^\infty(\overline{\Omega}) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}) .$$

Mit $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, bzw. $C_0^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Teilräume von $C^k(\overline{\Omega})$ bzw. $C^\infty(\overline{\Omega})$ von Funktionen mit *kompakten Träger* $\operatorname{supp}(f)$ in Ω, d.h. $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega$[1]. Der Raum der **Hölder–stetigen Funktionen** $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in (0,1]$, besteht aus denjenigen Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega})$, für die gilt:

$$[f]_{k,\lambda} := \sum_{|\alpha|=k} \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \ne y}} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty .$$

Versehen mit der Norm

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}} = \|f\|_{k,\lambda} := \|f\|_k + [f]_{k,\lambda}$$

bildet $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ einen *Banachraum*, der *nicht separabel* ist (cf. [15, Kapitel 1]). Elemente aus dem Raum $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ heißen **Lipschitz–stetige** Funktionen.

Seien X, Y Banachräume. Man sagt, dass X **stetig** nach Y **einbettet**, in Zeichen $X \hookrightarrow Y$, falls $X \subseteq Y$ und falls für alle $x \in X$ gilt:

$$\|x\|_Y \le c\,\|x\|_X ,$$

wobei die Konstante c von x unabhängig ist. Die Einbettung X nach Y heißt **kompakt**, in Zeichen $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$, falls sie stetig ist und beschränkte Mengen in X präkompakt in Y sind.

Wir haben folgende Einbettungen für Räume Hölder–stetiger Funktionen.

12.6 Satz. *Sei Ω ein Gebiet und sei $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \nu < \lambda \le 1$. Dann sind die Einbettungen*

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\nu}(\overline{\Omega}) ,$$
$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k}(\overline{\Omega})$$

stetig. Falls Ω ein beschränktes Gebiet ist, sind diese Einbettungen kompakt.

Beweis. cf. [15, Satz 1.5.10], [1, Satz 1.31] ■

[1] Man schreibt $M \subset\subset \Omega$ falls $\overline{M} \subseteq \Omega$ und $\overline{M}$ kompakt ist.

Um einen weiteren Einbettungssatz formulieren zu können benötigen wir eine Bedingung an das Gebiet Ω. Wir sagen, dass ein beschränktes Gebiet Ω einen **Rand** $\partial\Omega \in C^{k,\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in (0,1]$, besitzt, wenn es $m \in \mathbb{N}$ kartesische Koordinatensysteme X_j, $j = 1, \dots, m$,

$$X_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,d-1}, x_{j,d}) =: (x'_j, x_{j,d})$$

gibt und positive reelle Zahlen $\alpha, \beta > 0$, sowie m Funktionen

$$a_j \in C^{k,\lambda}([-\alpha,\alpha]^{d-1}), \qquad j = 1, \dots, m,$$

so dass die Mengen

$$\begin{aligned}
\Lambda^j &:= \big\{(x'_j, x_{j,d}) \in \mathbb{R}^d \,\big|\, |x'_j| \le \alpha\,, x_{j,d} = a_j(x'_j)\big\}\,,\\
V^j_+ &:= \big\{(x'_j, x_{j,d}) \in \mathbb{R}^d \,\big|\, |x'_j| \le \alpha\,, a_j(x'_j) < x_{j,d} < a_j(x'_j) + \beta\big\}\,,\\
V^j_- &:= \big\{(x'_j, x_{j,d}) \in \mathbb{R}^d \,\big|\, |x'_j| \le \alpha\,, a_j(x'_j) - \beta < x_{j,d} < a_j(x'_j)\big\}\,,
\end{aligned}$$

folgende Eigenschaften besitzen:

$$\Lambda^j \subset \partial\Omega,, \quad V^j_+ \subset \Omega\,, \quad V^j_- \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega\,, \quad j = 1, \dots, m\,,$$
$$\bigcup_{j=1}^m \Lambda^j = \partial\Omega\,.$$

12.7 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann ist, für $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda \in (0,1]$, die Einbettung*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$$

stetig.

Beweis. cf. [15, Satz 1.2.14], [1, Satz 1.31] ∎

A.12.2 Lebesgue–Räume $L^p(\Omega)$

Eine Darstellung der Theorie der Lebesgue–Räume $L^p(\Omega)$ kann in vielen Lehrbüchern gefunden werden. Die Beweise aller Behauptungen in diesem Abschnitt sind z.B. in [15, Kapitel 2], [2, Kapitel 1–4] und [1, Kapitel 2] enthalten.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, ein Gebiet, μ das auf $\mathbb{R}^d$ definierte Lebesgue–Maß und sei $1 \le p < \infty$. Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega)$ die Menge aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue–messbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_\Omega |f|^p \, dx := \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\,.$$

Mit $L^\infty(\Omega)$ bezeichnen wir die Menge aller (Äquivalenzklassen) Lebesgue–messbarer Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ für die eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$|f(x)| \le K \,.$$

Wir sagen, dass eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ **lokal integrierbar** ist, wenn für alle Lebesgue–messbaren Mengen $M \subseteq\subseteq \Omega$ gilt $f \in L^1(M)$. Die Menge aller lokal integrierbaren Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ wird mit $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ bezeichnet. Für Funktionen aus $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, bzw. $L^\infty(\Omega)$ definieren wir

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p := \Big(\int_\Omega |f|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \,, \tag{12.8}$$

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{M\in\mathcal{S}\\ \mu(M)=0}} \; \sup_{x\in\Omega\setminus M} |f(x)| \,. \tag{12.9}$$

Für diese Größen gilt folgende fundamentale Ungleichung:

12.10 Lemma (Hölder–Ungleichung). *Sei $f \in L^p(\Omega)$ und $g \in L^{p'}(\Omega)$, wobei $p \in [1,\infty]$ und p' der* ***duale Exponent*** *ist, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*[2] *Dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und es gilt:*

$$\Big|\int_\Omega fg \, dx\Big| \le \|f\|_p \, \|g\|_{p'} \,. \tag{12.11}$$

Der Beweis beruht auf der **Young–Ungleichung**

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \,,$$

die für $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ und $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt. In Anwendungen ist auch folgende Variante der *Young–Ungleichung* nützlich: Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $c(\varepsilon)$, so dass

$$ab \le \varepsilon\, a^p + c(\varepsilon)\, b^{p'} \,.$$

Mithilfe der Hölder–Ungleichung kann man die **Minkowski–Ungleichung**

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \,,$$

beweisen, die für Funktionen $f, g \in L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, gilt. Demzufolge bilden $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$, $p \in [1,\infty]$, normierte Vektorräume. Man kann zeigen, dass diese Räume vollständig sind, d.h. $\big(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p\big)$, $p \in [1,\infty]$, sind *Banachräume*.

[2] Wir benutzen die Konvention, dass sowohl $p = 1, p' = \infty$ als auch $p = \infty, p' = 1$ in der Identität $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ enthalten sind.

Der Raum $L^2(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt $(f,g) := \int_\Omega f\,g\,dx$, $f,g \in L^2(\Omega)$, ist ein *Hilbertraum*. Wir sagen, dass eine Folge $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ gegen $f \in L^p(\Omega)$ *konvergiert*, in Zeichen $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$ $(n \to \infty)$, genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0\,.$$

Mithilfe des Satzes von Lusin 11.5 und des Satzes 11.6 kann man beweisen, dass die Menge stetiger Funktionen mit kompakten Träger $C_0(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, liegt. Dies zusammen mit dem Satz von Weierstrass (cf. Satz 12.1) impliziert, dass $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, *separabel* ist. Auf Grundlage der Sätze 11.14 und 11.15 kann man sogar zeigen, dass glatte Funktionen mit kompakten Träger $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$ liegen falls $1 \le p < \infty$. Dazu benötigt man eine nichtnegative Funktion $J \in C_0^\infty(\Omega)$ mit den Eigenschaften:

(i) $J(x) = 0,$ falls $|x| \ge 1\,,$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} J(x)\,dx = 1\,.$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir den **Glättungsoperator**

$$J_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} J(x/\varepsilon)\,.$$

Aufgrund der Definition gilt $\operatorname{supp}(J_\varepsilon) \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$ und J_ε besitzt die Eigenschaft (ii). Die **Konvolution**

$$(J_\varepsilon * f)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy\,,$$

welche für Funktionen f definiert ist, für die die rechte Seite Sinn macht, heißt **Regularisierung** von f. Ein typisches Beispiel für J ist

$$J(x) = \begin{cases} k\,\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right), & \text{falls } |x| \le 1\,, \\ 0\,, & \text{falls } |x| \ge 1\,, \end{cases}$$

wobei k eine Normierungskonstante ist.

12.12 Satz. *Sei Ω ein Gebiet des $\mathbb{R}^d$, sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ außerhalb von Ω identisch Null und sei $\varepsilon > 0$.*

(i) *Für $f \in L^1(\Omega)$ gilt: $J_\varepsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

(ii) *Falls $\operatorname{supp}(f) \subseteq\subseteq \Omega$, dann ist $J_\varepsilon * f \in C_0^\infty(\Omega)$ für $\varepsilon < \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(f), \partial\Omega)$.*

(iii) *Für $f \in L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, gilt: $J_\varepsilon * f \in L^p(\Omega)$ und*

$$\|J_\varepsilon * f\|_p \le \|f\|_p\,,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|J_\varepsilon * f - f\|_p = 0\,.$$

(iv) *Für $f \in C(\Omega)$ und $K \subseteq\subseteq \Omega$ gilt:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon * f(x) = f(x) \qquad \textit{gleichmäßig auf } K\,.$$

Der *Dualraum* von $L^p(\Omega)$ kann wie folgt charakterisiert werden.

12.13 Satz. *Sei Ω ein Gebiet und sei f ein stetiges, lineares Funktional auf $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion $g \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, so dass für alle $u \in L^p(\Omega)$ gilt:*

$$\langle f, u \rangle_{L^p(\Omega)} = \int\limits_\Omega g\, u\, dx\,.$$

Darüber hinaus gilt:

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|g\|_{L^{p'}}\,.$$

Aufgrund dieses Satzes kann man zeigen, dass der Raum $L^p(\Omega)$ *reflexiv* ist, falls $1 < p < \infty$. Die Räume $L^1(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ sind für beschränkte, nichtleere Gebiete Ω *nicht* reflexiv. Der Beweis des Satzes 12.13 beruht auf Satz 11.3 und

12.14 Satz (Radon–Nikodým). *Sei Ω ein Gebiet und sei ν ein auf der σ–Algebra $\mathcal{M}_\Omega$, der Lebesgue–messbaren Teilmengen von Ω, definiertes Maß mit* var $(\nu) < \infty$, *das* ***absolut stetig*** *bzgl. des Lebesgue–Maßes μ ist, d.h. für alle $M \in \mathcal{M}_\Omega$ gilt:*

$$\mu(M) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \nu(M) = 0\,.$$

Dann existiert genau eine nichtnegative Funktion $h \in L^1(\Omega)$, so dass für alle $M \in \mathcal{M}_\Omega$ gilt:

$$\nu(M) = \int\limits_M h\, d\mu\,.$$

Man nennt die Funktion h die Radon–Nikodým Ableitung von ν bzgl. μ.

Es gilt folgendes Analogon des Satzes 12.4.

12.15 Satz (Kolmogorov). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Eine Teilmenge M von $L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, ist genau dann relativ kompakt, wenn M beschränkt und p–**gleichgradig stetig** ist, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $f \in M$ und alle $h \in \mathbb{R}^d$ mit $|h| \le \delta$ gilt:*

$$\int\limits_\Omega |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \le \varepsilon^p\,.$$

Mithilfe der Hölder–Ungleichung (12.11) kann man folgende Einbettung beweisen.

12.16 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet. Für alle $1 \leq q < p \leq \infty$ ist die Einbettung*

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

stetig.

Diese Aussage ist für unbeschränkte Gebiete *nicht* richtig.

A.12.3 Sobolev–Räume $W^{k,p}(\Omega)$

Auch die Theorie der Sobolev–Räume $W^{k,p}(\Omega)$ kann in vielen Lehrbüchern nachgelesen werden. Die Beweise aller Behauptungen in diesem Abschnitt finden sich z.B. in [15, Kapitel 5], [2], [10, Kapitel 4] und [1, Kapitel 3, 5, 6].

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, ein Gebiet. Seien $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ lokal integrierbare Funktionen und sei α ein Multiindex. Wir sagen, dass g die α-te **schwache partielle Ableitung** von f ist, in Zeichen

$$\partial^\alpha f := g\,,$$

wenn für alle *Testfunktionen* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega f\,\partial^\alpha \varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\,\varphi\,dx\,.$$

Mit den schwachen partiellen Ableitungen kann man im Wesentlichen wie mit klassischen partiellen Ableitungen rechnen, allerdings muss man immer acht geben, dass alle auftretenden Terme wohldefiniert sind. Für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $W^{k,p}(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $f \in L^p(\Omega)$, deren schwache partielle Ableitungen $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \leq k$, existieren und zum Raum $L^p(\Omega)$ gehören. Der Raum $W^{k,p}(\Omega)$, versehen mit der Norm

$$\|f\|_{W^{k,p}} = \|f\|_{k,p} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p} \Big)^{\frac{1}{p}}\,,$$

bildet für alle $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ einen *Banachraum*. Der Raum $W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$, ist isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $(L^p(\Omega))^N$, $N := \sum_{|\alpha| \leq k} 1$. Deshalb ist $W^{k,p}(\Omega)$ *separabel* für $1 \leq p < \infty$ und *reflexiv* für $1 < p < \infty$. Man beachte, dass für alle Elemente $f \in W^{k,p}(\Omega)$ per Definition die **partielle Integrationsformel**

$$\int_\Omega f\,\partial^\alpha \varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha f\,\varphi\,dx \tag{12.17}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt. Wir sagen, dass eine Folge $(f_n) \subset W^{k,p}(\Omega)$ gegen $f \in W^{k,p}(\Omega)$ *konvergiert*, in Zeichen $f_n \to f$ in $W^{k,p}(\Omega)$ $(n \to \infty)$, genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{W^{k,p}} = 0\,.$$

Wir bezeichnen mit $W_0^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ im Raum $W^{k,p}(\Omega)$. Da $W_0^{k,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ ist, erhalten wir sofort, dass der *Banachraum* $W_0^{k,p}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ *separabel* und für $1 < p < \infty$ *reflexiv* ist. Man kann zeigen, dass für alle Elemente f des Dualraumes $(W_0^{k,p}(\Omega))^*$ Funktionen $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$, $|\alpha| \le k$, existieren, so dass für alle $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ gilt:

$$\langle f, u\rangle = \Big\langle \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f_\alpha, u \Big\rangle := \sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega f_\alpha\, \partial^\alpha u\, dx\,.$$

Mithilfe des Glättungsoperators J_ε kann man Funktionen aus $W^{k,p}(\Omega)$ *lokal* durch glatte Funktionen approximieren.

12.18 Satz. *Sei Ω ein Gebiet und sei $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Für $\varepsilon > 0$ sei $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \,\big|\, \operatorname{dist}(\partial\Omega, x) > \varepsilon\}$. Dann gilt:*

(i) $\partial^\alpha\big(J_\varepsilon * f\big) = J_\varepsilon * \big(\partial^\alpha f\big)$ *in* Ω_ε, $|\alpha| \le k$.

(ii) $J_\varepsilon * f \in W^{k,p}(\Omega_\varepsilon)$ *für alle* $\varepsilon > 0$.

(iii) $J_\varepsilon * f \to f$ *in* $W^{k,p}(V)$ $(\varepsilon \to 0)$ *für alle* $V \subseteq\subseteq \Omega$.

Um auch eine *globale* Approximation von Funktionen aus $W^{k,p}(\Omega)$ durch glatte Funktionen zu beweisen, benötigt man eine so genannte *Zerlegung der Eins*.

12.19 Satz. *Sei A eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von A durch offene Mengen, d.h. $A \subseteq \cup_{i\in I} U_i$. Dann existiert ein System von Funktionen $\lambda_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $i \in I$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle λ_i, $i \in I$, und alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:* $0 \le \lambda_i(x) \le 1$.

(ii) *Sei $K \subseteq\subseteq A$. Dann gilt für alle bis auf endlich viele $i \in I$:* $\lambda_i|_K \equiv 0$.

(iii) *Für alle $i \in I$ gilt:* $\operatorname{supp}(\lambda_i) \subset U_i$.

(iv) *Für alle $x \in A$ gilt:* $\sum_{i\in I} \lambda_i(x) = 1$.

Ein solches System von Funktionen $(\lambda_i)_{i\in I}$ heißt die zur Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ zugehörige ***Zerlegung der Eins****.*

Von nun an beschränken wir uns auf *beschränkte* Gebiete Ω und Sobolev–Räume $W^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. Für die meisten der folgenden Aussagen gibt es entsprechende Verallgemeinerungen auf beliebige Sobolev–Räume $W^{k,p}(\Omega)$ bzw. $W_0^{k,p}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und unbeschränkte Gebiete Ω.

12.20 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Dann existiert für alle Funktionen $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, eine Folge $(f_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $f_n \to f$ in $W^{1,p}(\Omega)$ $(n \to \infty)$.*

Für Funktionen f aus dem Sobolev–Raum $W^{1,p}(\Omega)$ kann man zeigen, dass f *schwache Randwerte* besitzt.

12.21 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ und $1 \le p < \infty$.*

(i) *Es gibt einen stetigen, linearen* ***Spuroperator*** $T\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, *so dass für alle $f \in C(\overline{\Omega})$ gilt:*

$$T(f) = f \qquad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

(ii) *Für alle $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und $g \in W^{1,p'}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ gilt die Formel für die partielle Integration:*

$$\int_\Omega f\,\partial_i g\,dx = -\int_\Omega \partial_i f\,g\,dx + \int_{\partial\Omega} T(f)\,T(g)\,\nu_i\,dS\,,$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = (\nu^1,\ldots,\nu^d)$ die äußere Normale an $\partial\Omega$ ist.

Die Funktion $T(f) \in L^p(\partial\Omega)$ nennt man **Spur** der Funktion $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Man kann zeigen, dass

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \big\{ f \in W^{1,p}(\Omega) \,\big|\, T(f) = 0 \big\}\,.$$

gilt. Man kann auch zeigen, dass man Funktionen aus $W^{1,p}(\Omega)$ auf $\mathbb{R}^d$ *fortsetzen* kann.

12.22 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ und $1 \le p \le \infty$. Sei V eine beschränkte offene Menge mit $\Omega \subseteq\subseteq V$. Dann gibt es einen stetigen, linearen Operator $E\colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, so dass für alle $f \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:*

$$E(f) = f \qquad \text{fast überall in } \Omega$$

und $\operatorname{supp} E(f) \subset V$. *Darüber hinaus gilt für alle $f \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$\|E(f)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le c\,\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,,$$

wobei die Konstante c nur von p, Ω und V abhängt.

Auch für Sobolev–Räume kann man **Einbettungssätze** beweisen.

12.23 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$. Dann gilt:*

(i) *Falls $1 \le p < d$ und $f \in W^{1,p}(\Omega)$, dann gilt für alle $1 \le q \le p^* := \frac{pd}{d-p}$ die Abschätzung:*

$$\|f\|_{L^q} \le c\,\|f\|_{W^{1,p}}\,,$$

wobei die Konstante c nur von p, d und Ω abhängt.

(ii) *Falls* $p = d$ *und* $f \in W^{1,d}(\Omega)$*, dann gilt für alle* $1 \leq q < \infty$ *die Abschätzung:*

$$\|f\|_{L^q} \leq c\,\|f\|_{W^{1,d}}\,,$$

wobei die Konstante c *nur von* d, q *und* Ω *abhängt.*

(iii) *Falls* $p > d$ *und* $f \in W^{1,p}(\Omega)$*, dann gilt für* $\gamma := 1 - \frac{d}{p}$ *die Abschätzung:*

$$\|f\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c\,\|f\|_{W^{1,p}}\,,$$

wobei die Konstante c *nur von* p, d *und* Ω *abhängt.*

Für Funktionen $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ kann man die Abschätzung in (i) wie folgt verbessern:

$$\|f\|_{L^q} \leq c\,\|\nabla f\|_{L^p}\,,$$

wobei $1 \leq q \leq p^*$ und die Konstante c nur von p, d und Ω abhängt. Man kann zeigen, dass die obigen Einbettungen *kompakt* sind, falls die Ungleichungen strikt sind.

12.24 Satz. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*,* $d \geq 1$*, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand* $\partial\Omega$*. Dann gilt:*

(i) *Falls* $1 \leq p < d$*, dann ist für alle* $1 \leq q < p^*$ *die Einbettung*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

kompakt.

(ii) *Falls* $p = d$ *und* $1 \leq q < \infty$*, dann ist die Einbettung*

$$W^{1,d}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

kompakt.

(iii) *Falls* $p > d$ *und* $0 \leq \lambda < \gamma := 1 - \frac{d}{p}$*, dann ist die Einbettung*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$$

kompakt.

12.25 Satz (Poincaré–Ungleichung). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*,* $d \geq 1$*, ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand* $\partial\Omega$*. Dann gilt für alle* $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *die Abschätzung:*

$$\|f\|_{L^p} \leq c\,\|\nabla f\|_{L^p}\,,$$

wobei die Konstante c *nur von* p, d *und* Ω *abhängt.*

Mithilfe dieses Satzes kann man sofort sehen, dass auf dem Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ durch $\|\nabla f\|_{L^p}$ eine **äquivalente Norm** gegeben ist, d.h. es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass für alle $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$c_1\,\|\nabla f\|_{L^p} \leq \|f\|_{W^{1,p}} \leq c_2\|\nabla f\|_{L^p}\,. \tag{12.26}$$

Literaturverzeichnis

1. R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.
2. H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*, Springer, Berlin, 2002.
3. H. Amann, J. Escher, *Analysis III*, Grundstudium Mathematik, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
4. L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979.
5. H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications.*, Masson, Paris, 1983.
6. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces—selected topics*, Springer, Berlin, 1975, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485.
7. N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators. I. General Theory*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
8. I. Ekeland, R. Témam, *Convex analysis and variational problems*, Classics in Applied Mathematics, vol. 28, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
9. R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
10. L.C. Evans, R.F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
11. S. Fučík, J. Nečas, J. Souček, V.Souček, *Spectral analysis of nonlinear operators*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 346, Springer, Berlin, 1973.
12. H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
13. D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.
14. H. Heuser, *Funktionalanalysis*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
15. A. Kufner, O. Johnu und S. Fučík, *Function Spaces*, Academia, Praha, 1977.
16. R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.
17. G. De Rham, *Variétés Différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
18. W. Rudin, *Reelle und komplexe Analysis*, R. Oldenbourg Verlag, Munich, 1999.
19. J. Lukeš, J. Malý, *Measure and Integral*, Matfyzpress, Prague, 1995.
20. R.E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
21. J. Wloka, *Partielle Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1982.

22. K. Yosida, *Functional analysis*, Springer, Berlin, 1980.
23. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I*, Springer, New York, 1986, Fixed-point theorems.
24. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A*, Springer, New York, 1990, Linear monotone operators.
25. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B*, Springer, New York, 1990, Nonlinear monotone operators.
26. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. III*, Springer, New York, 1985, Variational methods and optimization.
27. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. IV*, Springer, New York, 1988, Applications to mathematical physics.
28. E. Zeidler, *Applied functional analysis*, Applied Mathematical Sciences, vol. 109, Springer, New York, 1995, Main principles and their applications.

Index

Druck und Bindung: Strauss GmbH, Mörlenbach